Mathematische Logik
Jan Philipp Hafer
jan.hafer@rwth-aachen.de

1. Tutorium

<u>Inhaltliches</u>
1. Syntax $\neq$ Semantik zB
$x \vee y \neq y \vee x$(Syntax)
aber $x \vee y \equiv y \vee x$(Semantik)
2. Sei X eine Variable
<u>Nicht</u> $X = 1$
<u>aber</u> Sei $\mathfrak{I}$ Interpretation mit $\mathfrak{I}(X) = 1$
3. Sei φ Formel
<u>Nicht</u> $\mathfrak{I}(\varphi) = 1$
<u>aber</u> $[\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1$ oder $\mathfrak{I} \models \varphi$

Aufgabe 1

(Tautologie immer wahr)
a)

$$\begin{aligned}
\neg(X \to (Y \to X)) &\equiv \neg(X \to (\neg Y \vee X)) \\
&\equiv \neg(\neg X \vee (\neg Y \vee X)) \\
&\equiv \neg(\neg X \vee \neg Y \vee X) \\
&\equiv \neg 1 \equiv 0
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
(Y \to X) \wedge (X \to \neg Y) &\equiv (\neg Y \vee X) \wedge (\neg X \vee \neg Y) \\
&\equiv \neg Y \vee (X \wedge \neg X) \equiv \neg Y
\end{aligned}$$

erfüllbar zB mit Interpretation $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I}(X) = \mathfrak{I}(Y) = 0$
(Einschub $I(v) = 0 \forall v \in \{x, y, z\}$)
aber keine Tautologie, da für $\mathfrak{I}'(X) = \mathfrak{I}'(Y) = 1$ gilt $[\![\varphi_b]\!]^{\mathfrak{I}'} = 0$
c)

$$\begin{aligned}
(Y \to X) \vee (X \to \neg Y) &\equiv (\neg Y \vee X) \vee (\neg X \vee \neg Y) \\
&\equiv \neg Y \vee X \vee \neg X \\
&\equiv 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Tautologie

Aufgabe 2

(Aufgabenstellung leider etwas undeutlich formuliert)
<u>Nicht</u> Sei $X_1 =$ "Liecht leuchtet im ersten Stock"
<u>Richtig</u> Sei X_i eine AL-Variable mit $\mathfrak{I}(X_i) = 1$ gdw. im i-ten Stock das Licht brennt

$$\varphi_1 = X_1 \leftrightarrow (X_2 \wedge X_3 \wedge X_4)$$

$$[A_{\leftrightarrow} \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)]$$

$$\varphi_2 = ((\neg X_1 \wedge \neg X_3) \to X_2) \wedge ((\neg X_1 \wedge \neg X_4) \to X_2) \wedge ((\neg X_3 \wedge \neg X_4) \to X_2)$$

$$\varphi_3 = X_3 \leftrightarrow ((\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_4) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_4) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_4) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_4)$$

$$\varphi_4 = [(X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3) \to X_4] \wedge [(\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \to X_4] \wedge [(\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \to X_4]$$

Setze $\varphi := \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$
Gesucht $\mathfrak{I} : \{X_1, \_, X_4\} \to \{0,1\}$ mit $\mathfrak{I} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \varphi_3 \wedge \varphi_4$
1. Angenommen $\mathfrak{I}(X_1) = 1$
mit (1) folgt $\mathfrak{I}(X_2) = \mathfrak{I}(X_3) = \mathfrak{I}(X_4) = 1$
$\lightning$ zur (3)
$\Rightarrow \underline{\mathfrak{I}(X_1) = 0}$
2. Angenommen $\mathfrak{I}(X_2) = 0 \rightsquigarrow \mathfrak{I}(X_2) = \mathfrak{I}(X_4)$
1. Fall $\mathfrak{I}(X_2) = \mathfrak{I}(X_4) = 0 \overset{(4)}{\to} \mathfrak{I}(X_4) = 1 \lightning$
2. Fall $\mathfrak{I}(X_2) = \mathfrak{I}(X_4) = 1$ $\lightning$ zu (1) oder (2)
$\Rightarrow \underline{\mathfrak{I}(X_3) = 0}$
3. Angenommen $\mathfrak{I}(X_2) = 0$
Eigentlich schon ohne Widerspruch aus (2) folgt $\underline{\mathfrak{I}(X_2) = 1}$
Nach (4) $\mathfrak{I}(X_4) = 1$
bzw als Darstellung
1 $\times$
2 ✓
3 $\times$
4 ✓

Aufgabe 3

Vorgehen
Äquivalenz: Umformen
Nicht-Äquivalenz: Interpretation angeben
a)

$$\neg X \to \neg Y \equiv X \vee \neg Y \qquad \begin{aligned} & Y \to ((\neg Z \vee \neg X) \to X) \\ \equiv\ & Y \to (\neg(\neg Z \vee \neg X) \vee X) \\ \equiv\ & Y \to ((Z \wedge X) \vee X) \\ \overset{\text{Absorbtion}}{\equiv}\ & Y \to X \\ \equiv\ & \neg Y \vee X \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Äquivalent
b)

$$Y \vee Z \qquad \begin{aligned} & (X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \\ \equiv\ & Y \vee ((X \vee Z) \wedge (\neg X \vee Z)) \\ \equiv\ & Y \vee (Z \vee (\underbrace{X \wedge \neg X}_{\equiv 1})) \equiv Y \vee Z \end{aligned}$$

$\rightsquigarrow$ Äquivalent
c)

$$Z \qquad \begin{aligned} & (X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \\ \equiv\ & Z \vee [(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y)] \\ \equiv\ & Z \vee [(X \wedge \neg X) \vee (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X) \vee (Y \wedge \neg Y)] \\ \equiv\ & Z \vee (X \wedge \neg Y) \vee (Y \wedge \neg X) \end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{I}$ Interpretation: $\mathfrak{I}(Z) = 0, \mathfrak{I}(X) = 1, \mathfrak{I}(Y) = 0$
Damit gilt $\mathfrak{I} \not\models Z$, aber $\mathfrak{I} \models (X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z)$
$\rightsquigarrow$ nicht äquivalent

Aufgabe 4

a)

$$\mathfrak{I}(X_1) = 0, \mathfrak{I}(X_2) = \mathfrak{I}(X_3) = 1 \text{ und es gilt } \mathfrak{I} \models \varphi$$

$$\mathfrak{I}(X_1) = 1, \mathfrak{I}(X_2) = \mathfrak{I}(X_3) = 1 \text{ und es gilt } \mathfrak{I} \not\models \varphi$$

$$\varphi = (X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3)$$

Def. $X \oplus Y \equiv (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)$ für 2 Variablen $\varphi = X \oplus Y$

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Für 3 Variablen: $\varphi(X_1, X_2, X_3) = (X_1 \oplus X_2) \oplus X_3$
Auch $\neg\varphi$
Behauptung: Für $n \in \mathbb{N}$ haben $\varphi_n = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ und $\neg\varphi_n$ diese Eigenschaft
(IA) $n = 1$ klar, da $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0$
(IV) Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$

(IS) Seien $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}'$ zwei Interpretationen, die sich in genau einer Variable unterscheiden
$\varphi = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \oplus X_{n+1}$
Falls $\mathfrak{I}(X_i) \neq \mathfrak{I}'(X_i)$ für $i \in \{1, \_, n\}$
Dann ist nach (IV): $[\![X_1 \oplus \cdots \oplus X_n]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 - [\![X_1 \oplus \cdots \oplus X_n]\!]^{\mathfrak{I}'}$
$\rightsquigarrow [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}} = 1 - [\![\varphi]\!]^{\mathfrak{I}'}$
$\rightsquigarrow$ anderer Fall analog
b) Behauptung: Jede Formel ψ mit der gewünschten Eigenschaft ist äquivalent zu φ_n oder $\neg\varphi_n$, genauer: seien $\varphi_n^1, \varphi_n^2, \varphi_n^3$ paarweise nicht äquivalente Formeln mit der Eigenschaft $\mathfrak{I}_0 : \{X_1, \ldots, X_n\} \to \{0,1\}$ konstant 0
Dann gibt es $i \neq j \in \{1,2,3\}$ mit $\mathfrak{I}_0 \models \varphi_n^i$ gdw. $\mathfrak{I}_0 \models \varphi_n^j$
Zeige also, dass φ_n^i und φ_n^j äquivalent
Sei $\mathfrak{I}$ Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \varphi_n$
Formeller geschrieben: Sei X_l Variable mit $\mathfrak{I}(X_l) = 1$ und sei $\mathfrak{I}'$ die Interpretation mit $\mathfrak{I}'(X) = \begin{cases} 0 & X = X_l \\ \mathfrak{I}(X) & \text{sonst} \end{cases}$ Wenn für eine gerade Anzahl von Variablen X_i gilt: $\mathfrak{I}(X_i) \neq \mathfrak{I}'(X_i)$
$\rightsquigarrow \mathfrak{I}' \models \varphi_n$
Beweis Induktion analog wie oben
$\to$ Falls $\mathfrak{I}''$ sich in ungeraden vielen Variablen unterscheidet
$\xrightarrow{\star} \mathfrak{I}'' \not\models \varphi_n \rightsquigarrow \mathfrak{I}'' \models \neg\varphi_n$
Alternative
Beweis er Induktion über die Anzahl k der Variablen, die $\mathfrak{I}$ mit 1 belegt
IA $k = 0$. Dann $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_0$
IS Sei X_l Variable mit $\mathfrak{I}(X_l) = 1$ und sei $\mathfrak{I}'$ Interpretation mit $\mathfrak{I}'(X) = \begin{cases} 0 & X = X_l \\ \mathfrak{I}(X) & \text{sonst} \end{cases}$
Nach IV gilt $\mathfrak{I}' \models \varphi_n^i$ gdw $\mathfrak{I}' \models \varphi_n^j$
Wegen Eigenschaft aus a) gilt
$\mathfrak{I} \models \varphi_n^i \overset{\text{a)}}{\text{gdw}} \mathfrak{I}' \not\models \varphi_n^i \overset{\text{IV}}{\text{gdw}} \mathfrak{I}' \not\models \varphi_n^j \overset{\text{a)}}{\text{gdw}} \mathfrak{I} \models \varphi_n^j$
Somit sind 2 Formeln äquivalent, wenn 3 Formeln die Eigenschaft erfüllen
Nach Induktion gilt $\varphi_n^i \equiv \varphi_n^j$ $\quad\lightning$ zur Annahme, dass $\varphi_n^1, \varphi_n^2, \varphi_n^3$ paarweise nicht äquivalent

2. Tutorium

Aufgabe 1

Eine Menge ist funktional vollständig, wenn man damit alle boolschen Funktionen darstellen kann
a)
$\{sel, 0, 1\}$, wobei $\text{sel}(u, v, w) = \begin{cases} v & \text{falls } u = 0 \\ w & \text{falls } u = 1 \end{cases}$
Wir können $\wedge$ darstellen mit $X_1 \wedge X_2 \equiv sel(X_1, 0, X_2)$
Wir können $\neg$ darstellen mit $\neg X_1 \equiv setl(X_1, 1, 0)$
Zeige $\mathfrak{I} \models \text{sel}(\varphi, 0, \psi)\text{gdw}.\mathfrak{I} \models \varphi \wedge \psi$
Wenn $\mathfrak{I} \not\models \varphi$, dann $[\![\text{sel}(\varphi, 0, \psi)]\!]^{\mathfrak{I}} = 0$
Wenn $\mathfrak{i} \models \varphi$, dann $[\![\text{setl}(\varphi, 0, \psi)]\!]^{\mathfrak{I}} = [\![\psi]\!]^{\mathfrak{I}}$
Da $\{\neg, \wedge\}$ funktional vollständig nach VL ist (und logisch durch die vorhandenen Operanden dargestellt werden kann), ist auch diese Menge funktional vollständig
b)
$\{\rightarrow, 1\}(1 \rightarrow 1) \rightarrow 1 \rightarrow x$
Zeige: $\neg$ ist nicht darstellbar,
da für $\mathfrak{I} : \tau \rightarrow \{0, 1\}, X \mapsto 1 \forall x \in \tau$
immer gilt: $\mathfrak{I} \models \varphi$, falls φ aus $\rightarrow .1$ aufgebaut ist.
Beweis per Induktion über den Aufbau von φ
IA(Induktionsanfang)
a) $\varphi = X$ klar
b) $\varphi = 1$ klar IS(Induktionssatz) $\varphi = \psi \rightarrow \vartheta$ folgt direkt aus der IV

Aufgabe 2

Widersprechen von Äquivalenz von Horn-Formeln
Vorlesung Jede Hornformel hat ein minimales Modell
Die Modelle ändern sich nicht dadurch, dass wir die Formel syntaktisch umformen
Minimales Modell ist Modell mit möglichst wenig 1en und in jedem Modell müssen 1en aus minimalem Modell gesetzt sein
Horn-Formeln abgeschlossen unter Schnitt(Übung 2.3)
$\mathfrak{I}$ ist minimales Modell,
wenn kein Modell $\mathfrak{I}'$ existiert (also $\mathfrak{I}'$ "kleiner"), sodass wenn $\mathfrak{I}'(X) = 1, \text{dann} \mathfrak{I}(X) = 1$
a)
$(X \rightarrow Z) \vee (Y \rightarrow Z)$
$\equiv (\neg X \vee Z) \vee (\neg Y \vee Z)$
$\equiv \neg X \vee Z \vee \neg Y$
$\Rightarrow$ es liegt eine Hornformel vor
b)
$X \leftrightarrow \neg Y)$
$\equiv (X \rightarrow \neg Y) \wedge (\neg Y \rightarrow X)$
$\equiv (\neg X \vee \neg Y) \wedge (Y \vee X)$
KNF,jedoch keine Hornformel
Jede Horn-Formel hat ein minimales Modell
$\mathfrak{I}_1 : X \mapsto 0, Y \mapsto 1$
$\mathfrak{I}_2 : X \mapsto 1, Y \mapsto 0$
$\mathfrak{I}_1 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_2 \models \varphi$
(nicht immer funktionierend)Ansatz
Die einzige kleinere Interpretation ist $\mathfrak{I}_o : X \mapsto 0, Y \mapsto 0$, aber $\mathfrak{I}_o \not\models \varphi$
Alternative(sicherer):
Modelle von Horn-Formeln sind unter Schnitt abgeschlossen
Aber $\mathfrak{I}_1 \models \varphi, \mathfrak{I}_2 \models \varphi$ und $\mathfrak{I}_1 \cap \mathfrak{I}_2 = \mathfrak{I}_o \not\models \varphi$
Also sind die Modell von φ nicht unter Schnitt abgeschlossen

Aufgabe 3

$(A \wedge B \rightarrow 0) \wedge (E \wedge F \rightarrow C) \wedge (1 \rightarrow A) \wedge (1 \rightarrow F) \wedge (A \rightarrow E) \wedge (C \rightarrow G)$
$\wedge (E \wedge G \wedge A \rightarrow H) \wedge (H \rightarrow E) \wedge (A \wedge F \wedge H \rightarrow B)$
$M_1 = \{A, F\}$
$M_2 = M_1 \cup \{E\}$
$M_3 = M_2 \cup \{C\}$
$M_4 = M_3 \cup \{G\}$
$M_5 = M_4 \cup \{H\}$
$M_6 = M_5 \cup \{B\}$
Der Markierungsalgorithmus gibt "unerfüllbar" aus, weil A und B markiert sind und damit die gesamte linke Seite der Implikation
$A \wedge B \rightarrow 0$

3. Tutorium

Aufgabe 1

Sei M eine Menge,
$>$ eine 2-stelliger Relation auf M
$T := \{X_{a,b} | a, b \in M\}$
Sei $\mathfrak{I} : \tau \to \{0, 1\}$ Interpretation
Gelte $\mathfrak{I}(X_{a,b}) = 1 \text{gdw.} a < b$
<u>Ziel</u> Finde $\Phi \subseteq AL$, sodass $\mathfrak{I} \models \Phi$ gdw. die durch $\mathfrak{I}$ definiterte Relation ist Totalordnung

$$\Phi_{\text{irr.}} := \{\neg X_{a,a} | a \in M\}$$
$$\Phi_{\text{trans.}} := \{X_{a,b} \wedge X_{b,c} \to X_{a,c} | a, b, c \in M\}$$
$$\Phi_{\text{total}} := \{X_{a,b} \oplus X_{b,a} | a, b \in M, a \neq b\}$$
$$\Phi := \Phi_{\text{irr.}} \cup \Phi_{\text{trans.}} \cup \Phi_{\text{total}}$$

<u>Kompaktheitssatz</u> Eine (unendliche) Formelmenge ist genau dann erfüllbar,
wenn jede endliche Teilmenge erfüllbar ist
Beh: Φ ist erfüllbar
Bew: Nach KS(Kompaktheitssatz) genügt zu zeigen:
Jedes endliche $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar
Sei $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich
$M_0 := \{a | X_{a,b} \text{ oder } X_{b,a} \text{kommt für ein } b \in M in \Phi_0 \text{vor } \}$
M_0 ist endlich, da Φ_0 endlich
$M_0 = \{m_1, \ldots, m_n\}, n \in \mathbb{N}$

M_0 ist total geordnet durch die übliche $<$-Relation auf den Indizes
Definiere Interpretation $\mathfrak{I}_\circ : \tau \to \{0, 1\}$:
$$\mathfrak{I}_\circ(X_{a,b}) = \begin{cases} 1 & \text{falls } A = m_i, \text{ für } i, j \in \{1, \ldots, n\} \\ & \qquad b = m_j, \text{ und } i < j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
$\mathfrak{I}_\circ \models \Phi_0$; denn
Sei $\varphi \in \Phi_0$ beliebig
Falls $\varphi \in \Phi_{\text{trans.}} : \varphi = X_{a,b} \wedge X_{b,c} \to X_{a,c}$ für $a = m_i, b = m_j, c = m_k$ für $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$
Angenommen $\mathfrak{I}_\circ \not\models \varphi$
$\mathfrak{I}_\circ(X_{m_i}, X_{m_j}) = \mathfrak{I}_\circ(X_{m_j}, X_{m_k}) = 1$, aber $\mathfrak{I}_\circ(X_{m_i}, X_{m_k}) = 0$
$\Rightarrow \underbrace{i < j \text{ und } j < k}_{\Rightarrow i<k} \text{ und } i > k$
Falls $\varphi \in \Phi_{\text{irr.}}$ analog ...
Falls $\varphi \in \Phi_{\text{total.}}$ analog ...
$\Rightarrow$ Nach Kompaktheitssatz: Φ ist erfüllbar $\qquad \square$

Aufgabe 2

Es darf nur ein Literal per Resolution eliminiert werden!
$K(\varphi) = \{\{X, Y\}, \{\neg X, \neg Y\}, \{Z, Q\}, \{Z, \neg Q\}, \{\neg Y\}, \{\neg X, Y, \neg Z\}\}$

$\{Z, Q\}, \{Z, \neg Q\} \equiv \{Z\}$
$\{Z\}, \{\neg X, Y, \neg Z\} \equiv \{\neg X, Y\}$
$\{X, Y\}, \{\neg X, Y\} \equiv \{Y\}$
$\{Y\}, \{\neg Y\} \equiv \square$
$\square \in \text{Res}^*(K(\varphi)) \overset{\text{Resolutionssatz}}{\Longrightarrow} \varphi$ ist unerfüllbar
Jan: Laufzeit ist exponentiell 2^n oder äquivalent zu SAT-Problem, welches NP-vollständig ist

zB $\{X, Y\}, \{\neg X, \neg Y\}$ NICHT erlaubt
Angenommen es geht doch:
$\{Z, X, Y\}, \{\neg X, \neg Y\}$
$\{Z, Y, \neg Y\} \equiv \{Z, Y, \neg Y\}$
und anfügen von zB von $\{Y\}$ ergibt: $\{Z, Y, \neg Y\} \equiv \{Z, Y\}$ $\lightning$

4. Tutorium

$\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist gültig, wenn aus $\bigwedge \Gamma$ schon $\bigvee \Delta$ folgt

Aufgabe 1

Konstruieren Sie im Sequenzenkalkül Beweise oder falsifizierende Interpreta- tionen für folgende Sequenzen:
Argumentieren Sie nun jeweils semantisch ob die Sequenzen gültig sind, d.h. unter direkter Verwendung der Definition von Gültigkeit über Interpretationen. **a)** $X \to (Y \vee Z), \neg(Y \wedge Z) \Rightarrow X, \neg Z$ Im Prinzip egal, welche Regel man anwendet
Immer wenn möglich die Sequenzregel nehmen, wo 1 Sequenz folgt
Sequenz ist ungültig, falsifizierende Interpretation:
$\mathfrak{I}(Z) = 1, \mathfrak{I}(X) = \mathfrak{I}(Y) = 0$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{falsche Sequenz}}{Z \Rightarrow X, Y} \qquad \dfrac{\text{Axiom}}{Z \Rightarrow X, Z}}{Z \Rightarrow X, Y \wedge Z}\,(\Rightarrow \wedge) \qquad \dfrac{\text{Axiom}}{Z, Y \vee Z \Rightarrow X, Y \wedge Z}}{X \to (Y \vee Z), Z \Rightarrow X, Y \wedge Z}\,(\to\Rightarrow)}{X \to (Y \vee Z), \neg(Y \wedge Z), Z \Rightarrow X}\,(\neg \Rightarrow)}{X \to (Y \vee Z), \neg(Y \wedge Z) \Rightarrow X, \neg Z}\,(\Rightarrow \neg)$$

semantisch:
Sei $\mathfrak{I}$ eine passende Interpretation mit $\mathfrak{I} \models x \to (Y \vee Z), \mathfrak{I} \models \neg(Y \wedge Z)$
<u>1.Fall</u> $\mathfrak{I}(X) = 1 \rightsquigarrow \mathfrak{I}(Y) = 1$ oder $\mathfrak{I}(Z) = 1$
<u>Fall1a</u> $\mathfrak{I}(Y) = 1 \rightsquigarrow \mathfrak{I}(Z) = 0$, aber $\mathfrak{I} \models X \vee \neg Z$
Suche Interpretation die linke Seite erfüllt, aber keine Formel der rechten Seite
$\mathfrak{I}(X) = 0, \mathfrak{I}(Z) = 1, \mathfrak{I}(Y) = 0$
b) $C \to \neg B, B \to \neg A \Rightarrow \neg B, \neg(C \vee A)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{B, C, B \to \neg A \Rightarrow C} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{B, A \Rightarrow C, B} \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{B, A \Rightarrow C, A}}{B, A, \neg A \Rightarrow C}\,(\neg \Rightarrow)}{B, A, B \to \neg A \Rightarrow C}\,(\to\Rightarrow)}{B, C \vee A, B \to \neg A \Rightarrow C}\,(\vee \Rightarrow) \qquad \dfrac{\dfrac{\text{Axiom}}{B, B \to \neg A \Rightarrow B}}{B, \neg B, B \to \neg A \Rightarrow \emptyset}\,(\neg \Rightarrow)}{C \to \neg B, B \to \neg A, B, C \vee A \Rightarrow \emptyset}\,(\to\Rightarrow)}{C \to \neg B, B \to \neg A, B \Rightarrow \neg(C \vee A)}\,(\Rightarrow \neg)}{C \to \neg B, B \to \neg A \Rightarrow \neg B, \neg(C \vee A)}\,(\Rightarrow \neg)$$

wurde nicht vollständig gemacht, daher auch nicht getexed hier!
semantisch:
Sei $\mathfrak{I}$ eine passende Interpretation mit $\mathfrak{I} \models C \to \neg B, \mathfrak{I} \models B \to \neg A$
<u>1.Fall</u> $\mathfrak{I}(B) = 0$, dann ist eine Formel der rechten Seite erfüllt, also $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$
<u>2.Fall</u> $\mathfrak{I}(B) = 1$. Daraus folgt $\mathfrak{I}(A) = 0$, außerdem $\mathfrak{I}(C) = 0$
Prüfe ob $\mathfrak{I}$ rechte Seite erfüllt
$\mathfrak{I}$ tut dies, also ist die Sequenz erfüllt

Aufgabe 2

Beweisen oder widerlegen Sie die Korrektheit der folgenden Schlussregeln.
a)

$$\dfrac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma, \Psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \varphi \leftrightarrow \neg\Psi \Rightarrow \Delta}$$

Sei $\mathfrak{I}$ eine zu $\Delta \cup \{\varphi, \Psi\}$ passende Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \bigwedge \Gamma$ und $\mathfrak{I} \models \varphi \leftrightarrow \neg\Psi$
<u>1.Fall</u> $\mathfrak{I} \models \varphi$, dann gilt mit 1.Prämisse $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$, also ist die Konklusion gültig
<u>2.Fall</u> $\mathfrak{I} \not\models \varphi$, also $\mathfrak{I} \not\models \neg\Psi$, das heißt $\mathfrak{I} \models \Psi$. Also mit 2.Prämisse: $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta \rightsquigarrow$ Konklusion gültig
$\rightsquigarrow$ SR korrekt
b)

$$\frac{\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \Psi}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi \vee \Psi}$$

Sei $\mathfrak{I}$ eine zu $\Gamma \cup \Delta \cup \{\varphi, \Psi\}$ passende Interpretation mit $\mathfrak{I} \models \bigwedge \Gamma$.
<u>1.Fall</u> $\mathfrak{I} \models \varphi$, dann gilt nach Prämisse $\mathfrak{I} \models \bigvee \Delta$ oder $\mathfrak{I} \models \Psi$
In beiden Fällen wird eine Formel der rechten Seite der Konklusion erfüllt
<u>2.Fall</u> $\mathfrak{I} \not\models \varphi$
Suche nach Gegenbeispiel $\mathfrak{I}$
Wir wissen $\mathfrak{I}$ darf φ nicht erfüllen, außerdem darf $\mathfrak{I}$ keine Formel aus Δ erfüllen
Wähle zum Beispiel $\varphi = x \wedge \neg x = \Psi, \Delta = \emptyset$
Stelle sicher, dass Γ nicht unerfüllbar ist, zum Beispiel $\Gamma = \emptyset$ (Beachte $\bigwedge \emptyset = 1, \bigvee \emptyset = 0$)
Also erfüllt jede $\mathfrak{I} \bigwedge \Gamma$, aber es gilt $\mathfrak{I} \not\models \bigvee \Delta \vee (\varphi \vee \Psi)$
Zeige noch, dass Prämisse gültig ist
Es gilt: $\bigwedge \Gamma \wedge \varphi$ ist unerfüllbar, also Prämisse gültig
Insgesamt Prämisse gültig, Konklusion ungültig
$\rightsquigarrow$ SR nicht korrekt

5. Tutorium

Aufgabe 1

(a) Geben Sie alle Redukte der Struktur $(\mathbb{Z}, +, \cdot, <)$ an

$$(\mathbb{Z}, +, \cdot), (\mathbb{Z}, +, <), (\mathbb{Z}, +, <), (\mathbb{Z}, +), (\mathbb{Z}, \cdot), (\mathbb{Z}, <), (\mathbb{Z})$$

(b) Geben Sie für zwei Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ die kleinste Substruktur von $(\mathbb{Z}, +, -)$ an, welche m und n enthält. Ist dies eine echte Substruktur?
Substrukturen $\mathfrak{A} = (A, \tau)$ ist Subtruktur von $\mathfrak{B} = (B, \sigma)$, wenn

1. $\tau = \sigma$

2. $A \subseteq B$

3. Funktionen und Relationen in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verhalten sich gleich

$(\mathbb{Z}, +)(\{0, 1, 2\}, +)$
$1, 2 \in \{0, 1, 2\}$
aber $1 + 2 \notin \{0, 1, 2\}$ $(\mathbb{Z}, +, -)$, gesucht Substruktur $(A, +, -)$ mit $m, n \in A$
Bsp: $m = n = 5, \rightsquigarrow A = 5\mathbb{Z} = \{z * 5 | z \in \mathbb{Z}\}$
$m = 4, n = 2 \rightsquigarrow A = 2\mathbb{Z}$
$m = 9, n = 6 \rightsquigarrow A = 3\mathbb{Z}$
Allg: $A = k \cdot \mathbb{Z}$ mit $k = ggT(m, n)$
<u>Beweis</u> Zz: $m \in k \cdot \mathbb{Z}$ mit $k = ggT(m, n)$
Klar $k|m$, also ist $m = k \cdot d$ für ein $d \in \mathbb{Z}$
Für n analog
Abgeschlossenheit. Klar.
Zz: $(ggT(m, n)\mathbb{Z}, +, -)$ ist die kleinste Substruktur mit der gewünschten Eigenschaft
<u>Beweis</u> Wir haben das Universum $A = \{\mathbb{Z}ggT(m, n) | z \in \mathbb{Z}\}$
Nach Euklidischen Algorithmus existiert $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $ggT(m, n) = a \cdot m + b \cdot n$
Daraus folgt $ggT(m, n) = i \cdot a \cdot m + i \cdot b \cdot n = \underbrace{\underbrace{m + \cdots + m}_{i \cdot a\text{mal}} + \underbrace{n + \cdots + n}_{i \cdot b\text{mal}}}_{\text{Da } m,n \in A \text{ muss auch jede LK von } m,n \text{ in } A \text{ sein}}$
Also muss jedes Vielfache des $ggT(m, n)$ in A sein
(echte Substurktur von $(\mathbb{Z}, +, -)$ ist zB $(2\mathbb{Z}, +, -)$ und nicht echt wäre $(\mathbb{Z}, +, -)$
Also ist $(ggT(m, n)\mathbb{Z}, +, -)$ keine echte Substruktur, wenn $ggT(m, n) = 1$ ist
In allen anderen Fällen haben wir eine Substruktur

Variante 2 aus anderer Übung:

$$(\mathbb{Z}\text{ggT}(m, n), +, -)$$

Sei M so $(M, +, -)$ der kleinste Substruktur von $(\mathbb{Z}, +, -)$ ist, die m und n enthält
$\exists a, b \in \mathbb{Z}$, sodass $\text{ggT}(m, n) = am + bn, m, n \in M$ und $(M, +, -)$ und Addition und Subtraktion abeschlossen ist,
ist auch $\text{ggT}(m, n) \in M \Rightarrow \mathbb{Z}\text{ggT(m,n)} \subseteq M$ eine Substruktur von $(\mathbb{Z}, +, -)$
Da $(M, +, -)$ die kleinste solche Substruktur sein soll gilt mit $\mathbb{Z}\,\text{ggT}(m, n) \subseteq M$ bereits $\mathbb{Z}\text{ggT}(m, n) = M$

Aufgabe 2

Wir betrachten endliche Wörter über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$. Ein Wort $w = w_0, \ldots, w_{n-1}$ entspricht der Struktur

$$\mathfrak{A} := (\{0, \ldots\}, <, P_a, P_b),$$

wobei $<$ die übliche lineare Ordnung ist und $i \in P_j$ genau dann gilt, wenn $w_i = j$.
Geben Sie für die folgenden Sprachen jeweils einen $FO(\{<, P_a, P_b\})$-Satz an, der diese definiert

Bsp $w = abaa$
$\mathfrak{A}_w = (\{0,1,2\}, P_a, P_b)$ mit $P_a = \{0,2,3\}, P_b = \{1\}$
$P_a x$ ist wahr, falls an Stelle x ein a steht
(a) $\{w \in \Sigma^* : w_0 = a \text{ und } w_{n-1} = b\}$
$\forall x(\underbrace{\neg\exists y(y < x)}_{\text{es ex. keine Stelle links von x}} \rightarrow P_a x) \wedge \forall x(\underbrace{\neg\exists y(x < y)}_{\text{x ist letzte Stelle}} \rightarrow P_b x)$
Variante 2 aus anderer Übung

$$\exists x(\forall y(x \neq y \rightarrow x < y) \wedge P_a x) \qquad \rightsquigarrow w_0 = a$$
$$\wedge \exists x(\forall y(x \neq y \rightarrow y < x) \wedge P_b x) \qquad \rightsquigarrow w_{n-1} = b$$
$$\wedge \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n(\bigwedge_{0<i,j\leq n, i<j} x_i \neq x_j) \wedge \forall y \bigvee_{0<i\leq n} y = x_i \qquad \rightsquigarrow |w| = n$$

(b) $\{w \in \Sigma^* : abba \text{ kommt nicht als Infix in } w \text{ vor}\}$
Zunächst: Definiere $\varphi_s(x,y)$, sodass $\varphi_5(x,y)$ genau dann wahr wird, wenn $y = x+1$

$$\varphi_5(x,y) = (x < y) \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)$$
$$\varphi_b = \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \underbrace{(\varphi_5(x_1,x_2) \wedge \varphi_5(x_2,x_3) \wedge \varphi_5(x_3,x_4))}_{\text{Beschreibung1}} \wedge \underbrace{P_a x_1 \wedge P_b x_2 \wedge P_b x_3 \wedge P_a x_4}_{\text{Beschreibung2}}$$

Variante 2 aus anderer Übung

$$\exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \exists x_4 \tag{1}$$
$$(x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \wedge x_3 < x_4) \wedge P_a x_1 \wedge P_b x_2 \wedge P_b x_3 \wedge P_a x_4 \wedge \tag{2}$$
$$\neg(\exists y((x_1 < y \wedge y < x_2) \vee (x_2 < y \wedge y < x_3) \vee (x_3 < y \wedge y < x_4))) \tag{3}$$

$$x$$

(c) $\{w \in \Sigma^* : ba \text{ kommt } \textit{nicht} \text{ als Infix in } w \text{ vor}\}$

$$\varphi_c = \neg\exists x_1 \exists x_2(\varphi_5(x_1,x_2) \wedge P_b x_1 \wedge P_a x_2) \tag{4}$$
$$\equiv \forall x_1 \forall x_2 \neg(\varphi_5(x_1,x_2) \wedge P_b x_1 \wedge P_a x_2) \tag{5}$$

Variante 2 aus anderer Übung

$$\forall x_1 \forall x_2((x_1 < x_2 \wedge \neg(\exists y(x_1 < y \wedge y < x_2))) \wedge \neg P_a x_2 \wedge \neg P_b x_1))$$

(d) $\{w \in \Sigma^* : \text{ hinter jedem } a \text{ in } w \text{kommt noch mindestens ein } b\}$

$$\varphi_d = \forall x(P_a x \rightarrow \exists y(x < y \wedge P_b y))$$

Variante 2 aus anderer Übung

$$\forall x(P_a x \rightarrow \exists y(P_b y \wedge x < y))$$

6. Tutorium

Aufgabe 1

(a) Wandeln Sie die folgende Formel zunächst in Negations- und dann in

$$\varphi = (\forall x \exists y \neg Rxyz) \to \forall x \neg \forall y (\exists z \neg Rxyz \vee \forall x Rxyz)$$

Negations-Normalform:
Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
\varphi &= (\forall x \exists y \neg Rxyz) \to \forall x \neg \forall y (\exists z \neg Rxyz \vee \forall x Rxyz) \\
&\equiv \neg(\forall x \exists y \neg Rxyz) \vee \forall x \neg \forall y (\exists z \neg Rxyz \vee \forall Rxyz) \\
&\equiv (\exists x \forall y Rxyz) \vee \forall x \exists y \neg (\exists z \neg Rxyz \vee \forall x Rxyz) \\
&\equiv \exists x \forall y Rxyz \vee \forall x \exists y (\neg \exists z \neg Rxyz \wedge \neg \forall x Rxyz) \\
&\equiv \exists x \forall y Rxyz \vee \forall x \exists y (\forall z \ \ Rxyz \wedge \exists \neg Rxyz) \qquad (NNF)\text{[Negations-Normalform]}
\end{aligned}$$

Pränex-Normalform(wir wollen):
Eigenschaft:

$$\begin{aligned}
&\equiv \exists x \forall y \ \ Rxyz \vee \forall x' \exists y' (\forall z' Rx'y'z' \wedge \exists x'' \neg Rx''y'z) && \text{Umbenennung der Variablen} \\
&\equiv \exists x \forall y Rxyz \vee \forall x' \exists y' \forall z' \exists x'' (Rx'y'z' \wedge \neg Rx''y'z) && \varphi \vee \exists x \psi \equiv \exists x(\varphi \vee \psi)\text{wenn x in } \varphi \text{ nicht vorkommt} \\
&\equiv \exists x \forall y \forall x' \exists y' \forall z' \exists x'' (Rxyz \vee (Rx'y'z' \wedge \neg Rx''y'z)) && (PNF)\text{[Pränex-Normalform]}
\end{aligned}$$

(b) Wandeln Sie φ nun in Skolem-Normalform um!
Skolem-Normalform(Erfüllbarkeitsäquivalent)
Eigenschaft:
$\varphi = \forall x \exists y (Rxy)$Führe neues 1-stelliges Funktionssymbol f ein
$\Psi = \forall x (Rxfx)$
Nach und nach alle Existenzquantoren eliminieren und dafür neue Funktionssymbole einführen
Sei a neues Konstantensymbol.
Setze $\Psi_1 = \forall y \forall x' \exists y' \forall z' \exists x'' (Rayz \vee (Rx'y'z' \wedge \neg Rx''y'z))$
Sei f neues 2-stelliges Funktionssymbol
Setze $\Psi_2 = \underbrace{\forall y \forall x' \forall z'}_{\text{3-stellig}} \exists x'' (Rayz \vee (Rx'fyx'z' \wedge \neg Rx''fyx'z))$
Sei g neues 3-stelliges Funktionssymbol
Setze $\Psi_3 = \forall y \forall x' \forall z' (Rayz \vee (Rx'fyx'z' \wedge \neg Rg(yx'z')f(yx')z)) \qquad (SNF)$
Ψ_3 ist in SNF und <u>erfüllbarkeitsäquivalent</u> zu φ
Es gilt im allgemeinen <u>nicht</u> $\varphi \equiv \psi$

Aufgabe 2

Sei $<$ eine zweistelliges Relationssymbol. Geben Sie jeweils ein(wenn möglich endliches) Axiomensystem für die folgenden Strukturklassen an:

(a) $\mathcal{K}_1 = \{(A,<) : y < \text{ ist eine dichte lineare Ordnung} y\}$ (zB $<$ auf $\mathbb{R}$)

$$\varphi_{\text{lin}} = \underbrace{\forall x(\neg x < x)}_{\text{Irreflexivität}} \wedge \underbrace{\forall x \forall y \forall z (x < y \wedge y < z \to x < z)}_{\text{Transitivität}} \wedge \underbrace{\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)}_{\text{Vergleichbarkeit}}$$

$$\varphi_{\text{dicht}} = \forall x \forall z (x < z \to \exists (x < y \wedge y < z))$$

$\Phi = \{\varphi_{\text{lin}}, \varphi_{\text{dicht}}\}$, also endlich
(b) $\mathcal{K}_2 = \{(A,<) : < \text{ ist eine diskrete lineare Ordnung} y\}$ Somit hat jedes Element eindeutigen Nachfolger und Vorgänger sofern nicht Maximum oder Minimum (zB $\mathbb{Z}$ diskret, $\mathbb{R}$ nicht diskret)
1. Wenn x nicht das Maximum, dann hat x eindeutigen Nachfolger

$$\varphi_{\max}(x) = \neg \exists y (x < y)$$

$$\varphi_{\min}(x) = \neg\exists y(y < x)$$

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{\text{diskret}} & = & \forall x(\neg\varphi_{\max}(x) \rightarrow (\exists y(x < y \wedge \neg\exists z(x < z \wedge z < y)))) \\ & \wedge & \forall x(\neg\varphi_{\min}(x) \rightarrow (\exists y(y < x \wedge \neg\exists z(y < z \wedge z < y)))) \end{array}$$

$\Phi_b = \{\varphi_{\text{lin}}, \varphi_{\text{diskret}}\}$, also endlich x
(c) $\mathcal{K}_3 = \{(A, <) :$ A ist unendlich, und $<$ ist eine lineare Ordnung mit maximalem und minimalem Element $\}$
$\varphi = \forall x\exists y(x < y)$
$\Phi_\infty = \{\Psi_n | n \in \mathbb{N}\}$

$$\Psi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{1\le i\le j\le n} x_i \neq x_j)$$

$$\Phi_c = \Phi_\infty \cup \{\varphi_{\text{lin}}, \exists x\varphi_{\max}(x), \exists x\varphi_{\min}(x)\}$$

Dichte Ordnung muss unendlich sein(jedoch zum Teil endlich axiomatisierbar)
(d) $\mathcal{K}_4 = \{(A, <) : <$ ist eine lineare Ordnung, in der für jedes Element unendlich viele größere Elemente existieren$\}$

$$\varphi_d = \forall x\exists y(x < y) \wedge \varphi_{\text{lin}}$$

(e) $\mathcal{K}_5 = \{(A, <) : <$ ist Graph einer Funktion$\}$
Bedeutet $x < y \overset{\text{es ex. Fkt f}}{\Leftrightarrow} f(x) = y$, also müssen wir Funktionseigenschaften beschreiben

$$\varphi_e = \forall x\exists y\forall z(x < y \wedge (x < z \rightarrow z = y))$$

Aufgabe 3

Wir betrachten den Körper $\mathbb{F}_2 = (\{0, 1\}, +, \cdot, 0, 1)$ und die Formel

$$\forall x\exists y(x \cdot y = 0 \wedge x + y = 1)y \wedge \neg\forall x(\neg x = 0)$$

Konstruieren Sie das Model-Checking-Spiel und geben Sie eine Gewinnstrategie für die Verifiziererin oder den Falisfizierer an.

7. Tutorium

Isomorphielemma
Sei $\pi : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ ein Isomorphismus(wobei $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ τ-Strukturen sind) und $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ eine τ-Formel, dann gilt $\mathfrak{A} \models \psi(a_1, \ldots, a_n)$ gdw. $\mathfrak{B} \models \psi(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$

Aufgabe 1

Zeigen oder widerlegen Sie, dass die folgenden Relationen in den entsprechen- den Strukturen elementar definierbar sind.
Vorgehensweise
Entweder Formel angeben, die die Relation definiert oder mit Isomorphielemma die Nicht-Definierbarkeit zeigen
(a) $\{0\}$ in $(\mathbb{N}, +)$

$$\varphi_a(x) = x + x = x$$

(b) $\{1\}$ in $(\mathbb{N}, +)$
Wir können elementar definieren durch

$$\varphi_<(x, y) = \exists z(x + z = y \land x \neq y)$$

Daraus folgt: $\{1\}$ in $(\mathbb{N}, +)$ ist elementar definierbar, genau dann wenn $\{1\}$ in $(\mathbb{N}, +, <)$ elementar definierbar ist

$$\varphi_b(x) = \forall y(y < x \to \underbrace{\varphi_a(y)}_{y=0})$$

(b^*) $\{1\}$ in $(\mathbb{Z}, +)$
Angenommen φ_b definiert $\{1\}$ in $(\mathbb{Z}, +)$
Sei π ein Automorphismus auf $(\mathbb{Z}, +)$.
Dann gilt nach Isomorphielemma: $(\mathbb{Z}, +) \models \varphi_b(x)$ gdw. $(\mathbb{Z}, +) \models \varphi_b(\pi(x))$ KORREKTUR??
Suche Automorphismus $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $\pi(1) \neq 1$
Das funktioniert mit $\pi(z) = -z$
Zeige π ist Automorphismus:

I bijektiv ✓

II π enthält +
Zu zeigen $\pi(a + b) = \pi(a) + \pi(b)$
Beweis: $\pi(a + b) = -(a + b) = -a - b = (-a) + (-b) = \pi(a) + \pi(b)$
Also ist π Automorphismus.
Es gilt $(\mathbb{Z}, +) \models \varphi_b(1)$ gdw. $(\mathbb{Z}, +) \models \varphi_b(\pi(1))$ gdw. $(\mathbb{R}, +) \models \varphi_b(-1)$ $\lightning$

(c) $\{2, 3\}$ in $(\mathbb{N}, \cdot)$
Definiere Automorphismus durch:

Für alle Primzahlen $p \in \mathbb{P} : \pi(p) = \begin{cases} 5 & \text{falls } p = 3 \\ 3 & \text{falls } p = 5 \\ p & \text{sonst} \end{cases}$ Damit π Automorphismus auf $\mathbb{N}$ ist, muss gelten

$\pi(a \cdot b) = \pi(a) \cdot \pi(b)$
Betrachte n mit PFZ $n = p_1 \ldots p_r$
Setze $\pi(n) = \pi(p_1) \ldots \pi(p_r)$, $\pi(0) = 0, \pi(1) = 1$ für $n \notin \mathbb{P}$
Beispiel $\pi(12) = \pi(2 \cdot 2 \cdot 3) = \pi(2) \cdot \pi(2) \cdot \pi(3)$
π ist bijektiv und Automorphismus nach Konstruktion
Annahme: φ_c definiert $\{2, 3\}$

$$\begin{aligned} \text{Es gilt } (\mathbb{N}, \cdot) \models \varphi_3(3) \quad & \underbrace{\text{gdw}}_{\text{Isomorphielemma}} \quad (\mathbb{N}, \cdot) \models \varphi_c(\pi(3)) \\ & \underbrace{\text{gdw}} \quad (\mathbb{N}, \cdot) \models \varphi_c(5) \quad \lightning \end{aligned}$$

(d) $\mathbb{R}_{\geq 0}$ in $(\mathbb{R}, \cdot)$
Es gilt $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gdw ein $y \in \mathbb{R}$ existiert mit $y^2 = x$

$$\varphi_d(x) = \exists y(y \cdot y = x)$$

Aufgabe 2

Wir betrachten $\mathfrak{A} := (\mathbb{Z}, <, P)$; wobei $P := 5\mathbb{Z}$. Wie viele elementar definierbare Teilmengen $X \subseteq \mathbb{Z}$ gibt es in $\mathfrak{A}$?
Wähle $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, z \mapsto z + 5$
π ist Automorphismus:

I bijektiv ✓ $\qquad (\pi^{-1}(x) = x - 5)$

II $x < y$ gdw $x + 5 < y + 5$ gdw $\pi(x) < \pi(y)$
$-x \in 5\mathbb{Z}$ gdw. $5|x$ gdw. $5|(x + 5)$ gdw. $5|\pi(x)$ gdw. $\pi(x) \in 5\mathbb{Z}$

Sei $X \subseteq \mathbb{Z}$ eine elementar definierbare Menge.
Falls $0 \in X$, dann ist nach I.L.(Isomorphielemma) auch $\pi(0) = 5 \in X$, also ist $5\mathbb{Z} \subseteq X$.
Falls $1 \in X$, dann ist $(5\mathbb{Z} + 1) \subseteq X$.
Analog für $2, 3, 4$
Also gibt es die Möglichkeiten

$$\left.\begin{array}{l} -0 \in X \text{ oder } 0 \notin X \\ -1 \in X \text{ oder } 1 \notin X \\ -2 \in X \text{ oder } 2 \notin X \\ -3 \in X \text{ oder } 3 \notin X \\ -4 \in X \text{ oder } 4 \notin X \end{array}\right\} 2^5 = 32 \text{ Möglichkeiten}$$

Also gibt es maximal 32 verschiedene $X \subseteq \mathbb{Z}$, die elementar definierbar
Zeige noch $5\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z} + 1, \ldots, 5\mathbb{Z} + 4$ sind elementar definierbar
$5\mathbb{Z} : \varphi(x) = Px \qquad (P = 5\mathbb{Z})$
$5\mathbb{Z} + 1 :$ Definiere Nachfolgerelation:

$$\varphi_5(x, y) = (x < y) \land \neg\exists z(x < z \land z < y) \qquad (y = x + 1)$$
$$\varphi(x) = \exists y(\varphi_5(y, x) \land Py)$$

Analog für $5\mathbb{Z} + k, k \in \{2, 3, 4\}$
Also können wir $5\mathbb{Z}, 5\mathbb{Z} + 1, \ldots, 5\mathbb{Z} + 4$ einzeln definieren und somit 2^5 einzelne Mengen (alle Kombinationen)

8. Tutorium

Aufgabe 1

(a) Sei $\mathcal{L}_n := (\{0, 1, \dots, n\}, <, \min, \max)$ die lineare Ordnung mit $n+1$ Elementen $\min^{\mathcal{L}_n} = 0$ und $\max^{\mathcal{L}_n} = n$. Zeigen Sie, dass für alle n, m mit $n = m$ oder $n, m \geq 2^k$ gilt $\mathcal{L}_n \equiv_m \mathcal{L}_m$.

Falls $n = m$, dann $\mathcal{L}_n \cong \mathcal{L}_m$
Also folgt aus dem Isomorphielemma

$$\mathcal{L}_n \models \varphi \Leftrightarrow \mathcal{L}_m \models \varphi \ \ \forall \varphi \in FO$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_n \equiv \mathcal{L}_m \text{ und } \mathcal{L}_n \equiv_k \mathcal{L}_m \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Sei nun $n, m \geq 2^k$
Behauptung: $\mathcal{L}_n \equiv_m \mathcal{L}_m$
Beweis: Wegen dem Satz von EF (Ehrenfeucht-Fraiissé) genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{D}$ das Spiel $G_k(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$ gewinnt
Dazu zeigen wir, dass $\mathcal{D}$ von der Position $(0, n+1), (0, m+1)$ noch k Runden lang folgende Invariante aufrecht erhalten kann
$\oplus$In Position $P = ((a_1, \dots, a_{\ell+2}), (b_1, \dots, b_{\ell+2})$ gilt:
1. P ist lokaler Isomorphismus
2. $\forall i, j \in \{1, \dots, j+2\}$ gilt $|a_i - a_j| =_{2^{k-\ell}} |b_i - b_j|$
$(n =_p m \Leftrightarrow (n = m \text{ oder } n, m \geq p))$

In der Position $((0, n+1), (0, m+1))$ gilt $\oplus$ bereits
Sei $P = ((a_1, \dots, a_{\ell+2}), (b_1, \dots, b_{\ell+2}))$ eine Position bei $\oplus$ gilt und $l < k$. Wir zeigen $\mathcal{D}$ kann von P noch eine Runde lang $\oplus$ aufreicht erhalten:
Angenommen $\mathcal{H}$ spielt $a \in \{0, \dots, n+1\}$
Wir zeigen: Es gibt $b \in \{0, \dots, m+1\}$, sodass

$$((a_1, \dots, a_{\ell+2}, a), (b_1, \dots, b_{\ell+2}, b) \text{ noch } \oplus \text{ erfüllt}$$

Seien $i_-, i_+ \in \{0, \dots, \ell+2\}$ so gewählt, dass

$$a_{i_-} \leq a \text{ und } a_j \leq a_{i_-} \ \ \forall a_j \leq a$$
$$a_{i_+} \geq a \text{ und } a_j \geq a_{i_+} \ \ \forall a_{i_+} \geq a$$

Sei $m_- := a - a_{i_-}, m_+ := a_{i_+}$
$m := \min(m_-, m_+)$
Fallunterscheidung
Fall $m \geq 2^{k-\ell-1}$

$$\begin{aligned} \text{Dann} a_{i_+} - a_{i_-} &= m_- + m_+ \\ &\geq 2^{k-\ell-1} + 2^{k-\ell-1} = 2^{k-\ell} \end{aligned}$$

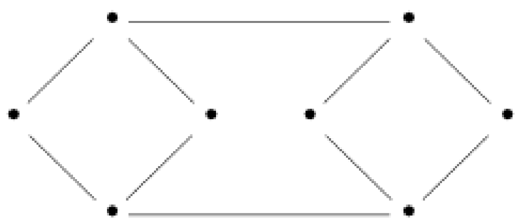
Also $b_{i_+} - b_{i_-} \geq 2^{k-\ell}$
$\mathcal{D}$ antwortet mit $b := b_{i_-} + 2^{k-\ell-1}$
Also $a - a_{i_-} \geq 2^{k-\ell-1}$ und TODO MISSING HERE Daher $|a - a_j| =_{2^{k-\ell-1}} |b - b_j| \ \ \forall j$ mit $a_j < a$
Da $|a_{i_+} - a| = m_+ \geq 2^{k-\ell-1}$ und $|b_{i_+} - b| \geq 2^{k-\ell-1}$
folgt $|a - a_j =_2^{k-\ell-1} |b - b_j| \ \ \forall j$
Also gilt $\oplus$
$m < 2^{k\ell-1}$: Dann $m_- < 2^{k-\ell-1}$ oder $m_+ < 2^{k-\ell-1}$
Ohne Einschränkung gilt $m_- < 2^{k-\ell-1}$
$\mathcal{D}$ antwortet $b := b_{i_-} + m_-$
Jetzt gilt $b - b_{i_-} = m_- = a - a_{i_-} < 2$

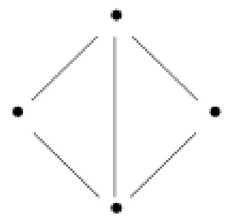
Also $|b - b_j| =_{2^{k-\ell-1}} |a - a_j| \ \forall j$ mit $a_j \leq a$
Betrachte $m_+ = a_{i_+} - a$
<u>Fallunterscheidung</u>
<u>1. Fall:</u>$m_+ < 2^{k-\ell-1}$
Dann $a_{i_+} - a_{i_-} = m_+ + m_- < 2^{k-\ell-1}$
Zusammengefasst
In beiden Fällen konnte $\mathcal{D}$ eine weitere Runde lang die Invariante $\textcircled{\#}$ aufrecht erhalten.
In dem Fall, dass $\mathcal{H}$ in der $\mathcal{L}_m$ spielt, kann die $\mathcal{D}$ analog (mit a_i und b_j vertauscht) spielen.
Also gewinnt $\mathcal{D}$ das Spiel $G_k(\mathcal{L}_n, \mathcal{L}_m)$
(b) Folgern Sie, dass es keinen Satz $\varphi \in \mathrm{FO}(\{<\})$ gibt,
sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{L}_n \models \varphi \Leftrightarrow$ n ist gerade

Angenommen φ würde "n gerade" erfüllen.
Betrachte $k := \mathrm{qr}(\varphi)$ und $n = 2^k, m = 2^k + 1$
Also $\mathcal{L}_n \models \varphi$ aber $\mathcal{L}_m \not\models \varphi$,
obwohl $\mathcal{L}_m \models \varphi$, da $\mathcal{L}_n \equiv_k \mathcal{L}_m$ $\quad$ ↯
$\Rightarrow$ Es gibt so eine Formel nicht

Aufgabe 2 (geogebra kann tikz code erstellen)

Geben Sie für die folgenden Paare von Strukturen jeweils eine trennende FO-Formel mit minimalem Quantorenrang m sowie eine Gewinnstrategie für die Duplikatorin im Spiel $G_{m-1}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ an.
Mit $<^{\mathfrak{A}}$ bzw $<^{\mathfrak{B}}$ sind jeweils die normalen Ordnungen gemeint.





(a) $\mathfrak{A}$: $\qquad$ $\mathfrak{B}$:
Trennende Formel $\varphi := \exists x \forall y (y \neq x \rightarrow Exy)$
$\mathrm{qr}(\varphi) = 2$
Gewinnstrategie für $\mathcal{D}$ in $G_!(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$
"Wähle einen beliebigen in der anderen Struktur"
(b) $\mathfrak{A} = (\mathbb{Z}, <^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{Q}, <^{\mathfrak{B}})$

Trennende Formel $\varphi := \exists x \exists y \forall z (\neg(x < z \wedge z < y \wedge x < y))$
$\mathrm{qr}(\varphi) = 3$
GS(Gewinnstrategie) für $\mathcal{D}$ im Spiel $G_2(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$:

1. Runde $\mathcal{H}$ wählt ohne Einschränkung ein $a \in \mathbb{Z}$
$\mathcal{D}$ antwortet mit 0. Erreichte Pos ist nun $(a), (0)$

2. Runde Wenn $\mathcal{H}$ aus $\mathfrak{A}$ wählt, etwa $a \in \mathbb{Z}$.
Dann antwortet $\mathcal{D}$ mit $b = \begin{cases} 1, & a' > a \\ 0, & a' = a \\ -1 & a' < a \end{cases}$ Dann ist $(a, a'), (0, b)$ immer ein lokaler Isomorphismus
Wenn $\mathcal{H}$ aus $\mathfrak{B}$ wählt, etwa $b' \in \mathbb{Q}$
Dann antwortet $\mathcal{D}$ mit $a' = \begin{cases} a+1 & , b' > 0 \\ a & , b = 0 \\ a-1 & , b < 0 \end{cases}$ Dann ist $(a, a'), (0, b')$ immer ein lokaler

Isomorphismus.
$\Rightarrow$ Also gewinnt $\mathcal{D}$ (die Duplikatorin)

Runde 1:
(c) $\mathfrak{A} = (\{0, 1, 2, 3\}, <^{\mathfrak{A}})$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, <^{\mathfrak{B}})$

Trennende Formel $\psi := \exists x \forall y (y < x \vee y = x)$
$\text{qr}(\psi) = 2$
GS für $\mathcal{D}$ im Spiel $G_1(\mathfrak{A}, \mathfrak{b})$: "Antworte mit einer beliebigen Formel "
Dadurch wird eine Position der Form $(a), (b)$ mit $a \in \{0, \dots, 3\} \in \mathbb{N}$ erreicht, welche lokalen Isomorphismus (weil $a \not< a$ und $b \not< b$)

1 MaLo Tutorium 9

1.1 Aufgabe 1:

- Universum: Menge von Menschen
- zweistellige Relation R mit Rxy gdw. "x liebt y"
- Konstanten:
  b: steht für "my baby"
  m: steht für "me"

Aussage wird beschrieben durch folgenden Satz:
$\phi = \forall x(xRb) \land bRm \land \forall x((x \neq m) \rightarrow \neg bRx)$

Mit Sequenzenkalkül zeigen wir: $\phi \Rightarrow (m = b)$

$$
\begin{array}{lc}
(\Rightarrow \neg) & \underline{bRb, bRm, b = m \Rightarrow b = m} \qquad (\neg \Rightarrow) \quad \underline{bRb, bRm \Rightarrow bRb, m = b} \\
(\rightarrow\Rightarrow) & \underline{bRb, bRm \Rightarrow b \neq m, m = b} \qquad \underline{bRb, bRm, \neg bRb \Rightarrow m = b} \\
(\forall \Rightarrow) & \underline{bRb, bRm, b \neq m \rightarrow \neg bRb \Rightarrow m = b} \\
(\forall \Rightarrow) & \underline{bRb, bRm, \forall x(x \neq m \rightarrow \neg(bRx)) \Rightarrow m = b} \\
2 \times (\land \Rightarrow) & \underline{\forall x(xRb), bRm, \forall x(x \neq m \rightarrow \neg(bRx) \Rightarrow m = b} \\
 & \forall x(xRb) \land bRm \land \forall x((x \neq m) \rightarrow \neg bRx) \Rightarrow m = b
\end{array}
$$

1.2 Aufgabe 2:

a)

$$\frac{\Gamma, \exists x\phi(x), \theta \Rightarrow \forall x\psi(x)}{\Gamma, \phi(c) \Rightarrow \neg\theta, \psi(c)}$$

Wir nehmen an, dass die Prämisse eine gültige Sequenz ist und dass
$\mathcal{A} \models \bigwedge \Gamma \land \phi(c)$.
Daraus folgt: $\mathcal{A} \models \bigwedge\Gamma \land \exists x\phi(x)$

1. Fall:
$\mathcal{A} \models \theta$, also wegen Prämisse auch $\mathcal{A} \models \forall \S \psi(\S)$. Daraus folgt $\mathcal{A} \models \psi(\rfloor)$ und die Konklusion gilt.
2. Fall:
$\mathcal{A} \not\models \theta$, also $\mathcal{A} \models \neg\theta$, also ist die Konklusion gültig.
Also ist die Schlussregel korrekt.

b)

$$\frac{\Gamma, \forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \phi(c) \Rightarrow \Delta, \psi(c)}$$

Wähle $\Gamma, \Delta = \emptyset$, dann bleibt übrig:

$$\frac{\forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x)) \Rightarrow \emptyset}{\phi(c) \Rightarrow \psi(c)}$$

Wähle $\phi(x)$ = (x=c) und $\psi(x)$ = (x≠c)
Damit ist klar: Für jedes $\mathcal{A}$ gilt:
$\mathcal{A} \models \phi$(c) aber $\mathcal{A} \not\models \psi$(c), also ist die Konklusion ungültig.
Noch zu Zeigen: Prämisse ist gültig.
Zeige dazu:
$\forall x(\phi(x) \rightarrow \psi(x))$ hat kein Modell.
Da $\phi(c)$ in allen Strukturen gilt, $\psi(c)$ aber nicht, ist $\forall x(\phi(c) \rightarrow \psi(c)$ unerfüllbar. Also ist die Prämisse gültig und die Konklusion kann nicht stimmen.
Die Schlussregel ist damit nicht korrekt.

10. Tutorium

Satz angeben und dann Gewinnstrategie darüber ausführen mit Ehrenfeucht-Fraisse
Analog endlichen trennenden Satz angeben

Aufgabe 1

Welche der folgenden Theorien sind vollständig? $T \subseteq \mathrm{FO}(\tau)$
$\varphi \in \mathrm{FO}(\tau) \qquad T \models \varphi$ so ist $\varphi \in T$
vollständig
$\psi \in \mathrm{FO}(\tau)$
entweder $\psi \in T$ oder $\neg\psi \in T$
Theorie über einer Struktur:
$\mathrm{Th}(\mathfrak{A}) := \{\psi : \mathfrak{A} \models \psi\}$
$\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ ist vollständig
(a) Die Theorie der dichten, linearen Ordnungen.

Beispiel: $(\mathbb{Q}, <), (\mathbb{R}, <), ([0, 1], <)$
Angenommen T ist Theorie für $\mathcal{K}$ $\mathrm{Mod}(T)$=$\mathcal{K}$

$$\psi := \underbrace{\exists x \forall y (x = y \vee x < y)}_{\text{es gibt ein Minimum}}$$

$$\neg\psi = \theta = \forall x \exists y (y < x)$$

$(\mathbb{Q}, <) \models T$ muss auch $(\mathbb{Q}, <) \models \psi$
Da aber $(\mathbb{Q}, <) \not\models \psi$ muss $\psi \notin T$
Es ist aber aus $([0, 1], <) \not\models \theta$
Also ist weder $\psi \in T$ noch $\neg\psi \in T$
$\Rightarrow$ somit nicht vollständig
(b) Die Theorie der dichten, linearen Ordnungen ohne Endpunkte.

Lemma 3.14 Eine Theorie T ist genau dann vollständig, wenn alle ihre Modelle elementar äquivalent sind.
Th ist vollsätndig
Sei $\mathfrak{A} = (\mathbb{Q}, <)$
Zeige beliebiges $\mathfrak{B} \in \mathcal{K}'$ gilt $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$
Die Duplikatorin gewinnt $\mathfrak{G}_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ für alle m
Seien $a_1, \ldots, a_k$ und $b_1, \ldots, b_k$ gem
Wenn $a_{k+1} \in [a_1, a_k]$ können kopieren, da $\mathfrak{B}$ dicht
Ist $a_{k+1} < a_1$ können wir auch spielen, da es keine Endpunkte gibt(Minima und Maxima)
Also ist T vollständig

Aufgabe 2

Sei τ eine abzählbare Signatur und $\mathfrak{A}$ eine beliebige τ-Struktur. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{A})$ im Allgemeinen keine Hintikka-Menge ist, aber dass A um abzählbar viele Konstantensymbole expandiert werden kann zu einer Struktur $\mathfrak{A}'$, so dass $\mathrm{Th}(\mathfrak{A}')$ eine Hintikka-Menge ist.

Eigenschaften der Hintakka-Menge

(1) Γ, Δ sind disjunkt

(2) Atomare Sätze in γ sind unter Substitution abgeschlossen

(3) Wenn $\neg\Psi \in \Gamma$, so ist $\Psi \in \Delta$
Wenn $\neg\Psi \in \Delta$, so ist $Psi \in \Gamma$

(4) Ist $\Psi \vee \varphi \in \Gamma$, so $\varphi \in \Gamma$ oder $\Psi \in \Gamma$
wenn $\Psi \vee \varphi \in \Gamma$ so $\Psi \in \Delta$ und $\varphi \in \Delta$

(5) Wenn $\exists x(\Psi(x)) \in \Gamma$, so existiert t, Grundterm mit $\Psi(t) \in \Gamma$, wenn $\exists(\Psi(x)) \in \Delta$, so ist $\Psi(t) \in \Delta$ für alle t

Betrachte $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, <)$
$\exists x(\underbrace{x = x) \in \mathrm{Th}(\mathfrak{A}}_{\Psi(x)})$
es gilt aber gew keine Grundterme über $\mathfrak{A}$ also ist (5) verletzt

Alternative:

TODO Mittelterm

Zeige, dass Bedingungen erfüllt

(1) Offensichtlich ist $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$

(2) Wenn $\Psi(t) \in \Gamma$ und $t = t' \in \Gamma$, dann gilt $\mathfrak{A}' \models \Psi(t), \mathfrak{A}' \models t = t'$, also auch $\mathfrak{A}' \models \Psi(t')$

(3) ✓

(4) Wenn $\varphi \vee \Psi \in \Gamma$, so ist $\mathfrak{A}' \models \varphi \vee \Psi$, also muss $\Psi \in \Gamma$ oder $\varphi \in \Gamma$

(5) • $\exists x(\Psi(x)) \in \Delta$, also $\mathfrak{A}' \not\models \exists x(\Psi(x))$, also muss für jeden Grundterm $\mathfrak{A}' \not\models \Psi(t)$ und somit $\Psi(t) \in \Gamma \ \ \forall t$
• $\exists x(\Psi(x)) \in \Gamma$, also $\mathfrak{A}' \models \exists x(\Psi(t))$, Zz: Es ex. t, sodass $\mathfrak{A}' \models \Psi(t)$ und $\Psi(t) \in \Gamma$
Betrachte in Ψ treten nur endlich viele Konstanten auf, also existiert ein $k \in \mathbb{N}$ sodass keine Konstante $c_{\Psi,j}, j \geq k$
Das heißt $\Psi \in \mathrm{FO}(\tau(\mathfrak{A}, k))$ und $\mathfrak{A} \models \Psi(t)$ ist auch $\mathfrak{A}, k \models \exists x(\Psi(x))$ was Konstanten von
????

Beweis für vollständigkeit
<u>Modell</u> für Formelmenge
als Tipp für Bonusaufgabe

11. Tutorium

Aufgabe 1

Satz (Kompaktheitssatz der Prädikatenlogik) notwendig
Satz (Aufsteigender Satz von Löwenheim-Skolem) notwendig
Satz (Absteigender Satz von Löwenheim-Skolem) notwendig
TODO ausschreiben

Zeigen oder widerlegen Sie für die folgenden Klassen von Strukturen jeweils, dass sie FO-axiomatisierbar beziehungsweise endlich FO-axiomatisierbar sind.
a) Die Klasse der zu $(\mathbb{N}, +)$ isomorphen Strukturen.

Angenommen Φ axiomatisiert $\mathcal{K}(\Phi\ \mathrm{Mod}(\Phi){=}\mathcal{K}_a)$
Dann hat Φ ein unendliches Modell, nämlich $(\mathbb{N}, +)$
(da $(\mathbb{N}, +) \cong (\mathbb{N}, +)$
Bzw es gilt $(\mathbb{N}, +) \models \Phi$
Nach $LS \uparrow (ii)$ existiert Modell $\mathfrak{A} = (A, +)$ mit $(M = \mathbb{R})|A| \geq |M| = |\mathbb{R}| \geq |\mathbb{N}|$ Also müsst $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_a$, aber es gilt $\mathfrak{A} \ncong (\mathbb{N}, +) \lightning \Rightarrow \mathcal{K}_a$ nicht FO-axiomatisierbar
Alternativ(Modifikation)
($\mathfrak{A}$ von Φ mit Mächtigkeit $N(\mathbb{N})$ dann gilt aber $\mathfrak{A} \ncong (\mathbb{N}, +)$) $\lightning \Rightarrow$ nicht FO-axiomatisierbar
b) Die Klasse der zu $(\mathbb{R}, +)$ isomorphen Strukturen.

Da solch ein Φ abzählbar(FO($\{+\}$) ist abzählbar) wäre, gilt nach $LS \downarrow$, dass Φ ein abzählbares Modell hat. Dies ist nicht isomorph zu $(\mathbb{R}, +)$
$\Rightarrow$ nicht FO-axiomatisierbar
Alternativ:
Angenommen Φ ax. $\mathcal{K}_b$. Dann hat Φ ein unendliches Modell, nämlich $(\mathbb{R}, +)$. Nach (LS$\uparrow$) ex. dann ein Modell $\mathfrak{A} = (A, +)$ mit $|A| \geq |\mathrm{Pot}(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$. Also müsste $\mathfrak{A} \in \mathcal{K}_b$, aber $\mathfrak{A} \ncong (\mathbb{R}, +)$ $\lightning$
$\Rightarrow \mathcal{K}_b$ nicht FO-axiomatisierbar
Alternativ(Variante2)
Angenommen Φ ax. $\mathcal{K}_b$. Dann ist Φ erfüllbar und abzählbar, da die Signatur abzählbar ist. Also ex nach LS$\downarrow$ ein abzählbares Modell $\mathfrak{A} = (A, +)$ mit $|A| \leq |\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ $\lightning \Rightarrow \mathcal{K}_b$ nicht FO-axiomatisierbar
c) Die Klasse der ungerichteten Graphen mit mindestens 5 Knoten.

$$\psi_c := \underbrace{\forall xy(Exy \to Eyx) \wedge \forall x(\neg Exx)}_{\text{ungerichteter Graph}} \wedge \underbrace{\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_5 (\bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j)}_{\text{5 verschieden Knoten}}$$

*Ergänzung*Dann ax. ψ_c die Klasse $\mathcal{K}_c$ endlich.
d) Die Klasse der endlichen Graphen.

Ergänzung Angenommen Φ ax. $\mathcal{K}_d$. Dann hat Φ beliebig große endliche Modelle für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich $\mathfrak{A}_n = (\{1, \ldots, n\}, \emptyset)$ ein Modell von Φ
Also ex. nach LS$\uparrow$ ein unendliches Modell von Φ, also enthält $\mathcal{K}_d$ einen unendliches Graphen $\lightning$
Also ex. kein Axiomensystem für $\mathcal{K}_d$
Dass es beliebig große endliche Modelle gibt, muss begründet werden
($\Rightarrow$ nicht FO-axiomatisierbar)

~~$\mathcal{K}_d$ hat beliebig große endliche Modelle, also nach~~

~~$LS \uparrow (i)$ auch ein unendliches Modell~~ $\lightning$

~~$\Rightarrow$ nicht FO-axiomatisierbar~~
e) Die Klasse der unendlichen Sterne.

$$\varphi_{\text{Stern}} := \underbrace{\exists m[\forall x \forall y(Exy \rightarrow (x = m \wedge y \neq m)}_{\text{Mittelpunkt}} \vee \underbrace{(x \neq m \wedge y = m)) \wedge \forall x(x \neq m \rightarrow Exm \wedge Emx)}_{\text{alle anderen Punkte}}]$$

$$\Phi_\infty := \{\varphi_n = \exists x_1 \ldots \exists x_n (\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j) | n \geq 1\}$$

$$\Phi_{\infty\text{-Stern}} := \Phi_\infty \cup \{\varphi_{\text{Stern}}\}$$

Ergänzung Dann ist $\Phi_\infty \cup \{\varphi_{\text{Stern}}\} =: \Phi$ ein unendliches Axiomensystem für $\mathcal{K}_e$
Ang. $\mathcal{K}_e$ ist endliche axiomatisierbar durch Formel φ
Dann ist $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.
Dann ex nach KS ein endliches, unerfüllbares

$$\Phi_0 \subseteq \Phi = \Phi_\infty \cup \{\varphi_{\text{Stern}}\} \cup \{\neg\varphi\}$$

Da Φ_∞ endlich, ex. ein $m \in \mathbb{N}$, sodass

$$\Phi_0 \subseteq \{\varphi_n | n \leq m\} \cup \{\varphi_{\text{Stern}}, \neg\varphi\}$$

Finde nun Modell für

$$\underbrace{\{\varphi_n | n \leq m\}}_{\text{muss mind. m Elemente enthalten}} \cup \underbrace{\underbrace{\{\neg\varphi\}}_{\text{kein unendlich großer Stern}} \cup \underbrace{\{\varphi_{\text{Stern}}\}}_{\text{muss Stern sein}}}_{\text{endlich großer Stern}}$$

Sei $\mathfrak{A} = (\{1, \ldots, m\}, E)$ mit $E = \{(1, x) | x \in \{2, \ldots, m\}\}$
Also ist $\mathfrak{A}$ Modell von Φ', also ist Φ' erfüllbar
Also ist Φ_0 erst recht erfüllbar, da $\Phi_0 \subseteq \Phi'$ ↯
Also kann φ nicht ex. und $\mathcal{K}_e$ ist nicht endlich ax.
Lieber Modell hinschreiben, sonst kann es Punkteabzug geben
Alternative($\neg\varphi$ vergessen)
Endlich geht nicht: Sonst existiert ψ, sodass $S \models \psi$ gdw. S ist ∞-Stern
Aus Komp.(Kompaktheitssatz)(i) folgt es existiert $\Phi_0 \subseteq \Phi_{\infty\text{-Stern}}$(endlich) mit $\Phi_0 \models \psi$
Wir wissen: $\Phi_0 \subseteq \{\varphi_{\text{Stern}}\} \cup \{\varphi_n | n \leq k\}$ für festes $k \in \mathbb{N}$
Also ist Stern mit k Knoten ein Modell von Φ_0 (und dmait auch von ψ) ↯
f) Die Klasse $\{(A, R) | TC(R)$ ist irreflexiv$\}$, wobei R eine zweistellige Relation sei.

TC war transitiver Abschluss/Hülle
Beispiel

$$\overbrace{\underbrace{\bullet}_{x} \rightarrow \underbrace{\bullet}_{y} \rightarrow \underbrace{\bullet}_{z}}^{R}$$

$R = \{(x, y), (y, z)\}$
TC(R) ist irreflexiv, gdw. in Graph von R gibt es keinen Kreis
$\mathcal{K}_f = \{(A, R) |$Im R-Graphen ex. kein endlicher Kreis$\}$

$$\varphi_n = \exists x_1, \ldots, \exists x_{n+1} (\bigwedge_{1 \leq i \leq n} Rx_i x_{i+1} \wedge x_1 = x_{n+1})$$

Also axiomatisiert $\Phi_e = \{\neg\varphi_n | n \geq 1\}$ die Klasse $\mathcal{K}_f$
Ang. φ ax. $\mathcal{K}_f$. Dann ist $\Phi_f \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.
Nach KS ex. endliches unerfüllbares $\Phi_0 \subset \Phi_f \cup \{\neg\varphi\}$ Da Φ_0 endlich ist, ex. ein $m \in \mathbb{N}$, sodass gilt

$$\Phi_0 \subseteq \underbrace{\{\neg\varphi | n \leq m\}}_{\text{keine Kreise der Länge } \leq m} \cup \underbrace{\{\neg\varphi\}}_{\text{es gibt einen endl. Kreis}} =: \Phi'$$

Konstruiere Modell für Φ'
Sei $\mathfrak{A} = (\{1, \ldots, m+1\}, R)$ mit $R = \{(i, i+1) | 1 \leq i \leq m\} \cup \{(m+1, 1)\}$
Also ist $\mathfrak{A} \models \Phi'$, also ist Φ' erfüllbar und somit ist $\Phi_0 \subseteq \Phi'$ auch erfüllbar. $\lightning$
Also kann φ nicht ex. und $\mathcal{K}_f$ ist nicht endlich ax.

Alternative

$$\psi_n := \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n (Rx_1x_2 \wedge Rx_2x_3 \wedge \cdots \wedge Rx_{n-1}x_n \rightarrow x_n \neq x_1)$$

$$\Phi_{TC} := \{\psi_n | n \in \mathbb{N}\}$$

Annahme ψ endlich axiomatisierbar, so existiert endliche Formelmenge $\Phi_{\leq k} \subseteq \Phi_{TC}$ mit $\Phi_{\leq k} \models \psi$ nach KS(i)[in $\Phi_{\leq k}$ kommen nur ψ_n für $n \leq k$ vor]

Dann gilt aber $\overbrace{\bullet \rightarrow \bullet \rightarrow \cdots \bullet}^{k+1} \models \psi$ und der letzte Punkt ist mit dem ersten verbunden $\lightning$
$\Rightarrow$ nicht endlich FO-axiomatisierbar
g) Die Klasse der zu $(Q, <)$ elementar äquivalenten Strukturen.

$\varphi = \varphi_{\text{dicht}} \wedge \varphi_{\text{linear}} \wedge \varphi_{\text{KE}}$
mit

$$\varphi_{\text{dicht}} = \forall x \forall z (x < z \rightarrow \exists y)(x < y \wedge y < z)$$

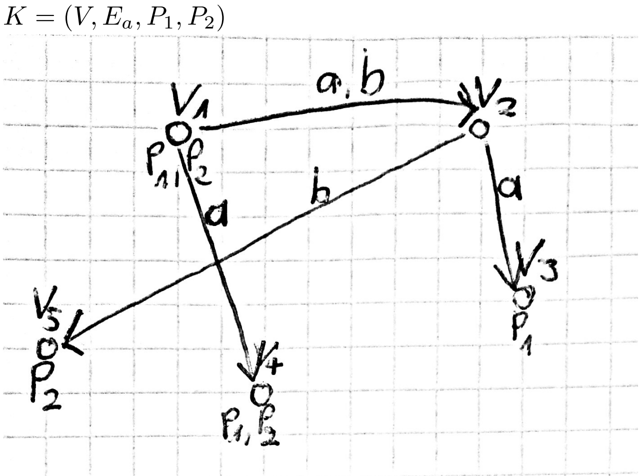
g) Die Klasse der zu $(Q, <)$ isomorphen Strukturen.
Die Theorie der dichten linearen Ordnung ist vollständig.
(alle Modell von vollständigen Theorien sind elementar äquivalent ($\equiv$))
Wissen $(\mathbb{Q}, <)$ ist dichte, lineare Ordnung und auch $(\mathbb{R}, <)$, das heißt $(\mathbb{Q}, <) \equiv (\mathbb{R}, <)$
(Wegen Mächtigkeit gilt $(\mathbb{Q}, <) \not\cong (\mathbb{R}, <)$)
Angenommen es existiert Φ mit Mod(Φ+)=$\mathcal{K}_g$, dann gilt $(\mathbb{Q}, <) \models \varphi \ \ \forall \varphi \in \Phi$, wegen $\equiv$, aber auch $(\mathbb{R}, <) \models \varphi \ \ \forall \varphi \in \Phi$ und damit $(\mathbb{R}, <) \in \mathcal{K}_g$ $\lightning$ **Zusammenfassung**
Isomorphie LS$\uparrow$
alle endlichen Strukturen LS$\uparrow$
unendliche Strukturen KS

12. Tutorium

Aufgabe 1

Sei τ eine endliche Signatur. Sei $\Psi \subseteq FO(\tau)$ eine beliebige Formelmenge, sodass jede erfüllbare Formel $\psi \in \Psi$ bereits ein endliches Modell hat. Skizzieren Sie einen Algorithmus, der das Erfüllbarkeitsproblem von Formeln aus Ψ entscheidet.

Da τ endlich ist, kann man alle endliche τ-Strukturen systematisch generieren und jeweils testen, ob die Struktur ein Modell von ψ ist.
Ein solcher Algorithmus terminiert genau dann, wenn ψ erfüllbar ist(da ψ nach Vorraussetzung ein endliches Modell hat).
Wir geben jetzt noch einen Algorithmus an, der genau dann terminiert, wenn $\psi \in \Psi$ unerfüllbar ist.
Suche dazu in SK einen Beweis für $\psi \Rightarrow \emptyset$
Ein Beweis im SK ist ein mit Sequenzen beschrifteter Baum, bei dem an jedem Knoten eine Regel des SK angewendet wird und dessen Blätter Axiome sind.
Also kann man all diese Bäume generieren und testen, da der Baum ein Beweis ist, terminiert der Algorithmus und gibt "unerfüllbar" aus
Falls ψ unerfüllbar ist, ist $\psi \Rightarrow \emptyset$ eine gültige Sequenz und nach Vollständigkeitssatz ex. ein Beweis im SK
Wir simulieren die beiden Algo parallel auf der Eingabe $\psi \in \Psi$ und geben je nachdem, welcher Algo terminiert, "unerfüllbar" oder das Modell aus.
Von Modallogik in FO^2
$P_i \mapsto P_i x$
$\neg\psi \mapsto \neg\psi^*(x)$
$(\psi \circ \varphi) \mapsto (\psi * (x) \circ \varphi^*(x))$ für $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
$< a > \psi \mapsto \exists y(Eaxy \wedge \psi * (y))$
$[a]\psi \mapsto \forall y(Eaxy \rightarrow \psi * (y))$
$K = (V, E_a, P_1, P_2)$



$P_1 \mapsto P_1 x$
$\Diamond\varphi \mapsto \exists y(Exy \wedge \psi(y))$

$\psi = P_1$ $\quad \varphi = \Diamond P_1$ "es ex. ein Nachfolger an dem P_1 gilt"
$K, v_1 \models \psi$ $\quad K, v_1 \models \varphi$
$K, v_2, \not\models \psi$ $\quad K, v_5 \not\models \varphi$ $\quad \Box$ analog "für alle Nachfolger"

Aufgabe 2

Wandeln Sie $\Diamond\Box(P_1 \vee \Box\neg P_2)$ in eine äquivalente FO-Formel um.

$$\begin{aligned} \Diamond\Box(P_1 \vee \Box\neg P_2) &\mapsto \exists y(Exy \wedge \Box(P_1 \vee \Box\neg P_2)) \\ &\mapsto \exists y(Exy \wedge \forall z(Eyz \rightarrow (P_1 \vee \Box\neg P_2))) \\ &\mapsto \exists y(Exy \wedge \forall z(Eyz \rightarrow (P_1 z \vee \forall u(Ezu \rightarrow \neg P_2 u)))) \end{aligned}$$

<u>Mit 2 Variablen</u>

$\psi := \Diamond\Box(P_1 \vee \Box\neg P_2)$

$\psi \mapsto \Diamond\Box(P_1 x \vee \Box\neg P_2 x)$

$\mapsto \Diamond\Box(\underbrace{P_1 x \vee \forall y(Exy \rightarrow \neg P_2 y)}_{})$

$\mapsto \Diamond\, \forall y\underbrace{(\underbrace{Exy}_{} \rightarrow (P_1 y \vee \forall x(\underbrace{Eyx}_{} \rightarrow \neg P_2 x)))}_{}$

$\mapsto \exists y(Exy \rightarrow \forall x(Eyx \rightarrow (P_1 x \vee \forall y(Exy \rightarrow \neg P_2 y)))) =: \varphi$

Jetzt gilt: $\varphi \in FO^2$ und $K, v \models \psi$ <u>gdw.</u> $K \models \varphi(v)$

13. Tutorium

Aufgabe 1

Zeigen Sie mit der Resolutionsmethode, dass folgende Formel unerfüllbar ist:

$$(Z \to X \vee Y) \wedge (Y \to \neg X \vee Z) \wedge (\neg Z \vee \neg Y) \wedge (X \vee Z) \wedge (X \to Y)$$

$\equiv \{\neg Z, X, Y\}\{\neg Y, \neg X, Z\}\{\neg Z, \neg Y\}\{X, Z\}\{\neg X, Y\}$ Rest sollte trivial sein

Aufgabe 2

Was ist in $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$ elementar definierbar?
a) Das Element $\{17\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

Definiere $\pi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}), M \mapsto \begin{cases} M \setminus \{17\} \cup \{18\} & 17 \in M, 18 \notin M \\ M \setminus \{18\} \cup \{17\} & 18 \in M, 17 \notin M \\ M & \text{sonst} \end{cases}$

Zeige π erhält $\subseteq$: Zeige also $M \subseteq N \Rightarrow \pi(M) \subseteq \pi(N)$
Es gelte $M \subseteq N$
<u>1.Fall</u> $17 \in M \Rightarrow 17 \in N$
und $18 \in M \Rightarrow 18 \in N$
$\Rightarrow \pi(M) = M, \pi(N) = N$, also $\pi(M) \subseteq \pi(N)$
<u>2.Fall</u> $17 \in M, 18 \notin M$
$\Rightarrow 17 \in N$
<u>Fall a)</u> $18 \in N$
$18 \in \pi(M)$
$17 \notin M$
und $18 \in \pi(n) \Rightarrow \pi(M) \subseteq \pi(N)$
Rest analog
Nun gilt $\pi(\{17\}) = \{18\}$, also ist $\{17\}$ nicht elementar definierbar.
b) Die Teilmenge $\{X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |X| = 2\}$

$\{x \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) || x| = 2\}$
$(\varphi_\emptyset(x) = \forall y (s \subseteq y))$
$\varphi_c(x, y) = x \subseteq y \wedge x \neq y$
$\varphi(x) = \exists y \exists z (y < z \wedge z < x) \wedge \neg \exists a \exists b \exists c (a \subset b \wedge b \subset c \wedge c \subset x)$

Aufgabe 3

Sei $\mathfrak{A} = (\mathcal{P}(\{1, 2\}), \subseteq)$ und $\mathfrak{B} = (\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}). \subseteq)$.
Was die minimale Zahl m, sodass der Herausforderer das Spiel $G_m(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$ gewinnt? Begründen Sie ihre Antwort!

$\mathfrak{A} = (\mathcal{P}(\{1, 2\}), \subseteq), \mathfrak{B} = (\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}), \subseteq)$
$\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
<u>Beh</u> In 3 Zügen gewinnt der Herausforderer das SPiel
GS für Herausforderer
H: $b_1 = \{1\} \in \mathfrak{B}$
D: $\{a\} \in \mathfrak{A}$ mit $a \in \{1, 2\}$ (mit $\emptyset$ oder $\{1, 2\} \to$ Niederlage)
H: $b_2 = \{2\} \in \mathfrak{B}$
D: $\{b\} \in \mathfrak{A}$ mit $a \neq b$
H: $b_3 = \{3\} \in \mathfrak{B}$, es gilt $b_i \subseteq b_j$ für $i \neq j$

D muss $\emptyset$ oder $\{1,2\}$ wählen $\rightarrow$ Niederlage, da $\emptyset \subseteq \{1\}$ bzw $\{1\} \subseteq \{1,2\}$

GS für Duplikatorin in $G_2(\mathfrak{A},\mathfrak{B})$
Falls H $\emptyset$ oder $\{1,2\}$ in $\mathfrak{A}$ wählt, antworte mit $\emptyset$ oder $\{1,2,3\}$(oder umgekehrt)
Dann wählt der H im 2. Zug entweder eine Teilmenge einer Obermenge oder nochmal die 1. Menge.
Aufgrund des 1. Zuges kann $\subseteq$ also immer erhalten werden.

Aufgabe 4

Welche der folgenden Schlussregeln sind korrekt? Begründen Sie dies auf se- mantische Weise (d.h. nicht durch Ableiten im Sequenzenkalkül).
a)

$$\frac{\Gamma, \vartheta \Rightarrow \Delta, \varphi \qquad \Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta, \vartheta}{\Gamma, \neg\varphi \Rightarrow \Delta}$$

Es gelte $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\neg\varphi\}$
<u>1.Fall</u> $\mathfrak{A} \models \delta$ für ein $\delta \in \Delta \mapsto$ fertig
<u>2.Fall</u>$\mathfrak{A} \not\models \bigwedge \Delta$
Mit 2 Prämisse für ein $\mathfrak{A} \models \vartheta$
b)

$$\frac{\Gamma, \exists\varphi(x) \ \Rightarrow \Delta, \exists x\forall y\psi(x,y)}{\Gamma, \varphi(c) \Rightarrow \Delta, \forall y\exists x\psi(x,y)}$$

Es gelte $\models \Gamma \cup \{\varphi(c)\}$
Dann folgt auch $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\exists\varphi(x)\}$
Mit Prämisse gilt dann:
<u>1.Fall</u> $\mathfrak{A} \models \bigwedge \Delta \mapsto$ fertig
<u>2.Fall</u> $\mathfrak{A} \models \exists x\forall y\psi(x,y)$
Es folgt $\mathfrak{A} \models \forall y\exists x\psi(x,y)$
Also ist die SR korrekt
c)

$$\frac{\Gamma, \exists x\varphi(x) \Rightarrow \Delta, \forall x\exists y\psi(x,y)}{\Gamma, \varphi(c) \Rightarrow \Delta, \exists y\forall x\psi(x,y)}$$

Analog zu b) folgt
<u>1.Fall</u> $\mathfrak{A} \models \bigwedge \Delta \mapsto$ fertig
<u>2.Fall</u> $\mathfrak{A} \models \forall y\exists x\psi(x,y)$
folgt dann auch $\exists x\forall y(\psi(x,y))$?
Gegenbeispiel:$\Gamma = \Delta = \emptyset, \varphi(x) = (x = c)$
$\psi(x,y) = (x = y)$
Zeige (i) Prämisse gilt, (ii) Konklusion ist ungültig
(i) $\exists x\varphi(x)$ ist allgemeingültig
$\forall y\exists x(x = y)$ ist aber auch allgemeingültig.
Also Prämisse gültig.
(ii) Wähle $\mathfrak{A} = (\{1,2\}, c^{\mathfrak{A}} = 1)$
Es gilt $\mathfrak{A} \models \Gamma \cup \{\varphi(c)\} = \{c = c\}$
Aber $\Delta \cup \{\exists x\forall y\psi(x,y)\} = \{\exists x\forall y(x = y)\}$,
also existiert kein $\delta \in \Delta \cup \{\exists x\forall y\psi(x,y)\}$ mit $\mathfrak{A} \models \delta$
Also SR nicht korrekt.

Aufgabe 5

Welche der folgenden Klassen von Strukturen sind (endlich) axiomatisierbar? Geben Sie entweder ein entsprechendes Axiomensystem oder widerlegen Sie dessen Existenz.

a) Die Klasse der endlichen Cliquen.

(Klasse der endlichen Cliquen enthält beliebig große endliche Cliquen und nach LS $\uparrow$ auch unendliche Cliquen)
Cliquen werden hier als trivial angenommen, in der Klausur ist natürlich das Modell zu beschreiben(da man zeigen muss, dass das auch endlich und beliebig groß geht)
Die Klasse $\mathcal{K}_a$ enthält beliebig große endliche Cliquen, also ex. zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Clique $C \in \mathcal{K}_a$ mit $|K| \geq n$
Nach $LS \uparrow$ ex. dann auch eine unendliche Clique $C' \in \mathcal{K}_a$ $\lightning$ zur Annahme von nur entlichen Cliquen
$\Rightarrow$ nicht axiomatisierbar
b) Die Klasse der Strukturen (A, f), bei der für alle $a \in A$ und alle $n \in N \setminus \{0\}$ gilt $f^n a \neq a$.

$\{\forall a(fa \neq a), \forall a(ffa \neq a), \dots\}$
$= \{\varphi_n = \forall a(\underbrace{f \dots f}_{\text{n mal}} a \neq a) | n \geq 1\}$
(Geht nicht endlich, Schema f bzw KS)
Angenommen φ ax. $\mathcal{K}_b$. Dann is $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ unerfüllbar.
Nach KS ex. existiert eine endliche unerfüllbares $\Phi_0 \subset \Phi \cup \{\varphi\}$
Da Φ_0 endlich ist, ex. ein $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\Phi_0 \subseteq \underbrace{\{\varphi_n | 1 \leq n \leq m\}}_{\Phi'} \cup \{\neg\varphi\}$$

Ein Modell von dieser Menge muss folgendes erfüllen
(i) $\mathfrak{A} \models \Phi', f'a \neq a, ffa \neq a \dots \underbrace{f \dots f}_{\text{m mal}} a \neq a \quad \forall a$
(ii) $\mathfrak{A} \models \neg\varphi$: zB soll ein a ex. mit $f^{m+1}a = a$
Dies ist zB erfüllt für $\mathfrak{A} \models (\{0, \dots, m\}, f)$ mit $f(x) = (x+1) \mod (m+1)$
Also ist $\mathfrak{A} \models \{\varphi_n | 1 \leq n \leq m\} \cup \{\neg\varphi\}$
also insbesondere $\mathfrak{A} \models \Phi_0$ $\lightning$
$\Rightarrow \mathcal{K}_b$ nicht endliche axiomatisierbar