1. Aussagenlogik

induktive Definition: (1) 0,1∈AL, (2) τ ∈AL, (3) φ, ψ ∈AL ⇒ $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$∈AL
Formeltiefe (1) d(φ)=0 für atomare φ, (2) d($\neg\varphi$)=d(φ)+1, (3) d($\varphi \circ \psi$)=1+max(d(φ),d(ψ))
Koinzidenzlemma: Sei φ ∈AL. I,I' passende Interpretation, so dass I(X)=I'(X) ∀X ∈ $\tau(\varphi)$ ⇒ I(φ)=I'(φ)
funktional vollständig $\{\wedge, \vee, \neg\}$, $\{\wedge, \neg\}$, $\{\vee, \neg\}$, $\{\rightarrow, \neg\}$, $\{\rightarrow, 0\}$, nicht: $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
Hornformel: φ in KNF, wobei jede Disjunktion höchstens ein pos. Literal enthält, Erfüllbarkeitstest liefert (falls erfüllbar) kleinstes Modell, hält bei n Variablen nach höchstens n+1 Schritten
(1) $\neg X_1 \vee ... \vee \neg X_k \vee X \equiv X_1 \wedge ... \wedge X_k \rightarrow X, \qquad k = 0 \;\Rightarrow\; 1 \rightarrow X$
(2) $\neg X_1 \vee ... \vee \neg X_k \equiv X_1 \wedge ... \wedge X_k \rightarrow 0$
sem. Folgerungsbeziehung: $\Phi \models \psi \;\Leftrightarrow$ jede zu $\{\Phi \cup \psi\}$ passende Interpr., die Φ erfüllt auch ψ erfüllt
Kompaktheitssatz (i) Φ erfüllbar ⇔ jede endliche Teilmenge ist erfüllbar
(ii) $\Phi \models \psi \;\Leftrightarrow\; \exists \Psi_0 \subseteq \Psi$, so dass $\Psi_0 \models \psi$
Zorn: (A,<) nicht-leere partielle Ordnung, in der jede Kette nach oben beschränkt ⇒ (A,<) besitzt max. Element
Resolutionssatz Klauselmenge K unerfüllbar genau dann, wenn $\Box$ ∈Res*(K)
$\varphi \models \psi$ gilt, falls $\varphi \wedge \neg\psi$ mit Resolutionsmethode unerfüllbar, sonst gilt die Beziehung nicht
φ und ψ schliessen sich aus, falls aus $\varphi \wedge \psi$ mittles Resolution die leere Klausel ($\Box$) ableitbar ist.

2. Strukturen/Homomorphismen

Mächtigkeit Jede abzählbare Menge ist entweder endlich oder gleichmächtig zu ℕ.
(1) A abzählbar, wenn surj. Fkt. f: ℕ →A, (2) A gleichmächtig B, wenn bij. Fkt. von A nach B
Bsp.: (1) ℕ × ℕ abz. mit f(n,m)=$2^n 3^m$, (2) endl. Teilmengen von ℕ abz. (sortieren nach Max)
(3) Menge aller 0-1-Folgen nicht abz. (Diagonalisierungsbeweis)
Substruktur Universum verändern, Signatur bleibt fest, τ-Abgeschlossenheit, **Redukt** umgekehrt
Bsp.: Substruktur von (ℕ,+): $\{i_0 m_0 + ... + i_k m_k \;:\; i_0, ., i_k \in \mathbb{N}\}$
Homomorphismus (1) ∀ R ∈ $R^n(\tau)$, a_i ∈A gilt: $(a_1, ..., a_n \in R^A) \;\Rightarrow\; (\pi a_1, ..., \pi a_n) \in R^B$
(2) ∀ f ∈ $F^n(\tau), a_i$ ∈A gilt: $\pi\; f^A(a_1, ..., a_n) = f^B(\pi a_1, ..., \pi a_n)$
starker Hom. für Relationen ⇔ statt ⇒, **Einbettung:** injektiver, starker Homomorphismus
Isomorphismus bijektiver starker Homomorphismus

3. Prädikatenlogik

Koinzidenzlemma Sei φ ∈FO($\sigma \cap \tau$), ($\mathcal{A}$,β) σ-Interpretation, ($\mathcal{A}$',β') τ-Interpretation so, dass:
(1) $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}$' haben dasselbe ($\sigma \cap \tau$)-Redukt, (2) Frei(φ) ⊆ Def(β) ∩ $Def(\beta')$ und $\beta(x) = \beta'(x)$ $\forall x$ ∈Frei(φ). Dann gilt: $\mathcal{A}$⊨ $\varphi[\beta]$ ⇔ $\mathcal{A}$'⊨ $\varphi[\beta']$
Abschluss: φ Formel mit freien Var. $x_1, ., x_k$. Dann heissen die Sätze $\exists x_1..\exists x_k(\varphi)$ und $\forall x_1...\forall x_k(\varphi)$ existentieller bzw. universeller Abschluss von φ. Erfüllbar ⇔ exist. Abschluss erfüllbar, allgemeingültig ⇔ univ. Abschluss allgemeingütlig
Negationsnormalform '→' muss weg, Negationen nur vor Literalen
Pränexnormalform Negations-Normalform machen, gebundene Variablen umbenennen, Quantoren nach vorne
Skolemnormalform: Existenzquantoren durch Funktionen ersetzen ('Allquantoren-die-davor stehen-stellig')
Auswertungsspiel MC($\mathcal{I}$,φ): Verifizierer zieht bei ∨ und ∃ , Falsifizierer bei ∧ und ∀
Falls φ Literal Spiel beendet. Verifizierer gewinnt wenn $\mathcal{A} \models \varphi$, Falsifizierer sonst.
Gewinnstrategie Gewinnbereiche $W_\Diamond$ ⊆V und $W_\Box$ ⊆V. Spieler $\Diamond$ gewinnt von Knoten v, falls er den Gegner $\Box$ in einen Knoten v' zwingen kann, wo $\Box$ keinen Zug machen kann (auch v=v'). Spiel **determiniert**, wenn $W_\Diamond \cup W_\Box = V$
Entscheidbarkeit Das Gültigkeitsprobl. (⇒ Erfüllbarkeitsprobl.) der FO-Logik ist unentscheidbar (Church, Turing)
Invarianz unter Abwicklung wenn ∀ Kripkestrukturen $\mathcal{K}$ und alle Zustände v für die Abwicklung $T_{\mathcal{K},v}$ gilt: $T_{\mathcal{K},v} \models \varphi(v) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{K} \models \varphi(v)$
Falls FO⇒ML möglich: invariant. Falls nicht bilde ein $\mathcal{K}$ und seine Abwicklung, wobei φ nur in einem gilt: nicht invariant. Bsp. invariant unter Abwicklung, aber nicht Bisimulationsinvariant: $\varphi(x) = \exists y \exists z(Exy \wedge Exz \wedge z \neq y \wedge Oz \wedge Py)$

4. Modallogik

Erfüllbarkeit: ψ ∈ML ist erfüllbar in Kripkestruktur $\mathcal{K} = (V, (E_a)_{a\in A}, (P_i)_{i\in I})$, wenn ein v∈V in $\mathcal{K}$ existiert mit $\mathcal{K}, v \models \psi$. a∈A Aktionen (Kanten) und P_i atomare Eigenschaften (Knoten)
Äquivalenz $\varphi \equiv \psi$, wenn $[\varphi]^{\mathcal{K}} = [\psi]^g otk$ für alle zu beiden passenden $\mathcal{K}$.
Bisimulation zwischen zwei Kripkestrukturen $\mathcal{K}$ und $\mathcal{K}'$ ist eine Relation Z⊆V×V', so dass ∀ (v,v')∈Z gilt:
(1) v∈ $P_i \;\Leftrightarrow\; v' \in P_i' \;\forall i \in I$, (2 hin) $\forall a \in A, w$ ∈V mit v$\xrightarrow{a}$w ∃ w'∈V' mit v'$\xrightarrow{a}$w' und (w,w')∈Z
(2 her) ∀a∈A, w'∈V mit v'$\xrightarrow{a}$w' ∃ w∈V mit v$\xrightarrow{a}$w und (w,w')∈Z
n-Bisimilarität n-Zug-Spiel. $\mathcal{K}$,v $\sim_n$ $\mathcal{K}$',v'. $\mathcal{K}$,v $\sim$ $\mathcal{K}$',v' ⇒ $\mathcal{K}$,v $\sim_n$ $\mathcal{K}$',v'
Modaltiefe (1) md(φ)=0 ∀ aussagenlog. Formeln, (2) md($\neg\varphi$)=md(φ)
(3) md($\varphi \circ \psi$)=max(md(φ),md(ψ)), (4) md($\Diamond\varphi$)=md($\Box\varphi$)=md(φ)+1
ML-Äquivalenz (1) $\mathcal{K}$,v$\equiv_{ML}\mathcal{K}$',v', wenn ∀ψ ∈ML gilt: $\mathcal{K}$,v⊨ ψ ⇔ $\mathcal{K}$',v'⊨ ψ
(2) $\mathcal{K}$,v$\equiv^n_{ML}\mathcal{K}$',v', wenn ∀ψ ∈ML mit md(ψ)≤n gilt: $\mathcal{K}$,v⊨ ψ ⇔ $\mathcal{K}$',v'⊨ ψ
Bisim.-Invarianz ML-Formeln können bisimilare Zustände nicht unterscheiden!
(1) $\mathcal{K}$,v∼$\mathcal{K}$',v' ⇒ $\mathcal{K}$,v$\equiv_{ML}\mathcal{K}$',v', (2) $\mathcal{K}$,v$\sim_n\mathcal{K}$',v' ⇒ $\mathcal{K}$,v$\equiv^n_{ML}\mathcal{K}$',v', (3) $\mathcal{K}$,v⊨ ψ und K,v∼K',v' ⇒ $\mathcal{K}$',v'⊨ ψ
(4) $\mathcal{K}$,$\mathcal{K}$' endl. verzweigt, dann gilt: $\mathcal{K}$,v∼$\mathcal{K}$',v' ⇔ $\mathcal{K}$,v$\equiv_{ML}\mathcal{K}$',v'
Entscheidbarkeit Erfüllbarkeitsproblem für ML ist entscheidbar

5. CTL = Computational Tree Logic

(1) Xφ = am nächsten gilt φ, (2) φUψ = es gilt solange φ (auch direkt) bis ψ gilt, (3) EXφ = $\Diamond\varphi$, (4) AXφ = $\Box\varphi$, (5) Fφ = (1Uφ) = irgendwann gilt φ, (6) Gφ = $\neg F \neg\varphi$ = es gilt immer φ
Bsp.(1) auf allen Pfade abwechselnd P und ¬P : AG[(P→AX¬P)∧(¬P→AXP)]
Bsp.(2) vor jedem erreichbaren Q-Zustand liegt ein P-Zustand : AG(EXQ→P)
Bsp.(3) von jedem erreichbaren P-Zustand kann ein Q-Zustand erreicht werden : AG(P→EFQ)
Bsp.(4) ∃ Pfad, auf welchem 3-mal direkt hintereinander P gilt : EF(P∧EX(P∧EXP))
Bsp.(5) Auf jedem Pfad gilt nur noch P, sobald ein P-Zustand erreicht wird : AG(P→AGP)
Bsp.(6) Es kann nie ein Zustand erreicht werden, an dem P, aber nicht Q gilt : ¬EF(P∧¬Q)≡AG(P→Q)

6. relationale Algebra

Wichtig: ∀ **immer** in ∃ umwandeln, $\wedge = \times$, $\vee = \cup$, $\neg R^n : Univ^n - R$
Bsp.(1) $\varphi(x) = \forall y(Rxy \rightarrow Py)$: $Univ - \pi_1(R - Univ \times P)$ (an allen Nachfolgern gilt P)
Bsp.(2) $\varphi(x) = \forall y \exists z(Ryz \wedge Rxz)$: $Univ - \pi_2(Univ^2 - \pi_{1,3}\sigma_{2=4}(R \times R))$
Bsp.(3) $\varphi(x) = \exists y \exists z(y \neq z \wedge Rxy \wedge Rxz)$: $\pi_1(\sigma_{1=3}(R \times R) - \sigma_{2=4}(R \times R))$

7. Definierbarkeit FO-Logik

FO-Axiomatisierbarkeit Strukturklasse $\mathcal{K}$ heißt axiomatisierbar, wenn eine Satzmenge $\Phi \subseteq$FO(τ) existiert, so dass $\mathcal{K}$=Mod(Φ). Wenn Φ endlich für $\mathcal{K}$, dann endlich axiomatisierbar.
Isomorphielemma π: Sei $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ ein Isomorphismus von τ-Strukturen, dann gilt $\forall\ \varphi(x_1,.,x_n) \in$FO($\tau$) und $\forall\ a_1,.,a_n \in \mathcal{A}$: $\mathcal{A} \models \varphi(a_1,.,a_n) \Leftrightarrow \mathcal{B} \models \varphi(\pi a_1,.,\pi a_n)$
HowTo: Automorphismus für Struktur angeben, der aber Lemma-Bedingung nicht erfüllt (Bsp. unten)
Theorie ist eine erfüllbare Menge T$\subseteq$FO(τ) von Sätzen, die unter $\models$ abgeschlossen sind, das heißt es gilt $\forall$ τ-Sätze φ: T$\models \varphi \Rightarrow \varphi \in$T. Eine Theorie ist vollständig, wenn für jeden Satz $\varphi \in$FO(τ) entweder $\varphi \in$T oder $\neg\varphi \in$T gilt.
Quantorenrang qr(ψ): (1) =0 für quantorenfreie ψ, (2) qr(ψ)=qr($\neg\psi$)
(3) qr($\psi \circ \varphi$)=max(qr(ψ),qr(φ)), (4) qr($\exists$xψ)=qr($\forall$xψ)=qr(ψ)+1
Ehrenfeucht-Fraisse τ endlich und relational, $\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$ τ-Strukturen, n$\in \mathbb{N}$. Folgendes ist äquivalent:
(1) $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, $\Leftrightarrow$ Duplikatorin gewinnt EF-Spiel G($\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$)
(2) $\mathcal{A} \equiv_m \mathcal{B} \Leftrightarrow$ Duplikatorin gewinnt $G_m(\mathcal{A},\mathcal{B})$
Bsp.: $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, |, 13)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, |, 15)$: m=2, da I wählt 3 und 5 in $\mathcal{B}$
Bsp.: $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, +, 3, 5)$, $\mathcal{B} = (\mathbb{N}, +, 3, 7)$: m=2, da I wählt 2 = 5 - 3 und 1 = 3 - 2 in $\mathcal{B}$
axiomatisierbar Versuche Strukturen $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$ und $\mathcal{B}_m \notin \mathcal{K}$ zu finden. Dann zeige, dass Dupl. $G_m(\mathcal{A}, \mathcal{B}_m)$ gewinnt. Denn dann können $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ nicht durch FO-Sätze unterschieden, also auch nicht **endlich axiomatisiert** werden.

8. Entscheidbarkeit

Sequenzkalkül $\Phi \subseteq$FO(τ) Menge von Sätzen. Ein Satz ψ ist ableitbar aus dem Axiomensystem Φ ($\Phi \vdash \psi$), wenn eine endliche Teilmenge Γ von Φ ex., so dass die Sequenz $\Gamma \Rightarrow \psi$ im Sequ.-Kalkül ableitbar ist. Eine Sequenz $\Gamma \Rightarrow \Delta$ ist ableitbar aus Φ , wenn es eine ableitbare Sequenz $\Gamma, \Gamma' \Rightarrow \Delta$ gibt, mit $\Gamma' \subseteq \Phi$
Vollständigkeitssatz Für jede Menge $\Phi \subseteq$FO(τ) und jeden Satz $\psi \in$FO(σ) gilt:
(1) $\Phi \models \psi \Leftrightarrow \Phi \vdash \psi$ und (2) Φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Φ konsistent
Löwenheim-Skolem Jede erfüllbare, abzählbare Satzmenge hat ein abzählbares Modell
aufst. Löwenheim-Skolem Φ besitze ein unendliches Modell. Dann gibt es zu jeder Menge M ein Modell D$\models \Phi$ über einem Universum D, welches mindestens so mächtig ist wie M.
Kompaktheitssatz FO Für jede Menge $\Phi \subseteq$FO(τ) und jedes $\psi \in$FO(σ) gilt:
(1) $\Phi \models \psi \Leftrightarrow$ es ex. eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$, so dass $\Phi_0 \models \psi$
(2) Φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ jede endliche Teilmenge von Φ ist erfüllbar
Beweis: (1$\Leftarrow$) Angenommen es ex. eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \models \psi$. Sein nun $\mathfrak{A}$ ein Modell von Φ. Dann gilt insbesondere, dass $\mathfrak{A}$ auch ein Modell von Φ_0 sein muss. Wegen $\Phi_0 \models \psi$ muss $\mathfrak{A} \models \psi$ gelten.
Somit folgt insgesamt: $\Phi \models \psi$
Beweis: (2$\Rightarrow$) Sein $\mathfrak{A}$ ein Modell von Φ, d.h. für alle $\phi \in \Phi$ gilt: $\mathfrak{A} \models \phi$. Somit gilt natürlich auch $\mathfrak{A} \models \Phi_0$ für eine beliebige Teilmenge Φ_0 von Φ. Somit ist eine beliebige Teilmenge dann auch erfüllbar.
unendliches Modell $\Phi \in$FO(τ) Satzmenge mit beliebig grossen endlichen Modellen
($\forall n \in \mathbb{N}\ \exists$ Modell A$\mathcal{A} \models \Phi$ mit endl. $\mathcal{A}$ und $|\mathcal{A}|$>n). Dann hat Φ auch ein unendliches Modell
Satz Sei $\mathcal{A}$ eine unendliche Struktur. Dann $\exists$ Struktur $\mathcal{B}$ mit $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, aber **nicht** $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.
Insbesondere ist die Isomorphieklasse $\{\mathcal{B} : \mathcal{A} \cong \mathcal{B}\}$ von $\mathcal{A}$ nicht axiomatisierbar in FO
Beweis: 'Es exisistiert keine endliche Baumstruktur'(fiktives Beispiel)
Angenommen es gäbe eine Baumstruktur $\mathcal{T}$, die endlich und bisimilar zum Knoten 'v_0' ist. Dann hätte diese Baumstruktur auch eine endliche Tiefe D. Dann erfüllt $\mathcal{T}$ die Formel $< b >< a >< b >< a >< a > 1$ (mind. Tiefe D) nicht, $\mathcal{K}, v_0$ schon. Widerspruch zur Bisimilarität, da eine Formel aus ML die Strukturen trennt.

Texed by Patrick Elftmann (patrick.elftmann@rwth-aachen.de)
und Matthias Sondermann (matthias.sondermann@rwth-aachen.de)

9. Sequenzenregeln

$(\neg\ \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi}{\Gamma, \neg\psi \Rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \neg\psi}$	$(\Rightarrow\ \neg)$
$(\vee\ \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma\ ,\ \psi \Rightarrow \Delta \qquad \Gamma\ ,\ \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma\ ,\ \psi \vee \varphi \Rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \psi\ ,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \psi \vee \varphi}$	$(\Rightarrow\ \vee)$
$(\wedge\ \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma\ ,\ \psi\ ,\ \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma\ ,\ \psi \wedge \varphi \Rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \psi \qquad \Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \psi \wedge \varphi}$	$(\Rightarrow\ \wedge)$
$(\rightarrow\ \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \psi \qquad \Gamma\ ,\ \varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma\ , \psi \rightarrow \varphi \Rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma\ , \psi \Rightarrow \Delta\ , \varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \psi \rightarrow \varphi}$	$(\Rightarrow\ \rightarrow)$
$(S\ \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma\ , \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma\ , t = t'\ ,\ \psi(t') \Rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \psi(t)}{\Gamma\ ,\ t = t' \Rightarrow \Delta\ ,\ \psi(t')}$	$(\Rightarrow\ S)$
$(\forall\ \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma\ , \psi(t) \Rightarrow \Delta}{\Gamma\ , \forall x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \psi(t)}{\Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \exists x \psi(x)}$	$(\Rightarrow\ \exists)$
$(\exists\ \Rightarrow)$	$\dfrac{\Gamma\ ,\ \psi(c) \Rightarrow \Delta}{\Gamma\ ,\ \exists x \psi(x) \Rightarrow \Delta}$ wenn c nicht in $\Gamma, \Delta, \psi(x)$	$\dfrac{\Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \psi(c)}{\Gamma \Rightarrow \Delta\ ,\ \forall x \psi(x)}$ wenn c nicht in $\Gamma, \Delta, \psi(x)$	$(\Rightarrow\ \forall)$
$(=)$	$\frac{\Gamma\ ,\ t=t \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta}$		

Beweis von $(\Rightarrow\ \neg)$: Sei $\mathcal{I}$ Int., so dass $\mathcal{I} \models \Gamma$. Falls $\mathcal{I} \models \neg\varphi$, dann erfüllt $\mathcal{I}$ die rechte Seite der Konklusion. Gelte nun $\mathcal{I} \models \varphi$. Dann folgt aus Prämisse, das $\mathcal{I} \models \delta \in \Delta$. Folglich macht $\mathcal{I}$ dann auch rechte Seite der Konkl. wahr.
Beweis von $(\Rightarrow \vee)$: Sei $\mathcal{I}$ Int., so dass $\mathcal{I} \models \Gamma$. Falls $\mathcal{I} \models \delta \in \Delta$, dann gilt die Konklusion. Annahme $\mathcal{I} \not\models \Delta$:
(1) Falls $\mathcal{I} \not\models \varphi$, dann folgt aus Prämisse, dass $\mathcal{I} \models \psi$, folgl. dann auch $\mathcal{I} \models \varphi \vee \psi$
(2) Falls $\mathcal{I} \not\models \psi$, dann gilt analog, dass wegen Prämisse $\mathcal{I} \models \varphi$ und somit auch $\mathcal{I} \models \varphi \vee \psi$
Beweis von $(\vee \Rightarrow)$: Annahme: (1) $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta$ gültig, (2) $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta$ gültig. Sei $\mathcal{I} \models \Gamma, \varphi, \psi$.
Wenn $\mathcal{I} \models \varphi$, dann $\mathcal{I} \models \delta \in \Delta$ wegen (1). Wenn $\mathcal{I} \models \neg\varphi$, dann $\mathcal{I} \models \psi$ und $\mathcal{I} \models \delta \in \Delta$ wegen (2).
Beweis von $(\Rightarrow \wedge)$: Sei $\mathcal{I}$ Int. mit $\mathcal{I} \models \Gamma$. Falls $\mathcal{I} \models \delta \in \Delta$, dann gilt Konklusion. Annahme $\mathcal{I} \not\models \Delta$.
Dann folgt aus $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$ und $\Gamma \Rightarrow \Delta, \psi$ dass $\mathcal{I} \models \psi$. Insgesamt folgt, dass $\mathcal{I} \models \varphi \wedge \psi$ und damit Konklusion wahr.
Beweis von $(\rightarrow\ \Rightarrow)$: Sei $\mathcal{I}$ Int. mit $\mathcal{I} \models \Gamma, \varphi \rightarrow \psi$. (1) Annahme $\mathcal{I} \not\models \varphi$, dann folgt aus Prämisse $\Gamma \Rightarrow \Delta, \varphi$, dass $\mathcal{I} \models \delta \in \Delta$. Somit gilt Konklusion. (2) Nun gelte $\mathcal{I} \models \varphi$. Dann gilt wg. $\mathcal{I} \models \varphi \rightarrow \psi$, dass $\mathcal{I} \models \psi$. Wegen Prämisse $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta$ gilt, dass $\mathcal{I} \models \delta \in \Delta$. Insgesamt gilt Konklusion.

Beweis von $\frac{\Gamma,\varphi \Rightarrow \Delta,\psi \quad \Gamma\psi \Rightarrow \Delta,\varphi}{\Gamma \Rightarrow \Delta,\varphi\ \leftrightarrow\ \psi}$: Sei $\mathcal{I}$ Int. mit $\mathcal{I} \models \Gamma$
(1) Falls $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ und $\mathcal{I} \models \neg\psi$ gilt, dass $\mathcal{I} \models \varphi \leftrightarrow \psi$, also eine Formel der rechten Seite erfüllt.
(2) Falls $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \psi$ gilt, dass $\mathcal{I} \models \varphi \leftrightarrow \psi$, also eine Formel der rechten Seite erfüllt.
(3) Falls $\mathcal{I} \models \varphi$ und $\mathcal{I} \models \neg\psi$ gilt, dann folgt aus $\Gamma, \varphi \Rightarrow \Delta, \psi$, dass $\mathcal{I} \models \delta \in \Delta$
(4) Falls $\mathcal{I} \models \neg\varphi$ und $\mathcal{I} \models \psi$ gilt, dann folgt aus $\Gamma, \psi \Rightarrow \Delta, \varphi$, dass $\mathcal{I} \models \delta \in \Delta$

Beweis von $\frac{\Gamma,\exists x\varphi \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\forall x\varphi \Rightarrow \Delta}$: Sei $\mathcal{A}$ Modell von $\Gamma, \forall x\varphi$.
Da deshalb gilt $\mathcal{A} \models \Gamma, \forall x\varphi$, folgt, dass $\mathcal{A} \models \Gamma, \exists x\varphi$, da $\mathcal{A}$ für alle x φ erfüllt, muss es insbesondere das φ für ein x erfüllen. Aus Prämisse erhält man, wegen $\mathcal{A} \models \Gamma, \exists x\varphi$, dass $\mathcal{A} \models \delta \in \Delta$. Somit ist gezeigt, dass $\mathcal{A}$ mindestens eine Formel aus Δ erfüllt.

Beweis von $\frac{\Gamma,\varphi \Rightarrow \Delta,\psi \quad \Gamma,\psi \Rightarrow \Delta}{\Gamma,\varphi \Rightarrow \Delta}$: Annahme: Prämisse gültig. Sei $\mathcal{I} \models \Gamma, \varphi$
Behauptung: $\mathcal{I} \models \delta \in \Delta$ ($\mathcal{I} \models \vee\Delta$)
(1) $\mathcal{I} \models \psi$: Da $\mathcal{I} \models \Gamma, \psi$ folgt wegen rechte Prämisse $\mathcal{I} \models \vee\Delta$
(2) $\mathcal{I} \models \neg\psi$: $\mathcal{I} \models \vee\Delta$ wegen linke Prämisse.

10. FO-Beispiele

(1) - (4) ausgehend von Struktur $(\mathbb{N}, +, \cdot)$
(1) $x \leq y : \exists z(x + z = y)$, (2) $x|y : \exists z(x \cdot z = y)$, (3) x Prim : $\forall y(y|x \rightarrow y = x \vee y = 1)$
(4) x 2erpotenz : $\forall y(y\ prim \wedge y|x \rightarrow y = 2)$, (5) Binärdarst. von x und y dieselbe Länge : $\forall z(z = 2^n \rightarrow (z > x \leftrightarrow z > y))$
(5),(6) ausgehend von Universum V der Mengen: (5) x=$\emptyset$: $\neg\exists m(m \in x)$, (6) $x \subseteq y : \forall m(m \in x \rightarrow m \in y)$,
(7) Surjektivität: ∀x∃y (x=fy), (8) Injektivität: ∀x∀y∀z(x=fy∧ x=fz → y=z)

Resolution Klausel = endliche Menge von Literalen. Einer Formel ψ in KNF wird eine endl. Klauselmenge so zugeordnet: Jeder Disj. $\bigvee_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$ ordnet man die Klausel $C_i = \{Y_{ij} : j = 1, ..., m\}$ zu und setzt K(ψ)={$C_!, ..., C_n$}

11. Axiomensysteme

Klasse der linearen Ordnung:
(1) $\forall x \neg(x < x)$ (2) $\forall x \forall y \forall z(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$ (3) $\forall x \forall y(x < y \vee x = y \vee y < x)$
Klasse der linearen Ordnung mit größtem Element:
(1) lineare Ordnung (2) $\exists x \neg \exists y(x < y)$
Klasse der linearen Ordnung, über und unter jedem Element unendlich viele El.:
(1) lineare Ordnung (2) $\forall x \exists y(x < y)$ (3) $\forall x \exists y(y < x)$
Klasse der linearen Ordnung, deren Intervalle alle nicht dicht sind:
(1) lineare Ordnung (2) $\forall x \forall y \exists u \exists v(x < y \rightarrow x \leq u < v \leq y \wedge \neg \exists z(u < z < v))$
Klasse der dichten linearen Ordnung:
(1) lineare Ordnung (2) $\forall x \forall y(x < y \rightarrow \exists z(x < z \wedge z < y)$
Klasse der diskreten linearen Ordnung:
(1) lineare Ordnung (2) $\forall x(\neg \exists y\ x < y \vee \exists y(x < y \wedge \neg \exists z(x < z \vee z < y)))$
(3) $\forall x(\neg \exists y\ x > y \vee \exists y(x > y \wedge \neg \exists z(x > z \vee z > y)))$
Klasse der Gruppen:
(1) $\forall x \forall y\ \forall z((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$ (2) $\exists e[\forall x(x \cdot e = x \wedge e \cdot x = x) \wedge \forall x \exists y(x \cdot y = e)]$
Klasse alle Strukturen (A,E) mit einer Äquivalenzrelation E:
(1) $\forall x Exx$ (2) $\forall x \forall y(Exy \leftrightarrow Eyx)$ (3) $\forall x \forall y\ \forall z(Exy \wedge Eyz \rightarrow Exz)$
Klasse der ungerichteten Graphen:
(1) $\forall x \neg Exx$ (2) $\forall x \forall y(Exy \leftrightarrow Eyx)$
Unendlich viele Elemente:
$\Phi_\infty = \{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N}\}$ mit $\varphi_{\geq n} := \exists x_1 ... \exists x_n(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j)$
Klasse der endlichen linearen Ordnungen: ist nicht FO-axiomatisierbar
Annahme: Φ ist eine Menge von Sätzen mit $\mathcal{A} \models \Phi \Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist endliche lineare Ordnung.
Sei $\Psi = \Phi \cup \{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N}\}$, Beh.: Ψ erfüllbar. Sei $\Psi_0 \subseteq \Psi$ endl., d.h. $\Psi_0 \subseteq \Psi\{\varphi_{\geq 0}, ., \varphi_{\geq k}\}$ für ein k.
Dann gilt, dass $(\{0, ., k-1\}, <) \models \Psi_0$. Also ist Ψ_0 erfüllbar. Nach Kompaktheitssatz ist damit auch Ψ erfüllbar, d.h. $\mathcal{A} \models \Psi$. Folglich gilt, dass $\mathcal{A} \models \Phi$ und $\mathcal{A}$ unendlich. Widerspruch zur Annahme.
Klasse aller Strukturen welche zu $(\mathbb{Q}, <)$ isomorph sind: ist nicht FO-axiomatisierbar
Klasse der ungerichteten endlichen Graphen: ist nicht FO-axiomatisierbar
Klasse der ungerichteten unendlichen Graphen: ist FO-axiomatisierbar, aber nicht endlich
(1) $\forall x \neg Exx$ (2) $\forall x \forall y(Exy \leftrightarrow Eyx)$ (3) $\{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N}\}$
Angenommen die Klasse der ungerichteten, unendlichen Graphen wäre endlich axoimatisierbar. Dann gäbe es eine Formel φ mit qr(φ)=m, welche diese Klasse axiomatisiert. Dazu betrachten wir zwei ungerichtete Graphen, G_∞ (unendliche Kette) und G_{fin} (Zykel mit 2^m Elementen). Im Spiel $G_m(G_\infty, G_{fin})$ gewinnt die Duplikatorin. Somit kann das φ diese Strukturen nicht unterscheiden, obwohl G_{fin} nicht zur Klasse der ungerichteten unendlichen Graphen gehört. Widerspruch
Klasse der ungerichteten zykelfreien Graphen: ist nicht endlich axiomatisierbar
(1) ungerichtete Gr. (2) $\{\neg\varphi^n_{cyc} : n \in \mathbb{N}, n > 2\}$ mit $\varphi^n_{cyc} := \exists x_1 ... \exists x_n(\bigwedge_{1 \leq i,j \leq n} x_i \neq x_j \ \wedge \ \bigwedge_{1 \leq i < n} Ex_i x_{i+1} \wedge Ex_n x_1)$
Klasse aller unendlichen linearen Ordnung: nicht endlich axiomatisierbar
(1) lineare Ordnung (2) $\{\varphi_{\geq n} : n \in \mathbb{N}\}$
Klasse aller partiellen Ordnung, die jede enliche lineare Ordnung als Substruktur enthält:
ist nicht endlich axiomatisierbar
(1) $\forall x \neg(x < x)$ (2) $\forall x \forall y \forall z(x < y \vee y < z \rightarrow x < z)$ (3) $\exists x_1 ... \exists x_n(x_1 < ... < x_n)$
Klasse der abzählbaren linearen Ordnung: Diese ist nach dem (aufsteigendem) Satz von Löwenheim-Skloem nicht axiomatisierbar. Da zu einer Formelmenge Φ, die dies axiomatisieren würde mit einem unendlichem Modell auch ein überabzählbar große Modell existiert.
Klasse der überabzählbaren linearen Ordnung: Diese Klasse ist nach Satz von Löwenheim-Skolem nicht axiomatisierbar, da ein Axiomensystem Φ, welches diese Klasse axiomatisieren würde auch ein abzählbares Modell hätte.

Zeige dass die Relation in der jeweiligen Struktur nicht FO-definierbar sind: (Isomorphielemma)
(a) die Menge der geraden Zahlen in $(\mathbb{N}, \cdot)$:
f: $2^a 3^b c \longrightarrow 2^b 3^a c$ mit $a, b, c, \in \mathbb{N}, 2 \nmid c, 3 \nmid c$ ist Automorphismus in $(\mathbb{N}, \cdot)$
da $f(n \cdot n') = f(2^{a+a'} 3^{b+b'} cc') = 2^{b+b'} 3^{a+a'} cc' = 2^b 3^a c\ 2^{b'} 3^{a'} c = f(n) \cdot f(n')$
Annahme: $\varphi(x)$ definiert in $(\mathbb{N}, \cdot)$ die Menge der geraden Zahlen, d.h.
$(\mathbb{N}, \cdot) \models \varphi(x) \Leftrightarrow$ x gerade, also $(= 2^a 3^b c)$ und a $\neq 0 \Leftrightarrow$ (Iso.-Lemma) $(\mathbb{N}, \cdot) \models \varphi(fx)$
$\Rightarrow$ x gerade $\Leftrightarrow$ x ist ungerade $\Rightarrow$ gerade Zahlen in $(\mathbb{N}, \cdot)$ nicht FO-definierbar
(b) die Ordnung $\leq$ in $(\mathbb{Q}, +)$
f: x $\longrightarrow$ -x ist Automophismus von $(\mathbb{Q}, +)$ Annahme: $\varphi(x, y)$ definiert in $(\mathbb{Q}, +)$ die Ordnung $\leq$, d.h.
$(\mathbb{Q}, +) \models \varphi(x, y) \Leftrightarrow\ x \leq y\ \Leftrightarrow$ (Iso.-Lemma) $(\mathbb{Q}, +) \models \varphi(fx, fy) \Rightarrow\ x \leq y \Leftrightarrow -x \leq -y$. Widerspruch

Ist die Funktion $f : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{B}$ ein Homomorphismus, Einbettung?
$\mathfrak{A} = (\mathbb{N}, +, \leq)$ und $\mathfrak{B} = (\mathbb{N}, \cdot, \leq)$
Es gilt $f(n + n') = 2^{n+n'} = 2^n \cdot 2^{n'} = f(n) \cdot f(n)$. Somit ist die Homomorphiebedingung für die Funktionen x und $\cdot$ gezeigt. Für die Ordnungsrelation gilt: $n \leq n' \Leftrightarrow f(n) \leq f(n')$. Somit liegt ein starker Homomorphismus vor, da eine $\Leftrightarrow$-Beziehung existiert. Weiter ist klar, dass die Abb. injektiv ist und somit f eine Einbettung der Struktur $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{B}$