Scheinklausuren zur Linearen Algebra II
vom Lehrstuhl B für Mathematik,
Prof. Dr. W. Plesken

Kianhwa Djie
kianhwa.djie@post.rwth-aachen.de

Liliya Reznikova
LiliaReznikov@t-online.de

21. September 2005

Vorwort

Dieses Skript stellt eine kleine Sammlung von Klausuren der Linearen Algebra II zusammen, die als Scheinklausuren vom Lehrstuhl B für Mathematik, Prof. Plesken gestellt wurden, sofern sie mir zur Verfügung standen.

Diese Klausuraufgaben können helfen, sich einen Überblick darüber zu verschaffen, was in einer Klausur verlangt werden könnte. Aber diese Aufgaben sollten nur als Ergänzung zu der Vorlesung gesehen werden, da Aufgaben zum besseren Verständnis der Theorie beitragen, sie aber nicht ersetzen können. So ist eine mehr oder weniger gute Kenntnis der Theorie Voraussetzung zum Lösen der Aufgaben. Umgekehrt kann auch die Theorie an Hand der Aufgaben verifiziert und gelernt werden.

Die hier gesammelten Aufgaben können nicht alle Aufgabentypen vollständig wiedergeben (insbesondere sind Tensorprodukte unverhältnismäßig selten vorhanden), ebenso kann am Datum der Klausuren eine gewisse Aktualität der Klausur gesehen werden. Da zum Wintersemester 2000/2001 die Vorlesung von Prof. Plesken neu konzipiert wurde, kommen manchmal Aufgaben vor, die in der derzeitigen Vorlesung zur Linearen Algebra I gehören. Ferner habe ich mir die Freiheit genommen, die Formulierung der Aufgaben und die dazugehörigen Lösungen dem Stand der „neueren“ Vorlesung anzupassen.

Es wäre sicher im Interesse aller kommenden Studenten, wenn dieses Skript immer wieder mit neuen Klausuren aktualisiert wird. Ebenso würde ich mich über Verbesserungen sehr freuen, falls ich mich schlicht und ergreifend vertan haben sollte.

Ich wünsche allen, die die Vorlesung Lineare Algebra hören, viel Spaß und ein gutes Gelingen.

1 Scheinklausuren zur Linearen Algebra II

1.1 Scheinklausur am 8. 7. 1988

Aufgabe 1.1 Sei $A = \begin{pmatrix} 17 & -6 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein $X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $X^2 = A$.

Aufgabe 1.2 Sei $\mathfrak{V}$ ein $\mathbb{C}-$Vektorraum mit Basis $B = (B_1, B_2)$ und $f : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ linear mit ${}^B f^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie alle Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von f.

Aufgabe 1.3 Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, so dass $B^\star \cdot A \cdot B$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 1.4 Im affinen Raum $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{3\times 1})$ sei $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge die Gerade durch P und Q ist.

Aufgabe 1.5 Betrachten Sie den affinen Raum $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{2\times 1})$ mit affinem Koordinatensystem $\kappa : \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{2\times 1}) \to \mathcal{A}_2(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $f : \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{2\times 1}) \to \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{2\times 1}) : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine affine Abbildung. Bestimmen Sie ein $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $\overline{A}$ affine Abbildung von $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$ in sich ist mit $\overline{A} \circ \kappa = \kappa \circ f$.

Aufgabe 1.6 Sei $\mathcal{E}$ ein EUKLID'ischer affiner Raum mit Translationsraum $\mathfrak{V}$ und innerem Produkt Φ. Es sei $(P_0, P_1, P_2, P_3) \in \mathcal{E}^4$, so dass $B = (B_1, B_2, B_3) \in \mathfrak{V}^3$ mit $B_i = \overrightarrow{P_0 P_i}$ eine ON-Basis ist. Ferner sei $X : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_0^3$ ein orthogonales Koordinatensystem mit $X(P_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overline{X}(V) = {}^B V$ für $V \in \mathfrak{V}$. Eine Ebene E ist gegeben durch $E := \mathrm{Null}(X_1 + 2X_2 + 3X_3 - 4)$. Bestimmen Sie ein $V \in \mathfrak{V}$, so dass $\Phi(\overrightarrow{PQ}, V) = 0$ für alle $P, Q \in E$.

Aufgabe 1.7 Bestimmen Sie im affinen Raum $\mathcal{A}_3(\mathbb{R})$ die affine Normalform der Quadrik $\mathrm{Null}(x^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 2yz + 2z + 2)$.

Aufgabe 1.8 Bestimmen Sie im EUKLID'ischen affinen Raum $\mathcal{E}_2$ (mit Standardskalarprodukt) die metrische Hauptachsentransformation der Quadrik $\mathrm{Null}(x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y + 1)$.

1.2 Scheinklausur am 13. 7. 1992 (90 Min.)

Aufgabe 2.1 Sei $\mathfrak{V}$ ein $\mathbb{C}-$Vektorraum mit Basis $B = (B_1, B_2, B_3)$. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von $\mathfrak{V}$ bezüglich der HERMITE'schen Sesquilinearform Φ auf $\mathfrak{V}$ mit ${}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 2 \\ i & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2.2 Im unitären Vektorraum $(\mathbb{C}^{3\times 1}, \Phi)$ sei die Standardbasis eine ON-Basis. Ferner sei $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$ und $\mathfrak{U} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Bestimmen Sie den Orthogonalraum $\mathfrak{U}^\perp$ sowie $Y \in \mathfrak{U}$ und $Z \in \mathfrak{U}^\perp$, so dass $X = Y + Z$.

Aufgabe 2.3 Die Gruppe $GL(3,\mathbb{R})$ operiere auf $\mathbb{R}^{3\times 3}$ vermöge $gA := g^{-1}Ag$ für $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, g \in GL(3,\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

Es gibt $r,s \in \mathbb{R}$, so dass $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & r & s \end{pmatrix}$ in einer Bahn liegen.

Aufgabe 2.4 Im EUKLID'ischen affinen Raum $\mathcal{E}_0^3$ (mit Standardskalarprodukt) sei E die Ebene, die die Punkte $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ enthält. Bestimmen Sie den Abstand von $D = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu E.

Aufgabe 2.5 Sei $(\mathfrak{V},\Phi)$ ein unitärer Vektorraum, $f \in \mathrm{End}(\mathfrak{V}), \mathfrak{U} \leq \mathfrak{V}$ ein Unterraum und $\mathfrak{U}^\perp$ der Orthogonalraum. Zeigen Sie: $f(\mathfrak{U}) \subseteq \mathfrak{U}$ genau dann, wenn $f^{ad}(\mathfrak{U}^\perp) \subseteq \mathfrak{U}^\perp$.

Aufgabe 2.6 Gegeben seien die affinen Räume $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{n\times 1})$ und $\mathcal{A}_0(\mathbb{R})$ sowie eine affine Abbildung $f : \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{n\times 1}) \to \mathcal{A}_0(\mathbb{R})$. Zeigen Sie: $\mathcal{A} := \{P \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{n\times 1}) | f(P) = 0\}$ ist entweder leer oder ein affiner Unterraum von $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{n\times 1})$.

Aufgabe 2.7 Die Gruppe G operiere (von links) auf der Menge M. Zeigen Sie, dass für alle $g \in G$ und $m \in M$ gilt: $\mathrm{Stab}_G(gm) = g\mathrm{Stab}_G(m)g^{-1}$.

Aufgabe 2.8 Im Vektorraum $\mathbb{R}^{3\times 1}$ sei die Standardbasis S eine ON-Basis. Bestimmen Sie eine ON-Basis aus Eigenvektoren des Endomorphismus f von $\mathbb{R}^{3\times 1}$ mit ${}^S f^S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.3 Scheinklausur am 8. 7. 1996 (90 Min.)

Aufgabe 3.1 Bestimmen Sie die JORDAN-Normalform von $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.2 Die Gruppe $G := \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} | \det(A) \neq 0\}$ operiere auf der Menge $M := \{X \in \mathbb{C}^{2\times 2} | X^\star = X\}$ vermöge $(A,X) \mapsto A^\star \cdot X \cdot A$. Bestimmen Sie die Anzahl der Bahnen.

Aufgabe 3.3 Bestimmen Sie eine Matrix $X \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ mit $X^2 = \begin{pmatrix} 3 & i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.4 Sei S die Standardbasis vom $\mathbb{R}^{2\times 1}$ und Φ, Ψ Bilinearformen mit ${}_S\Phi^S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ und ${}_S\Psi^S = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathbb{R}^{2\times 1}$, so dass für $X = x_1B_1 + x_2B_2 \in \mathbb{R}^{2\times 1}$ gilt: $\Phi(X,X) = x_1^2 + x_2^2$ und $\Psi(X,X) = c_1x_1^2 + c_2x_2^2$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3.5 Sei $(\mathcal{A},\mathfrak{V},\tau)$ ein affiner Raum, $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine affine Abbildung und $P,Q \in \mathcal{A}$ Fixpunkte unter f. Zeigen Sie *ohne* Benutzung eines Koordinatensystems: Jeder Punkt der Geraden durch P und Q ist Fixpunkt unter f.

Aufgabe 3.6 Bezüglich eines affinen Koordinatensystems eines 3-dimensionalen affines Raumes sei $Q := \mathrm{Null}(x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2)$ eine Quadrik. Bestimmen Sie eine Koordinatentransformation von $\mathcal{A}$, die Q auf affine Normalform transformiert.

1.4 Scheinklausur am 11. 10. 1996 (90 Min.)

Aufgabe 4.1 Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Existiert eine Matrix $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $\det(T) \neq 0$, so dass für $B = T^{-1}AT$ gilt:

(a) $B_{ij} = 0$ für $i < j$?

(b) $B_{ij} = 0$ für $i \neq j$?

Aufgabe 4.2 Sei B eine Basis des $\mathbb{C}-$Vektorraums $\mathfrak{V}$ mit HERMITE'scher Sesquilinearform, bezüglich dieser ${}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ist. Bestimmen Sie eine Basis C von $\mathfrak{V}$, bezüglich der die GRAMmatrix von Φ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 4.3 Im EUKLID'ischen affinen Raum $\mathcal{E}_0^3$ (mit Standardskalarprodukt) sei $\mathcal{U}$ der durch $\mathrm{Null}(2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2)$ beschriebene Unterraum. Bestimmen Sie drei Punkte aus $\mathcal{U}$, die ein rechtwinkliges Dreieck bilden.

Aufgabe 4.4 Im EUKLID'ischen affinen Raum $\mathcal{E}$ mit Translationsraum $(\mathfrak{V}, \Phi)$ sei $X : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2 : P \mapsto \begin{pmatrix} X_1(P) \\ X_2(P) \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Isometrie. Bestimmen Sie die metrische Hauptachsentransformation der Quadrik $Q := \mathrm{Null}(4X_1^2 - 10X_1X_2 + 4X_2^2 + 14X_1 - 4X_2 - 8)$.

Aufgabe 4.5 Im EUKLID'ischen affinen Raum $\mathcal{E}$ mit Translationsraum $(\mathfrak{V}, \Phi)$ sei bezüglich eines orthogonalen Koordinatensystems X eine Ebene E als $\mathrm{Null}(X_1 + 2X_2 + 3X_3 - 4)$ und $P := X^{-1}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}) \in \mathcal{E}$ gegeben. Bestimmen Sie den Winkel zwischen einem Normalenvektor von E und dem Ortsvektor von P.

Aufgabe 4.6 Im EUKLID'ischen affinen Raum $\mathcal{E}$ mit Translationsraum $(\mathfrak{V}, \Phi)$ seien bezüglich eines orthogonalen Koordinatensystems die Punkte A, B und C mit Koordinaten $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ gegeben. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Geraden durch A und B.

1.5 Scheinklausur am 21. 7. 2001 (150 Min.)

Aufgabe 5.1 Geben Sie alle JORDAN-Normalformen $J \in \mathbb{R}^{7\times 7}$ an, so dass für das charakteristische Polynom gilt: $\chi(J) = (x^2+1)^2 x^3$. Wie lauten in diesen Fällen die Minimalpolynome?

Aufgabe 5.2 Sei $\mathcal{A} := \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ und seien $\mathcal{A}_1 := \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{A}_2 := \mathrm{Null}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 1)$. Zeigen Sie: $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ sind affine Unterräume von $\mathcal{A}$ und berechnen Sie die affinen Dimensionen von $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ und $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \rangle_a$.

Aufgabe 5.3 Sei $\widetilde{\mathfrak{V}}$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über $K := \mathbb{F}_5$ mit Basis B. Betrachten Sie den projektiven Raum $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\widetilde{\mathfrak{V}})$ und $P_1 := K^\star(2B_1 + 2B_2 + 2B_3 + 4B_4), P_2 := K^\star(2B_1 + B_2 + 4B_3 + 2B_4), P_3 := K^\star(2B_2 + B_3 + 4B_4), P_4 := K^\star(3B_1 + 2B_2 + 4B_4)$. Berechnen Sie das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Aufgabe 5.4 Sei $\mathfrak{V} = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Bestimmen Sie alle $f \in \mathfrak{V}$, so dass $D^3 f + 2D^2 f + Df = 0$, wobei D die gewöhnliche Ableitung bezeichne.

Aufgabe 5.5 Seien $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ endlich erzeugte $\mathbb{F}_7-$Vektorräume mit Basen B und C. Bestimmen Sie den Tensorrang von $X := B_1 \otimes (5C_1 + 5C_2 + 3C_3) + B_2 \otimes (C_1 + 2C_2 + 4C_4) + B_3 \otimes (5C_1 + 6C_3 + C_4) \in \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$.

Aufgabe 5.6 Seien $\mathfrak{V} = \mathbb{F}_3^4$ und $B = (\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\end{pmatrix}), C = (\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\2\end{pmatrix})$ Basen von $\mathfrak{V}$. Bestimmen Sie eine Basis D von $\mathfrak{V}$ und eine Permutation $\sigma \in S_4$, so dass für die Fahnen $F(D) = F(B)$ und $F(D \circ \sigma) = F(C)$ gilt.

Aufgabe 5.7 Sei $\mathcal{E}$ ein Euklid'ischer affiner Raum mit Translationsraum $(\mathfrak{V}, \Phi)$. Weiter sei B eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{V}$ und $P \in \mathcal{E}$ ein Punkt. Definiert seien die Geraden $\mathcal{E}' := \{P + B_1 + B_2 + a(B_1 + B_2 + B_3 + B_4) | a \in \mathbb{R}\}$ und $\mathcal{E}'' := \{P + B_3 + a(B_1 - B_2) | a \in \mathbb{R}\}$. Berechnen Sie $d(\mathcal{E}', \mathcal{E}'')$.

Aufgabe 5.8 Sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}_3$ ein Euklid'ischer Vektorraum und $Q := \mathrm{Null}(2x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2 - 3)$ eine Quadrik. Bestimmen Sie die Tangenten an Q in jedem Punkt von Q.

Aufgabe 5.9 Sei $\mathcal{E} = \mathcal{E}_3$ der 3-dimensionale Euklid'ische affine Raum und $Q := \mathrm{Null}(3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 + 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - \frac{2}{5})$ eine Quadrik in $\mathcal{E}$. Bestimmen Sie die Euklid'ische und affine Normalform von Q.

Aufgabe 5.10 Sei $\mathfrak{V}$ ein $\mathbb{C}-$Vektorraum mit Hermite'schem Skalarprodukt Φ und $\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$ normal.

(a) Zeigen Sie: Ist $V \in \mathfrak{V}$ ein Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ, so ist V ein Eigenvektor von φ^{ad} zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

(b) Zeigen Sie: Ist $V \in \mathfrak{V}$ ein Eigenvektor von φ, so ist $\langle V \rangle^\perp$ $\varphi-$invariant, d. h. $\varphi(\langle V \rangle^\perp) \leq \langle V \rangle^\perp$.

(c) Formulieren und beweisen Sie den komplexen Spektralsatz.

Aufgabe 5.11 Sei G eine Gruppe, die auf der Menge M transitiv operiert. Weiter sei $m \in M$ und $S := \mathrm{Stab}_G(m)$. Zeigen Sie: Die Bahnen von G auf $M \times M$ bei der üblichen diagonalen Operation stehen in Bijektion zu den Bahnen von S auf M.

1.6 Scheinklausur am 19. 7. 2005 (150 Min.)

Aufgabe 6.1 (8 Punkte) Bestimme die Jordan-Normalform einer Matrix $A \in K^{3\times 3}$ mit $\mu(A) = x^3 - 2 \in K[x]$ für $K \in \{\mathbb{F}_3, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Aufgabe 6.2 (1+1+3 Punkte) Betrachte die folgenden affinen Unterräume von $\mathcal{A}_4(\mathbb{R})$:

$$\mathcal{A}_1 := \langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\-1\\0\\1\end{pmatrix} \rangle_a,\ \mathcal{A}_2 := \{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\1\end{pmatrix} \in \mathcal{A}_4(\mathbb{R}) | \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 & = & -1 \end{array} \}.$$

Bestimme $\dim(\mathcal{A}_1), \dim(\mathcal{A}_2)$ und $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

Aufgabe 6.3 (4 Punkte) Sei $\widetilde{\mathfrak{V}}$ ein endlichdimensionaler Vektorraum über $K := \mathbb{F}_3$ mit Basis B. Betrachte den projektiven Raum $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\widetilde{\mathfrak{V}})$ und $P_1 := K^\star(B_1 + B_2 + B_3), P_2 := K^\star(B_1 + B_2 + 2B_4), P_3 := K^\star(2B_1 + 2B_2 + B_3 + 2B_4), P_4 := K^\star(B_3 + B_4)$. Berechne das Doppelverhältnis $\mathrm{DV}(P_1, P_2, P_3, P_4)$.

Aufgabe 6.4 (5 Punkte) Sei $\mathfrak{V} = C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Bestimme alle $f \in \mathfrak{V}$ mit $f''' = -3f'' + 4f$.

Aufgabe 6.5 (4 Punkte) Seien $\mathfrak{V}, \mathfrak{W}$ endlich erzeugte $\mathbb{F}_3$-Vektorräume mit Basen B und C. Bestimme den Tensorrang von $X := B_1 \otimes (2C_1 + C_2 + C_4) + B_2 \otimes (C_1 + C_2 + C_3) + (B_3 + B_4) \otimes (2C_2 + C_3 + C_4) \in \mathfrak{V} \otimes \mathfrak{W}$.

Aufgabe 6.6 (4 Punkte) Sei $N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$. Bestimme Matrizen $L, P, U \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ mit $LPU = N$; dabei ist L eine untere Dreiecksmatrix, P eine Permutationsmatrix und U eine obere Dreiecksmatrix.

Aufgabe 6.7 (1+1+3 Punkte) Sei $\mathcal{E} := \mathcal{E}_3$ der 3-dimensionale EUKLID'ische affine Raum mit dem Standardskalarprodukt. Seien $\mathcal{E}^i$ die folgenden affinen Unterräume von $\mathcal{E}$ mit

$$H := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} | x_1 + x_2 + x_3 = 1 \},\ G := \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_a.$$

Berechne $\dim(H), \dim(G)$ und $d(H,G)$.

Aufgabe 6.8 (3+1 Punkte) Sei $\mathcal{A} := \mathcal{A}_2(\mathbb{Q})$ der 3-dimensionale affine Raum über $\mathbb{Q}$ und $N := \mathrm{Null}(2xy^2 + x^2 + 4xy - 3y^2 - 6y - 2)$. Bestimme die Tangentengleichungen an N im Punkt $P := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in N$. Ist der Punkt $P \in N$ regulär?

Aufgabe 6.9 (5 Punkte) Bestimme die affine Normalform der reellen Quadrik, die durch die Nullstellenmenge des Polynoms $p = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_1x_3 + 2x_3^2 - x_1 + x_3 + 2$ gegeben ist.

Aufgabe 6.10 (4 Punkte) Beweise: In einer projektiven Ebene über dem Körper K schneiden sich zwei verschiedene Geraden in genau einem Punkt.

Aufgabe 6.11 (5 Punkte) Sei G eine Gruppe, die auf der Menge M operiert. Weiter sei $m \in M$ und $S := \mathrm{Stab}_G(m)$. Zeige: Die Bahnen von G auf $Gm \times M$ bei der üblichen diagonalen Operation stehen in Bijektion zu den Bahnen von S auf M.

Aufgabe 6.12 (4 Punkte) Bestimme das Minimalpolynom von $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, wobei $\otimes$ das KRONECKER-Produkt von Matrizen ist.

Aufgabe 6.13 (4 Punkte) Sei $\mathfrak{V}$ ein 4-dimensionaler $\mathbb{Q}$-Vektorraum mit Basis B und $\mathfrak{U}$ ein 2-dimensionaler Teilraum. Nach Definition werden die PLÜCKER-Koordinaten von $\mathfrak{U}$ beschrieben durch homogene Koordinaten im 5-dimensionalen projektiven Raum: $(a_{1,2} : a_{1,3} : a_{1,4} : a_{2,3} : a_{2,4} : a_{3,4})$. Genauer: $\mathfrak{U} = \langle \Sigma a_i B_i, \Sigma b_j B_j \rangle \mapsto ((a_1 b_2 - a_2 b_1) : \cdots : (a_3 b_4 - a_4 b_3))$.
Bestimme den 2-dimensionalen Teilraum $\mathfrak{U}$ des 4-dimensionalen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ mit den PLÜCKER-Koordinaten $(a_{1,2} : a_{1,3} : a_{1,4} : a_{2,3} : a_{2,4} : a_{3,4}) = (2 : 6 : 4 : 2 : 8 : 20)$ bezüglich der Basis B.

2 Lösungsvorschläge

2.1 Scheinklausur am 8. 7. 1988

Aufgabe 1.1 Es ist $\chi_{\overline{A}}(x) = \det(\begin{pmatrix} x-\frac{17}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{6}{5} & x-\frac{8}{5} \end{pmatrix}) = (x-1)(x-4)$. Die Eigenräume zu den Eigenwerten 1 und 4 sind: $E_{\overline{A}}(1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rangle, E_{\overline{A}}(4) = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Mit S als Standardbasis und $E = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix})$ als Eigenvektorbasis ist ${}^S id^E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ bzw. ${}^E id^S = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Wähle also $X := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.2 Es ist $\chi_f(x) = \det(\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ 1 & x+1 \end{pmatrix}) = (x-i)(x+i)$. Die Eigenräume zu den Eigenwerten i und $-i$ sind: $E_f(i) = \langle {}^B\begin{pmatrix} -2 \\ 1-i \end{pmatrix} \rangle = \langle -2B_1 + (1-i)B_2 \rangle, E_f(-i) = \langle {}^B\begin{pmatrix} -2 \\ 1+i \end{pmatrix} \rangle = \langle -2B_1 + (1+i)B_2 \rangle$.

Aufgabe 1.3 Gekoppelte Spalten-Zeilen-Umformungen im linken Feld und simultane Spaltenumformungen im rechten Feld liefern: $\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & i & 1 & 0 \\ -i & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$. Setze $B := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $B^{\star}AB = I_2$.

Aufgabe 1.4 Die Gerade ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \overrightarrow{PQ} \rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \rangle$. Konstruiere also ein LGS mit partieller Lösung $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, dessen homogenes Gleichungssystem $\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \rangle$ als Lösungsraum hat. Zunächst betrachten wir nur das homogene Gleichungssystem, wobei wir den GAUSS-Algorithmus rückwärts anwenden: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3p \\ 0 & 1 & 0 & p \\ 0 & 0 & 1 & -6p \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & p \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{array} \right)$. Bringe nun partielle Lösung ins Spiel, indem die (inhomogenen) Konstanten entsprechend gewählt werden: Wegen $1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 5$ und $0 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 3 = 9$ ist ein gesuchtes LGS: $\begin{array}{rl} & x_1 + 3x_2 = 5 \\ \wedge & \phantom{x_1+{}} 6x_2 + x_3 = 9 \end{array}$.

Aufgabe 1.5 Suche $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rl} & A_{11}x + A_{12}y + A_{13} = x+1 \\ \wedge & A_{21}x + A_{22}y + A_{33} = 0 \\ \wedge & A_{31}x + A_{22}y + A_{33} = 1 \end{array}$. Wähle also $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 1.6 Seien $P, Q \in E$. Dann ist $X(P) = X(P_0 + \overrightarrow{P_0P}) = X(P_0) + \overline{X}(\overrightarrow{P_0P}) = {}^B\overrightarrow{P_0P}$. Entsprechend ist $X(Q) = {}^B\overrightarrow{P_0Q}$. Da P und Q in der Ebene E liegen, ist ferner $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot {}^B\overrightarrow{P_0P} = 0$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot {}^B\overrightarrow{P_0Q} = 0$. Wegen $\overrightarrow{P_0Q} - \overrightarrow{P_0P} = \overrightarrow{PQ}$ ist auch $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot {}^B\overrightarrow{PQ} = 0$. Insbesondere ist für alle $P, Q \in E$: $\Phi_S(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, {}^B\overrightarrow{PQ}) = 0$, wobei

Φ_S das Standardskalarprodukt des $\mathcal{E}_0^3$ ist. Weil X eine Isometrie ist, gilt auch $\Phi(\overline{X}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \overrightarrow{PQ}) = 0$ für alle $P, Q \in E$. Wähle also $V := \overline{X}^{-1}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = B_1 + 2B_2 + 3B_3 = \overrightarrow{P_0P_1} + 2\overrightarrow{P_0P_2} + 3\overrightarrow{P_0P_3}$.

Aufgabe 1.7 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ durch gekoppelte Spalten-Zeilen-Umformungen. Also ist die affine Normalform: $x_1^2 - x_2^2 + 2x_3$.

Aufgabe 1.8 Das Polynom hat den quadratischen Anteil $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Diese Matrix besitzt als ON-Basis aus Eigenvektoren: $(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$. Die erste Isometrie transformiert auf:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt verwenden wir wieder die Spalten-Zeilen-Umformungsschreibweise, wobei von nun an nur noch Translationen verwendet werden dürfen, d. h. Additionen der ersten Spalten auf die letzte Spalte (mit anschließender Zeilenumformung):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{4} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Durch die Isometrie $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 - \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ geht $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y + 1$ in $2x_1^2 + 2\sqrt{2}x_2$ über.
Also ist $\mathrm{Null}(x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 2y + 1) = \mathrm{Null}(2x_1^2 + 2\sqrt{2}x_2) = \mathrm{Null}(\sqrt{2}x_1^2 + 2x_2) = \mathrm{Null}((\frac{x_1}{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}})^2 + 2x_2)$.
Die EUKLID'ische Normalform ist also: $(\frac{x_1}{\frac{1}{\sqrt[4]{2}}})^2 + 2x_2$.

2.2 Scheinklausur am 13. 7. 1992

Aufgabe 2.1 Gekoppelte Spalten-Zeilen-Umformungen werden zum Umformen von GRAMmatrizen verwendet:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -i & 2 & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & i & -2 \\ 0 & -1 & 1-2i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1+2i & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & i & i \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1-2i \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & i & \frac{1}{\sqrt{2}}i \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}i & i \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}i & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{array}\right).$$

Es ist also $(B_1, \frac{1}{\sqrt{2}}iB_1 + (\frac{1}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}i)B_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}B_3, iB_1 + B_2)$ eine OG-Basis bezüglich Φ.

Aufgabe 2.2 Offenbar ist $\mathfrak{U}^{\perp}$ 1-dimensional und $\begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix} \in \mathfrak{U}^{\perp}$. Also ist $\mathfrak{U}^{\perp} = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix} \rangle$. Die Länge dieses Vektors ist $(1,0,i)\begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix} = 2$, also ist $(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix})$ eine ON-Basis von $\mathfrak{U}^{\perp}$. Zur orthogonalen Projektion

Z von X in $\mathfrak{U}^\perp$ berechnen wir die FOURIERkoeffizienten (Beachte: Die Reihenfolge der Vektoren, die in Φ eingesetzt werden, ist im Komplexen wichtig, da Φ nicht symmetrisch ist! Man gehe den Beweis vom Skript aus Lineare Algebra I wörtlich durch, dann sieht man, dass man beim Vertauschen der Vektoren bei HERMITE'schen Sesquilinearformen immer die konjugierte Koordinate erhalten würde.): $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,i)\begin{pmatrix}2\\1\\1+i\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\\1\\\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\end{pmatrix}, Y = X - Z = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}-\frac{1}{2}i\\1\\\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\end{pmatrix}$. Dann ist nämlich $X = Y + Z, Y \in \mathfrak{U}, Z \in \mathfrak{U}^\perp$.

Aufgabe 2.3 Die Operation entspricht einer Basistransformation von $\overline{A}$. Suche also $r,s \in \mathbb{R}$, so dass eine Basis J existiert mit ${}^J\overline{A}^J = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&r&s\end{pmatrix}$. Berechne erst JORDAN-Normalform von $\overline{A}$: $\mu_{\overline{A}}(x) = (x-1)(x^2+x+2)$. Also ist die $J_A := \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-2\\0&1&-1\end{pmatrix}$ die JORDAN-Normalform von $\overline{A}$. Insbesondere liegen A und J_A in einer Bahn. Wähle nun $r := -2, s := 1$. Dann stimmt die JORDAN-Normalform J_A mit der von $B = \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-2&-1\end{pmatrix}$ überein, da $\mu_B(x) = (x-1)(x^2+x+2)$. Also liegen J_A und B und somit auch A und B für $r = -2$ und $s = 1$ in einer Bahn.

Aufgabe 2.4 Es ist $\mathfrak{T}(E) = \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \rangle, \mathfrak{T}(E)^\perp = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$. Gesucht ist die Länge von $V \in \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle, V = \overrightarrow{DP}, P \in E$, d. h. P Schnittpunkt von $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle$ mit E. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem. Man erhält schließlich: $P = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}, |V| = \sqrt{3}$, also ist der gesuchte Abstand von D zu E gleich $\sqrt{3}$.

Aufgabe 2.5 $f^{ad}(\mathfrak{U}^\perp) \subseteq \mathfrak{U}^\perp \Leftrightarrow \forall V \in \mathfrak{U}^\perp : f^{ad}(V) \in \mathfrak{U}^\perp \Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U} \forall V \in \mathfrak{U}^\perp : \Phi(f^{ad}(V),U) = 0 \Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U} \forall V \in \mathfrak{U}^\perp : \Phi(V,f(U)) = 0 \Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{U} : f(U) \in (\mathfrak{U}^\perp)^\perp = \mathfrak{U} \Leftrightarrow f(\mathfrak{U}) \subseteq \mathfrak{U}$.

Aufgabe 2.6 Sei $\overline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ der lineare Anteil von f. Dann gibt es eine Matrix $A = (a_1,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{1\times n}$ mit $\overline{f}(\begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}) = A \cdot \begin{pmatrix}v_1\\\vdots\\v_n\end{pmatrix} = a_1v_1 + \dots + a_nv_n$. Sei nun $P = \begin{pmatrix}p_1\\\vdots\\p_n\end{pmatrix} \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{n\times 1})$ beliebig. Da f affin, ist $f(P) = f(\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}p_1\\\vdots\\p_n\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}) + \overline{f}(\begin{pmatrix}p_1\\\vdots\\p_n\end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}) + a_1p_1 + \dots + a_np_n$. Mit $c := -f(\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix})$ haben wir $\begin{pmatrix}p_1\\\vdots\\p_n\end{pmatrix} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow a_1p_1 + \cdots a_np_n = c$, d. h. $\mathcal{A} = \{\begin{pmatrix}p_1\\\vdots\\p_n\end{pmatrix} \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{n\times 1}) | a_1p_1 + \dots + a_np_n = c\}$. Nun wissen wir, dass $\mathcal{A}$ als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems, falls dieses nicht unlösbar ist, als $\mathcal{A} = P^\star + \mathfrak{U}$ mit einer partiellen Lösung $P^\star \in \mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{n\times 1})$ und einem Teilraum $\mathfrak{U} \leq \mathbb{R}^{n\times 1}$, der die Lösungsmenge des dazugehörigen homogenen Gleichungssystems ist, geschrieben werden kann. Also ist $\mathcal{A}$ ein affiner Unterraum von $\mathcal{A}_0(\mathbb{R}^{n\times 1})$ mit Translationsraum $\mathfrak{T}(\mathcal{A}) = \mathfrak{U}$.

Aufgabe 2.7 Die Aussage wird durch doppelte Mengeninklusion bewiesen:

„$\subseteq$“: Sei $s \in \mathrm{Stab}_G(gm)$. Definiere $s^\star := g^{-1}sg$. Dann ist $s = gs^\star g^{-1}$ und $s^\star m = g^{-1}sgm = g^{-1}gm = m$, also $s \in g\mathrm{Stab}_G(m)g^{-1}$.

„$\supseteq$“: Sei $s = gs^\star g^{-1}$ mit $s^\star \in \mathrm{Stab}_G(m)$. Dann ist $s(gm) = gs^\star g^{-1}gm = gs^\star m = gm$, also $s \in \mathrm{Stab}_G(gm)$.

Aufgabe 2.8 Es ist $E_f(5) = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \rangle, E_f(-1) = \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} \rangle$. Da die Standardbasis eine Orthonormalbasis ist, handelt es sich beim Skalarprodukt um das Standardskalarprodukt. Orthogonalisiert man $E_f(-1)$ mit GRAM-SCHMIDT, erhält man durch Normieren eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren von f: $(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix})$.

2.3 Scheinklausur am 8. 7. 1996

Aufgabe 3.1 Es ist $\mu_A(x) = (x-1)(x-3)^2 (= \chi_A(x))$. Also ist $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&1&3\end{pmatrix}$ die JORDAN-Normalform.

Aufgabe 3.2 Die angegebene Operation beschreibt die Basistransformation auf der Menge M der GRAMmatrizen von HERMITE'schen Sesquilinearformen. Nach dem SYLVESTER'schen Trägheitssatz, der auch bezüglich dieser Operation „im Komplexen“ gilt, ist die Signatur eine trennende Invariante dieser Operation.

$+$	$-$	0
2	0	0
1	1	0
1	0	1
0	2	0
0	1	1
0	0	2

Es gibt genau 6 verschiedene Signaturen, also auch genau 6 Bahnen.

Aufgabe 3.3 Es ist $\mu_{X^2}(x) = (x-2)(x-4), E_{X^2}(2) = \langle \begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \rangle, E_{X^2}(4) = \langle \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} \rangle$. Mit $E := (\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix})$ ist also ${}^E X^{2E} = \begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$. Setze $A := \begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&2\end{pmatrix}$. Mit S als Standardbasis wähle man schließlich: $X := {}^S id^E \cdot A \cdot {}^E id^S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\i&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-i\\1&i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\frac{1}{\sqrt{2}} & (1-\frac{1}{\sqrt{2}})i\\ (-1+\frac{1}{\sqrt{2}})i & 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

Aufgabe 3.4 Suche Vektoren $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x^\star\\y^\star\end{pmatrix}$, die bezüglich Φ *und* Ψ orthogonal sind! $\Phi(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x^\star\\y^\star\end{pmatrix}) = 0 \Leftrightarrow x(x^\star + y^\star) + y(x^\star + 2y^\star) = 0; \Psi(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x^\star\\y^\star\end{pmatrix}) = 0 \Leftrightarrow x(2x^\star + 3y^\star) + y(3x^\star + 6y^\star) = 0$. Suche also Vektoren $\neq \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ mit $\begin{array}{ccccc} & (x+y)x^\star & + & (x+2y)y^\star & = 0\\ \wedge & (2x+3y)x^\star & + & (3x+6y)y^\star & = 0\end{array}$. Dieses homogene Gleichungssystem ist genau dann nicht-trivial lösbar, falls die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet (gleich 0 ist). Es ist $\det(\begin{pmatrix}x+y & x+2y\\2x+3y & 3x+6y\end{pmatrix}) = \det(\begin{pmatrix}x & y\\x & x+3y\end{pmatrix})$. Die Determinante verschwindet also genau dann, falls $y = x+3y$. Setze also (z. B.) x = 2 und y = -1. Dann hat das Gleichungssystem (nach $x^\star, y^\star$) nichttriviale Lösungen, z. B. $x^\star = 0, y^\star = 1$. Wir haben also $(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$ als OG-Basis bezüglich Φ und Ψ. Normiere diese Basis bezüglich Φ:

$\Phi(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}) = 2$ sowie $\Phi(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = 2$. Setze $B := (\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix})$. Dann ist ${}_B\Phi^B = I_2$ und ${}_B\Psi^B = \begin{pmatrix}\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Also haben wir dann $c_1 = 1, c_2 = 3$.

Aufgabe 3.5 Sei $S := P+\lambda\overrightarrow{PQ}, \lambda \in K$. Da f affin, gilt: $\overrightarrow{f(P)f(S)} = \overline{f}(\overrightarrow{PS}) = \overline{f}(\overrightarrow{P(P+\lambda\overrightarrow{PQ})} = \overline{f}(\lambda\overrightarrow{PQ}) = \lambda\overline{f}(\overrightarrow{PQ}) = \lambda\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \lambda\overrightarrow{PQ}$. Also ist: $f(S) = f(P)+\lambda\overrightarrow{PQ} = P+\lambda\overrightarrow{PQ} = S$.

Aufgabe 3.6 Verwende Spalten-Zeilen-Umformungen:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & \frac{1}{2} & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -2 & -4 & 1 & 2 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -4 & 3 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -3 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 & 4\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 5 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & 4\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0\\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{2}{5} & \frac{14}{5}\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$, also durch die Affinität $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1' - x_2' + \frac{2}{5}x_3' + \frac{14}{5}\\ x_1' + x_2' - 2\\ \frac{1}{5}x_3' - \frac{3}{5}\end{pmatrix}$ geht $x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2$ in $x_1'^2 - x_2'^2 + 2x_3'$ über.
Also lautet die affine Normalform: $x_1^2 - x_2^2 + 2x_3$.

2.4 Scheinklausur am 11. 10. 1996

Aufgabe 4.1 Anwenden von T kann als Basistransformation für $\overline{A}$ interpretiert werden. Es ist $\mu_A(x) = \chi_A(x) = (x-2)^2$.

(a) Setze $B_{11} = 2, B_{21} = 1, B_{22} = 2$. Dann ist B die JORDAN-Normalform von A, also existiert ein solches T.

(b) Ein gefordertes T kann es nur dann geben, wenn A diagonalisierbar ist. Dann müsste aber das Minimalpolynom von A in Linearfaktoren der Vielfachheit 1 zerfallen, was nicht der Fall ist. Also gibt es kein solches T.

Aufgabe 4.2 Bestimme mittels Spalten-Zeilen-Umformungen eine Orthogonalbasis C:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -i & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ i & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & i\\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}i\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right).$$

Mit $C := (B_1, \frac{1}{\sqrt{2}}B_2, \frac{1}{\sqrt{3}}iB_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}B_3)$ ist ${}_C\Phi^C = I_3$.

Aufgabe 4.3 $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix} \in \mathfrak{U}$, also $\mathfrak{U} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} \rangle, \mathfrak{T}(\mathfrak{U}) = \langle \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} \rangle$. Orthogonalisiere $\mathfrak{T}(\mathfrak{U})$ z. B. mit GRAM-SCHMIDT. Dann erhält man als Orthogonalbasis von $\mathfrak{T}(\mathfrak{U})$: $(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{12}{5}\\-\frac{6}{5}\\-2\end{pmatrix})$.

Also bilden $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{17}{5}\\-\frac{6}{5}\\-2\end{pmatrix}$ ein rechtwinkliges Dreieck in $\mathfrak{U}$.

Aufgabe 4.4 Das Polynom hat den quadratischen Anteil $\begin{pmatrix}4 & -5\\-5 & 4\end{pmatrix}$. Diese Matrix besitzt als ON-Basis aus Eigenvektoren: $(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$. Die erste Isometrie transformiert auf:

$$\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix}4 & -5 & 7\\ -5 & 4 & -2\\ 7 & -2 & -8\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9 & 0 & \frac{9}{\sqrt{2}}\\ 0 & -1 & \frac{5}{\sqrt{2}}\\ \frac{9}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & -8\end{pmatrix}.$$

Jetzt verwenden wir wieder die Spalten-Zeilen-Umformungsschreibweise, wobei von nun an nur noch Translationen verwendet werden dürfen, d. h. Additionen der ersten Spalten auf die letzte Spalte (mit anschließender Zeilenumformung):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}9 & 0 & \frac{9}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & -1 & \frac{5}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{9}{\sqrt{2}} & \frac{5}{\sqrt{2}} & -8 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}9 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2\\ 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Durch die Isometrie $\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + 2\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2 + 3\end{pmatrix}$ geht $4X_1^2 - 10X_1X_2 + 4X_2^2 + 14X_1 - 4X_2 - 8$ in $9x_1^2 - x_2^2$ über. Also ist $Q = \mathrm{Null}(9x_1^2 - x_2^2) = \mathrm{Null}((\frac{x_1}{\frac{1}{3}})^2 - x_2^2)$.

Die EUKLID'ische Normalform ist also: $(\frac{x_1}{\frac{1}{3}})^2 - x_2^2$.

Aufgabe 4.5 Isometrien verändern keine Längen und Winkel. Daher verwenden wir zur Berechnung ausschließlich die Koordinaten: Mit $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ als Normalenvektor von E bzw. Ortsvektor von P ist der gesuchte Winkel α gegeben durch $\alpha = \arccos\frac{\Phi_S(\overrightarrow{n_E}, \overrightarrow{p})}{|\overrightarrow{n_E}|\cdot|\overrightarrow{p}|} = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$, wobei Φ_S im $\mathcal{E}_0^3$ das Standardskalarprodukt und $|.|$ die dazugehörige Norm ist.

Aufgabe 4.6 Isometrien verändern keine Längen und Winkel. Daher identifizieren wir alle Punkte mit ihren Koordinaten: Die Gerade G durch A und B ist gegeben durch $G = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix} \rangle$. Es ist $\mathfrak{T}(G)^\perp = \langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$. Gesucht ist die Länge von $V \in \mathfrak{T}(G)^\perp, V = \overrightarrow{CP}, P \in G$, d. h. P ist Schnittpunkt von $\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{4}{5}\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \rangle$ mit G. Das resultierende lineare Gleichungssystem führt schließlich zu $P = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\0\end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}\end{pmatrix}, |V| = \frac{6}{5}$, also ist der Abstand von C zu G gleich $\frac{6}{5}$.

2.5 Scheinklausur am 21. 7. 2001

Aufgabe 5.1

Minimalpolynom	Partitionen	JORDAN-Normalform
$(x^2+1)x$	$(1,1),(1,1,1)$	$\mathrm{Diag}(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0, 0)$
$(x^2+1)^2x$	$(2),(1,1,1)$	$\mathrm{Diag}(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, 0, 0, 0)$
$(x^2+1)x^2$	$(1,1),(2,1)$	$\mathrm{Diag}(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0)$
$(x^2+1)^2x^2$	$(2),(2,1)$	$\mathrm{Diag}(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0)$
$(x^2+1)x^3$	$(1,1),(3)$	$\mathrm{Diag}(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$
$(x^2+1)^2x^3$	$(2),(3)$	$\mathrm{Diag}(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix})$

Aufgabe 5.2 Offenbar $\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathcal{A}$, also $\mathcal{A}_1$ affiner Teilraum von $\mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ mit $\mathfrak{T}(\mathcal{A}_1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$, wobei $\dim(\mathcal{A}_1) = \dim(\mathfrak{T}(\mathcal{A}_1)) = 2$. $\mathcal{A}_2$ ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $x_1+x_2+x_3+x_4 = -1$, nämlich $\mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathcal{A}$ und $\mathfrak{T}(\mathcal{A}_2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$. Also ist $\mathcal{A}_2$ affiner Teilraum von $\mathcal{A}_4(\mathbb{R})$ mit $\dim(\mathcal{A}_2) = \dim(\mathfrak{T}(\mathcal{A}_2)) = 3$. Ein Punkt P ist genau dann in $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$, falls es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $2 + 2a + 2b + 1 = 0$, d. h. $b = -\frac{3}{2} - a$. Also ist $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$ und $\dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2) = 1$. Da

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \notin \mathfrak{T}(\mathcal{A}_2)$, ist $\langle \mathfrak{T}(\mathcal{A}_1), \mathfrak{T}(\mathcal{A}_2)\rangle = \mathfrak{T}(\mathcal{A}_4(\mathbb{R}))$, was hinreichend (aber nicht notwendig) für das Aufspannen des gesamten affinen Raumes ist, d. h. $\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\rangle_a = \mathcal{A}_4(\mathbb{R})$. Also ist $\dim(\langle \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\rangle_a) = \dim(\mathcal{A}_4(\mathbb{R})) = 4$.

Aufgabe 5.3 Sei ein $\widetilde{\varphi} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{F}_5^{4\times 1}, \mathbb{F}_5^{2\times 1})$ mit $\widetilde{\varphi}(\begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}, \widetilde{\varphi}(\begin{pmatrix}2\\1\\4\\2\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}, \widetilde{\varphi}(\begin{pmatrix}0\\2\\1\\4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix}$ gegeben, wobei $a,b,c \in \mathbb{F}_5^\star$. Es ist aber $\begin{pmatrix}0\\2\\1\\4\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix} + 3\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\4\\2\end{pmatrix}$, also $\begin{pmatrix}c\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2a\\3b\end{pmatrix}$ bzw. $b = 4a$. Ferner sieht man: $\begin{pmatrix}3\\2\\0\\4\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\2\\4\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\4\\2\end{pmatrix}$, also $\widetilde{\varphi}(\begin{pmatrix}3\\2\\0\\4\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}3a\\4a\end{pmatrix}$. Man erhält schließlich: $\mathrm{DV}(P_1,P_2,P_3,P_4) = (3:4) = (1:3)$.

Aufgabe 5.4 $D^3f + 2D^2f + Df$ induziert das Polynom $x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$. Der Faktor x liefert Fundamentalsystem $\langle e^0\rangle = \langle 1\rangle$; die Faktoren $(x+1)^2$ liefern Fundamentalsystem $\langle e^{-x}, xe^{-x}\rangle$. Also sind alle Lösungen $f \in \mathfrak{V}$ gegeben durch $f \in \langle 1, e^{-x}, xe^{-x}\rangle$.

Aufgabe 5.5 Stelle Matrix $\iota(X)$ von X bezüglich (B_1,B_2,B_3) und (C_1,C_2,C_3,C_4) her: $\iota(X) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(5,5,3,0) + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(1,2,0,4) + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(5,0,6,1) = \begin{pmatrix}5&5&3&0\\1&2&0&4\\5&0&6&1\end{pmatrix}$. Dann braucht man nur noch den Rang dieser Matrix zu berechnen: $\mathrm{Tensorrang}(X) = \mathrm{Rang}(\iota(X)) = 2$.

Aufgabe 5.6 Zunächst berechne man ${}^B id^C = \begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&1&2&0\\0&1&2&1\\1&2&0&1\end{pmatrix}$. Führe nun modifizierten GAUSS-Algorithmus (von unten her nach rechts ausräumen) zur Bestimmung von D und σ durch: $\begin{pmatrix}2&1&1&1\\1&1&2&0\\0&1&2&1\\1&2&0&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2&0&1&2\\1&2&2&2\\0&1&2&1\\1&0&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2&0&1&2\\1&2&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2&0&1&1\\1&2&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$. Die Permutationsmatrix P von σ lautet $P = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}^{tr} = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}$, d. h. $\sigma = (4,3,2,1)$. Wähle nun D über ${}^B id^D = \begin{pmatrix}2&0&1&1\\1&2&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix}1&1&0&2\\0&1&2&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$. Wir erhalten als Basis $D = (B_1, B_1 + B_2, 2B_2 + B_3, 2B_1 + B_2 + B_4) = (\begin{pmatrix}2\\0\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix})$.

Aufgabe 5.7 Es ist $\mathcal{E}' = P +^B \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \langle^B \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle$ und $\mathcal{E}'' = P +^B \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \langle^B \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle$. Führe nun orthogonales Koordinatensystem X ein durch $X(P) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\overline{X}(^B \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}$. X ist eine Isometrie, da B eine Orthonormalbasis ist. Längen und Winkel übertragen sich, so dass wir nur noch den Abstand von $X(E') = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle$ zu $X(E'') = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle$ im $\mathcal{E}_0^4$ betrachten müssen. Wir wissen: Es gibt $P_1 \in X(E'), P_2 \in X(E'')$ mit $\overrightarrow{P_1P_2} \in \langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle^\perp \cap \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle^\perp$ und $|\overrightarrow{P_1P_2}| = d(X(E'),X(E'')) = d(E',E'')$. Zunächst sieht man: $\langle \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle^\perp \cap \langle \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}\rangle^\perp = \langle \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix}\rangle$. Aus dem Ansatz $P_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$ erhält man schließlich $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} = c \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\-2\\0\end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\\-2\end{pmatrix}$. Das resultierende lineare Gleichungssystem löst man auf und erhält: $\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3\\-3\\5\\1\end{pmatrix}$ und somit: $d(E',E'') = |\overrightarrow{P_1P_2}| = \frac{1}{2}\sqrt{11}$.

Aufgabe 5.8 Sei $P = \begin{pmatrix}a\\b\\c\\1\end{pmatrix} \in Q$. Entwickle Gleichung von Q nach P, d. h. setze vorübergehend $\widetilde{x} = x - a, \widetilde{y} = y - b, \widetilde{z} = z - c$, so dass $2x^2 + 2xy + 2y^2 + z^2 - 3 = 2(\widetilde{x}+a)^2 + 2(\widetilde{x}+a)(\widetilde{y}+b) + 2(\widetilde{y}+b)^2 + (\widetilde{z}+c)^2 - 3 = (2\widetilde{x}^2 + 2\widetilde{x}\widetilde{y} + 2\widetilde{y}^2 + \widetilde{z}^2) + ((4a+2b)\widetilde{x} + (2a+4b)\widetilde{y} + 2c\widetilde{z}) = (2(x-a)^2 + 2(x-a)(y-b) + 2(y-b)^2 + (z-c)^2) + ((4a+2b)(x-a) + (2a+4b)(y-b) + 2c(z-c))$, da aus $P \in Q$ folgt: $2a^2 + 2ab + 2b^2 + c^2 - 3 = 0$. Die Gerade $P + \langle \begin{pmatrix}r\\s\\t\\0\end{pmatrix}\rangle = \{ \begin{pmatrix}a+\lambda r\\b+\lambda s\\c+\lambda t\\1\end{pmatrix} | \lambda \in \mathbb{R}\}$ ist genau dann Tangente von Q in P, falls $(4a+2b)(x-a) + (2a+4b)(y-b) + 2c(z-c)$ für alle Punkte der Geraden, d. h. für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, verschwindet. Man erhält also: $(4a+2b)\lambda r + (2a+4b)\lambda s + 2c\lambda t = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}r\\s\\t\end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix}2a+4b\\-4a-2b\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2c\\0\\-4a-2b\end{pmatrix}\rangle$. Also sind durch $T = P + \langle \begin{pmatrix}r\\s\\t\\0\end{pmatrix}\rangle$ mit $\begin{pmatrix}r\\s\\t\end{pmatrix} \in \langle \begin{pmatrix}2a+4b\\-4a-2b\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2c\\0\\-4a-2b\end{pmatrix}\rangle - \{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$ alle Tangenten T in P an Q gegeben.

Aufgabe 5.9 Das Polynom hat den quadratischen Anteil $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Es ist dann $E_{\overline{A}}(5) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle, E_{\overline{A}}(2) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Orthogonalisiert man $E_{\overline{A}}(2)$ z. B. durch GRAM-SCHMIDT, so erhält man durch Normieren als ON-Basis aus Eigenvektoren: $(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}), \frac{2}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix})$. Die erste Isometrie transformiert auf:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Jetzt verwenden wir wieder die Spalten-Zeilen-Umformungsschreibweise, wobei von nun an nur noch Translationen verwendet werden dürfen, d. h. Additionen der ersten Spalten auf die letzte Spalte (mit anschließender Zeilenumformung): $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Es gibt also ein orthogonales Koordinatensystem, das Q auf $\mathrm{Null}(5x_1'^2 + 2x_2'^2 + 2x_3'^2 - 1)$ transformiert. Die EUKLID'ische Normalform ist also $(\frac{x_1}{\frac{1}{\sqrt{5}}})^2 + (\frac{x_2}{\frac{1}{\sqrt{2}}})^2 + (\frac{x_3}{\frac{1}{\sqrt{2}}})^2 - 1$. Die affine Normalform kann man ebenfalls direkt ablesen: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$.

Aufgabe 5.10 Zu (a) fiel mir leider nichts Kürzeres ein. Falls jemand eine bessere Lösung hat, bitte ich sehr darum, sie mir zu mailen.

(a) Sei V Eigenvektor von φ zum Eigenwert λ, d. h. $\varphi(V) = \lambda V$ und V nicht Nullvektor.
Zunächst zeigen wir: $\Phi(\varphi^{ad}(V), \varphi^{ad}(V))\Phi(V,V) = |\Phi(\varphi^{ad}(V),V)|^2$. Dann wäre nämlich in der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung Gleichheit, so dass die lineare Abhängigkeit von $\varphi^{ad}(V)$ und V folgt, d. h. V ist Eigenvektor von φ^{ad}.
Es ist $\Phi(\varphi^{ad}(V), \varphi^{ad}(V)) = \Phi(V, \varphi \circ \varphi^{ad}(V)) = \Phi(V, \varphi^{ad} \circ \varphi(V)) = \Phi(V, \varphi^{ad}(\lambda V)) = \lambda\Phi(V, \varphi^{ad}(V)) = \lambda\overline{\Phi(\varphi^{ad}(V),V)} = \lambda\overline{\Phi(V,\varphi(V))} = \lambda\overline{\lambda\Phi(V,V)} = \lambda\bar{\lambda}\overline{\Phi(V,V)} = |\lambda^2|\Phi(V,V)$, da für HERMITE'sche Sesquilinearformen immer $\overline{\Phi(V,V)} = \Phi(V,V)$ bzw. $\Phi(V,V) \in \mathbb{R}$ gilt. Also haben wir auf der einen Seite: $\Phi(\varphi^{ad}(V), \varphi^{ad}(V))\Phi(V,V) = |\lambda^2|\Phi(V,V)^2$. Nehmen wir nun die andere Seite in Angriff: $|\Phi(\varphi^{ad}(V),V)|^2 = |\Phi(V,\varphi(V))|^2 = |\lambda\Phi(V,V)|^2 = |\lambda|^2|\Phi(V,V)|^2 = |\lambda^2|\Phi(V,V)^2$, weil $\Phi(V,V) \in \mathbb{R}$ gilt.
Also liegt Gleichheit in der CAUCHY-SCHWARZ-Ungleichung vor.
Sei $\varphi^{ad}(V) = a \cdot V$. Zu zeigen ist nur noch: $a = \bar{\lambda}$. Betrachte hierzu: $\lambda\Phi(V,V) = \Phi(V,\lambda V) = \Phi(V,\varphi(V)) = \Phi(\varphi^{ad}(V),V) = \Phi(aV,V) = \bar{a}\Phi(V,V)$. Da Φ positiv definit ist, haben wir $\Phi(V,V) \neq 0$ und somit $a = \bar{\lambda}$, d. h. V ist Eigenvektor von φ^{ad} zum Eigenwert $\bar{\lambda}$.

(b) Sei $W \in \langle V \rangle^\perp$ beliebig, d. h. $\Phi(W,V) = 0$. Zu zeigen ist: $\Phi(\varphi(W),V) = 0$. Es ist aber $\Phi(\varphi(W),V) = \Phi(W,\varphi^{ad}(V)) = \Phi(W,\bar{\lambda}V) = \bar{\lambda}\Phi(W,V) = 0$.

(c) Sei $(\mathfrak{V},\Phi)$ ein unitärer Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$ normal. Dann gibt es eine ON-Basis aus Eigenvektoren von φ.
Beweis: Es sei μ das Minimalpolynom von φ. Da $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen, gibt es ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\mu(\lambda) = 0$, d. h. λ ist Eigenwert von φ. Sei B_1 ein Eigenvektor, dann ist $\mathfrak{V} = \langle B_1 \rangle \oplus \langle B_1 \rangle^\perp$. Wegen (b) ist $\varphi|_{\langle B_1 \rangle^\perp}$ ein Endomorphismus. Führe also dieses Verfahren mit $\varphi|_{\langle B_1 \rangle^\perp} \in \mathrm{End}(\langle B_1 \rangle^\perp)$ auf $\langle B_1 \rangle^\perp$ sukzessiv fort. Nach endlich vielen Schritten (es sei $n = \dim(\mathfrak{V})$) erhält man schließlich eine Zerlegung von $\mathfrak{V}$ in n paarweise orthogonale, von Eigenvektoren erzeugte 1-dimensionale Teilräume: $\mathfrak{V} = \langle B_1 \rangle \oplus \langle B_2 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle B_n \rangle$. Also ist $(B_1, \ldots, B_n)$ eine Orthogonalbasis von $\mathfrak{V}$ aus Eigenvektoren. Normieren liefert dann die Behauptung.

Aufgabe 5.11 Es ist $(M\times M)/G\to M/\mathrm{Stab}_G(m):G(m,n)\mapsto \mathrm{Stab}_G(m)n$ eine Bijektion:

(i) Wohldefiniertheit:
Sei $G(m_1,m_2)\in(M\times M)/G$ eine beliebige Bahn. Da G auf M transitiv operiert, gibt es $g\in G$ mit $gm_1=m$, so dass $g(m_1,m_2)=(m,gm_2)$. Es gibt also ein $n=gm_2\in M$ mit $G(m_1,m_2)=G(m,n)$. Jetzt bleibt noch zu zeigen, dass bei evtl. unterschiedlichen Darstellungen des Urbildes $G(m,n_1)=G(m,n_2)$ trotzdem dasselbe Bild herauskommt: Wenn die Bahnen $G(m,n_1)$ und $G(m,n_2)$ gleich sind, gibt es ein $s\in G$ mit $(m,n_1)=s(m,n_2)=(sm,sn_2)$. Also ist $sm=m$ und somit $s\in\mathrm{Stab}_G(m)$. Ferner ist $n_1=sn_2$, also sind liegen n_1 und n_2 in derselben Bahn unter $\mathrm{Stab}_G(m)$, weswegen die Bahnen $\mathrm{Stab}_G(m)n_1$ und $\mathrm{Stab}_G(m)n_2$ gleich sein müssen.

(ii) Injektivität:
Seien $\mathrm{Stab}_G(m)n_1=\mathrm{Stab}_G(m)n_2$. Dann liegen n_1 und n_2 in derselben Bahn unter $\mathrm{Stab}_G(m)$, d. h. es gibt ein $s\in\mathrm{Stab}_G(m)\le G$ mit $sn_1=n_2$. Insbesondere sind (m,n_1) und $s(m,n_1)=(sm,sn_1)=(m,n_2)$ in einer Bahn unter G. Dann sind aber die Bahnen $G(m,n_1)$ und $G(m,n_2)$ gleich.

(iii) Surjektivität:
Zur Bahn $\mathrm{Stab}_G(m)n$ wähle einfach die Bahn $G(m,n)$ als Urbild.

2.6 Scheinklausur am 19. 7. 2005

Aufgabe 6.1 Wir betrachten die vier Fälle separat:

- Über $\mathbb{F}_3$ ist das Polynom reduzibel: $(x^3+1):(x+1)=x^2+2x+1$ und $x^2+2x+1=(x+1)^2$. Daraus folgt $\mu(A)=(x+1)^3$ und $\chi(A)=(x+1)^3=(x-2)^3$ sowie $J=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$.
- Über $\mathbb{Q}$ ist das Polynom $\chi(A)=x^3-2$ irreduzibel und $J=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.
- Über $\mathbb{R}$ ist $\mu(A)=x^3-2=(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2^2})$. Nun ist $p:=(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{2^2})$ über $\mathbb{R}$ irreduzibel, deswegen $M_p=\begin{pmatrix}0&-\sqrt[3]{4}\\1&-\sqrt[3]{2}\end{pmatrix}$ und $J=\begin{pmatrix}0&-\sqrt[3]{4}&0\\1&-\sqrt[2]{2}&0\\0&0&\sqrt[3]{2}\end{pmatrix}$.
- Das charakteristische Polynom hat die drei verschiedenen Nullstellen $\sqrt[3]{2}$ sowie $-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\pm\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{4}}{4}}i$. Es folgt somit $J=\begin{pmatrix}\sqrt[3]{2}&0&0\\0&-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}-\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{4}}{4}}i&0\\0&0&-\frac{\sqrt[3]{2}}{2}+\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{4}}{4}}i\end{pmatrix}$.

Aufgabe 6.2 $\mathcal{A}_1:=\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\\1\end{pmatrix}+a\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\-3\\0\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\1\\0\end{pmatrix}\mid a,b\in\mathbb{R}\}$.

Man sieht sofort, dass die Richtungsvektoren linear unabhängig sind, deswegen ist $\dim\mathcal{A}_1=\dim\mathcal{T}(\mathcal{A}_1)=2$. Für $\mathcal{A}_2$ gilt:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\1&-1&-1&0&-1\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&1&1\\0&-2&-2&-1&-2\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&\frac{1}{2}&0\\0&1&1&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\rightsquigarrow$$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}d \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -c-\frac{1}{2}d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d \end{array}\right)$. Also ist $\mathcal{A}_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid c,d \in \mathbb{R}\}$ und $\dim \mathcal{A}_2 = \dim \mathcal{T}(\mathcal{A}_2) = 2$

Wir untersuchen nun $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$. Hierfür beachte man $\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & -2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & -5 & 3 & \frac{1}{2} & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1-\frac{1}{2}x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1-x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{array}\right)$.

Also ist $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1-x) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$.

Aufgabe 6.3 Man berechne

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & b \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d & v \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2a & b \\ 0 & 0 & 2 & 2 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d & v \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+1 & 2b+1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & d & v \end{array}\right)$$

$2a+1=0 \Leftrightarrow a=1$
$2b+1=0 \Leftrightarrow b=1$
$\mathrm{DV}(P_1,P_2,P_3,P_4) = (2:1) = (1:2)$.

Aufgabe 6.4 $f''' = -3f'' + 4f$ induziert das Polynom $x^3 = -3x^2 + 4 \Leftrightarrow p = x^3 + 3x^2 - 4$.
1 ist Nullstelle von p: $(x^3+3x^2-4) : (x-1) = x^2+4x+4$ und $x^2+4x+4 = (x+2)^2$. Der Faktor $x-1$ liefert Fundamentalsystem $\langle e^x \rangle$; der Faktor $(x+2)^2$ liefert Fundamentalsystem $\langle e^{-2x}, xe^{-2x} \rangle$. Also sind alle Lösungen $f \in \mathfrak{V}$ gegeben durch $f \in \langle e^x, e^{-2x}, xe^{-2x} \rangle$.

Aufgabe 6.5 Stelle Matrix $\iota(X)$ von X bezüglich (B_1,B_2,B_3,B_4) und (C_1,C_2,C_3,C_4) her:
$\iota(X) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (2,1,0,1) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} (1,1,1,0) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (0,2,1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann braucht man nur noch den Rang dieser Matrix zu berechnen: $\mathrm{Tensorrang}(X) = \mathrm{Rang}(\iota(X)) = 2$.

Aufgabe 6.6 Ausrämung von oben nach unten:
$N := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} +$
$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Es gilt nun: $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ obere Dreiecksmatrix und $LP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Die Permutationsmatrix $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und die untere Dreiecksmatrix $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 6.7 $G = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_g \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a_g \in \mathbb{R}\}$
$\dim G = \dim \mathcal{T}(G) = 1$; dies ist eine Gerade.
Betrachte nun $H : x_1 + x_2 + x_3 = 1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -a-b+1 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & b \end{array}\right).$$

Es folgt $H = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. $\dim(H) = \dim \mathcal{T}(H) = 2$; dies ist eine Ebene.
$d(H,G) = |PQ|$
P wird durch die Geradengleichung gegeben und den normalen Vektor (der Vektor, der zur Ebene orthogonal steht) kann man in der Ebenengleichung ablesen: $n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Es gilt $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Q liegt aber in H, deswegen gilt: $x_1 = 1 + a + bx_2 = y + bx_3 = 1 - 2a + b$
Nun kann man x_1, x_2, x_3 in die Gleichung von H einsetzen: $1 + a + b + a + b + 1 - 2a + b = 1 \Leftrightarrow$
$3b = -1 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{3} PQ = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$|PQ| = \sqrt{\frac{1^2+1^2+1^2}{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Aufgabe 6.8 Führe neue Koordinaten ein: $x_1 = x - 1$ und $y_1 = y + 1 \Rightarrow x = x_1 + 1$ und $y = y_1 - 1$
Setze x und y in N ein:
$2(x_1+1)(y_1-1)^2 + (x_1+1)^2 + 4(x_1+1)(y_1-1) - 3(y_1-1)^2 - 6(y_1-1) - 2 =$
$= 2(x_1+1)(y_1^2 - 2y_1 + 1) + (x_1^2 + 2x_1 + 1) + 4(x_1y_1 + y_1 - x_1 - 1) - 3(y_1^2 - 2y_1 + 1) - 6y_1 + 6 - 2 =$
$= 2(x_1y_1^2 - 2x_1y_1 - 2y_1 + x_1 + 1) + x_1^2 + 2x_1 + 1 + 4x_1y_1 + 4y_1 - 4x_1 - 4 - 3y_1^2 - 6y_1 + 4 =$
$= 2x_1y_1^2 + 2y_1^2 - 3y_1^2x_1 + x_1^2 - 4x_1y_1 + 4x_1y_1 - 4y_1 + 4y_1 + 6y_1 - 6y_1 + 2x_1 - 2x_1 + 2 + 1 - 4 - 3 + 4 =$
$= 2x_1y_1^2 + 2y_1^2 - 3y_1^2x_1 + x_1^2$
Man sieht $p_1 = 0$. Also ist P nicht regulär, sondern singulär.
Nun zur Tangente $p_2 = 2y_1^2 - 3y_1^2 + x_1^2 = -y_1^2 + x_1^2$
$\Leftrightarrow x_1^2 - y_1^2 = 0 \Leftrightarrow x \Leftrightarrow x_1^2 = y_1^2 \Leftrightarrow x_1 = y_1$ und $x_1 = -y_1$
Führe alte Koordinaten ein:

$x-1=y+1 \Rightarrow y=x-2$ und $x-1=-y-1 \Rightarrow y=-x$; dies sind die beiden Tangenten an N in P.

Aufgabe 6.9 P lässt sich als Matrix so schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

Nun kann man die simultane Zeilen- und Spaltenumformungen anwenden. Da wir im affinen Raum sind, darf man nur affine Transformationen anwenden:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1\frac{7}{8} & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{4} & 1 \end{array}\right)$$

Nun kann man die affine Normalform sofort ablesen: $x_1^2+x_2^2+x_3^2+1$.

Aufgabe 6.10 Mit dem „Wörterbuch“ aus der Vorlesung kann man diese Aussage so übersetzen (Ebene ⇝ projektive Ebene, Schnitt ⇝ Erzeugnis, 2 Geraden ⇝ 2 Punkte):
In einer projektiven Ebene über K erzeugen 2 verschiedene projektive Punkte genau eine Gerade. Diese Aussage ist trivial. Deswegen gilt nach der Dualitätstheorie aus der Vorlesung die erste Aussage.

Aufgabe 6.11 Dies ist im Prinzip Aufgabe 5.11. Man beachte, dass G ja trivialerweise transitiv auf Gm operiert.

Aufgabe 6.12 Sei $M := \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, N := \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ und $M \otimes N = A$
Nach der Vorlesung bzw. Übung gilt: Eigenwerte von A sind die Produkte der Eigenwerte von M und N.
Eigenwerte von M
Minimalpolynombestimmung wie im ersten Semester: $\mu_M = 1+x^2 \Rightarrow a_1 = i$ und $a_2 = -i$
Eigenwerte von N
Minimalpolynom: $x^2-x-1 = (x-\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{5}}{2})(x-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{5}}{2}) \Rightarrow b_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $b_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Die Eigenwerte von A sind dann: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}i, -\frac{1+\sqrt{5}}{2}i, \frac{1-\sqrt{5}}{2}i, -\frac{1-\sqrt{5}}{2}i$.
Da A eine 4×4 Matrix ist und das Minimalpolynom vom Grad 4 ist, gibt es keine anderen Eigenwerte und $\mu_A = \chi_A = (x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}i)(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}i)(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}i)(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}i)$.

Aufgabe 6.13 Seien $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$ die Vektoren, die den 2-dimensionalen Teilraum erzeugen. Für die PLÜCKERkoordinaten gilt dann:
$a_{12} = 2 = b_1c_2 - b_2c_1$
$a_{13} = 6 = b_1c_3 - b_3c_1$
$a_{14} = 4 = b_1c_4 - b_4c_1$
$a_{23} = 2 = b_2c_3 - b_3c_2$
$a_{24} = 8 = b_2c_4 - b_4c_2$
$a_{34} = 20 = b_3c_4 - b_4c_3$
Da wir im projektiven Raum sind, können wir ohne Einschränkung $b_1 = 1$ und $c_1 = 0$ setzen.
Dann gilt: $c_2 = 2$, $c_3 = 6$, $c_4 = 4$
Für die anderen Unbekannten löse man das lineare Gleichungssystem:

$6b_2 - 2b_3 = 2$ und $4b_2 - 2b_4 = 8$ und $4b_3 - 6b_4 = 20$
Setze $b_4 = 2b_2 - 4$ in die erste und in die dritte Gleichung ein:
$3b_2 - b_3 = 1$ und $4b_3 - 6(2b_2 - 4) = 20$
$b_3 = 3b_2 - 1$ und $b_3 - 3(b_2 - 2) = 5$
$3b_2 - 1 - 3b_2 + 6 = 5 \Leftrightarrow 5 = 5 \Rightarrow$ nicht eindeutig lösbar, weil die Vektoren nicht linear unabhängig sind.
Sei $b_2 = 1 \Rightarrow b_3 = 3 - 1 = 2$, $b_4 = 2 - 4 = -2$. Daraus folgt $\mathfrak{U} = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \rangle$.