Scheinklausuren zur Graphentheorie I vom Lehrstuhl II für Mathematik, Prof. Dr. L. Volkmann

Kianhwa Djie
kianhwa.djie@post.rwth-aachen.de

25. Juli 2003

1 Scheinklausur am 7. 7. 1995

Aufgabe 1.1
Es sei T ein Baum. Verbindet man in T alle Ecken vom Abstand 2 durch eine Kante, so bezeichnen wir den neuen Graphen mit T^2. Man zeige:

a) Ist $n(T) \geq 3$, so besitzt T^2 keine Brücke.

b) Ist $n(T) \geq 4$, so ist T^2 kein Kaktusgraph.

Lösung zu Aufgabe 1.1

a) Wähle eine beliebige Kante $k = ab \in K(T^2)$. Es können zwei Fälle auftreten:

1. Fall: $k = ab \in K(T)$.
Weil T zusammenhängend und $n(T) \geq 3$, hat einer der beiden Punkte a oder b einen weiteren Nachbarn c in T. Sei ohne Einschränkung $ac \in K(T)$ mit einem $c \neq b$. Da $d(c,b) \leq 2$ in T (tatsächlich ist sogar $d(c,b) = 2$ wegen der Baumeigenschaft von T, was nicht weiter interessiert), ist auch $bc \in K(T^2)$. Insbesondere haben wir einen Kreis $C = abca$ in T^2, der die Kante k enthält. Somit ist k keine Brücke.

2. Fall: $k = ab \in K(T^2) \setminus K(T)$.
In diesem Fall ist $d(a,b) = 2$, Also gibt es einen Weg in T der Länge 2, welcher a mit b verbindet, das heißt: Es gibt ein $c \in E(T)$ mit $ac, bc \in K(T)$. Demnach haben wir wieder einen Kreis $C = abca$ in T^2, der die Kante k enthält, womit k keine Brücke sein kann.

Insgesamt zeigt sich: T^2 hat keine Brücken.

b) Wir müssen lediglich zeigen, dass es zwei verschiedene Kreise in T^2 gibt, die eine gemeinsame Kante besitzen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Es gebe eine Ecke $a \in E(T)$, die mindestens drei Nachfolger b, c, d in T hat.
Es ist $d(b,c) \leq 2$ und $d(b,d) \leq 2$ in T, folgt $bc, bd \in K(T^2)$. Man erhält also die beiden Kreise $C_1 := abca$ und $C_2 := abda$ in T^2, welche zwar verschieden sind, aber trotzdem ab als gemeinsame Kante haben.

2. Fall: Alle Ecken haben höchstens zwei Nachfolger in T.
Wegen $n(T) \geq 4$ und des Zusammenhangs von T gibt es vier Ecken $a, b, c, d \in E(T)$ mit $ab, bc, cd \in K(T)$. Demnach ist $d(a,c) \leq 2$ und $d(b,d) \leq 2$ in T, also $ac, bd \in K(T^2)$. Dies liefert uns wieder zwei verschiedene Kreise $C_1 := abca$ und $C_2 := bcdb$ in T^2 mit gemeinsamer Kante $bc \in K(T^2)$.

Also ist T^2 kein Kaktusgraph.

Aufgabe 1.2
Sei G ein zusammenhängender Graph mit folgenden Eigenschaften: $\mu(G) \leq 2,\ \delta(G) = 2$, und es gebe eine Ecke e_0 minimalen Grades, die keinem Kreis von G angehört. Berechnen Sie:

a) $\kappa(G - e_0)$.

b) $\tau_p(G)$ für alle $p \geq 3$; Dabei ist $\tau_p(G)$ die Anzahl der Ecken vom Grade p in G.

c) $\mu(G)$.

d) Geben Sie ein schlichtes Modell minimaler Ordnung an.

Lösung zu Aufgabe 1.2

a) Es ist $d(e_0, G) = 2$. Seien a, b die Nachfolger von e_0. Es ist $\kappa(G - e_0) = \kappa(G) + 1 = 2$. Denn wäre dennoch $\kappa(G - e_0) = \kappa(G)$, so gäbe es einen kürzesten Weg $W = a \cdots b$ von a nach b in $G - e_0$. Dann wäre aber $W = e_0 a \cdots b e_0$ ein Kreis in G, was der Voraussetzung widerspricht.

b) Wir verwenden die Formel $2\tau_0(G) + \tau_1(G) + 2(\mu(G) - \kappa(G)) = \sum_{i=3}^{\Delta(G)}(i-2)\tau_i(G)$. Wegen $\delta(G) = 2$ ist $\tau_0(G) = \tau_1(G) = 0$. Da weiterhin G zusammenhängend, ist $\kappa(G) = 1$ und demzufolge $2(\mu(G) - \kappa(G)) \leq 2$. Wir erhalten somit: $\sum_{i=3}^{\Delta(G)}(i-2)\tau_i(G) \leq 2$. Also gibt es keine Ecken vom Grad ≥ 5. Demnach haben alle Ecken ungeraden Grades den Grad 3. Weil G zusammenhängend ist, aber e_0 auf keinem Kreis liegt, kann G nicht EULER'sch sein. Also gibt es Ecken ungeraden Grades. Nach dem Handschlaglemma ist die Anzahl derer gerade, also erhalten wir $\tau_3(G) \geq 2$. Aus der Ungleichung $\sum_{i=3}^{\Delta(G)}(i-2)\tau_i(G) \leq 2$ ersieht man, dass keine weiteren Ecken vom Grad ≥ 3 existieren können. Insgesamt ergibt sich folgendes Bild: $\tau_2(G) = n(G) - 2 \geq 1, \tau_3(G) = 2$ und $\tau_i(G) = 0$ für alle $i \in \mathbb{N}_0 \setminus \{2, 3\}$.

c) Mit Hilfe der Gleichung $2\tau_0(G) + \tau_1(G) + 2(\mu(G) - \kappa(G)) = \sum_{i=3}^{\Delta(G)}(i-2)\tau_i(G)$ und der obigen Ergebnisse folgt unmittelbar $\mu(G) = 2$.

d) Man zeichne die Ecke e_0 mit ihren beiden Nachfolgern a, b ein und setze den Graphen an a und b mit zwei vollständigen K_3-Graphen fort.

Aufgabe 1.3
Sei G ein zusammenhängender Graph und $a \in E(G)$ eine feste Ecke. Beweisen Sie:

a) Es gibt ein Gerüst $T \subset G$ mit $d(a, T) = \kappa(G - a)$.

b) Sei $G_0 \subset G$ ein EULER'scher Teilgraph mit der Eigenschaft, dass jede Kante $k \in K(G_0) \setminus K(T)$ mit a inzidiert. Man zeige, dass a eine gute Ecke von G_0 ist.

c) $\mu(G_0) \leq d(a, G) - \kappa(G - a)$.

Lösung zu Aufgabe 1.3

a) $G - a$ hat $n := \kappa(G - a)$ Zusammenhangskomponenten $K_1, \ldots, K_n$. Da jedes K_i zusammenhängend ist, gibt es Gerüste $T_1, \ldots, T_n$ von $K_1, \ldots, K_n$. Man fixiere in jedem T_i eine Ecke $t_i \in E(T_i)$ mit $at_i \in K(G)$. Durch Hinzufügen der Kanten $at_i \in K(G)$ für jedes $i = 1, \ldots, n$ erhält man ein Gerüst T von G mit $d(a, T) = n = \kappa(G - a)$.

b) Angenommen, a wäre keine gute Ecke in G_0. Dann gibt es einen Kreis C in G_0 mit $a \notin E(C)$. Nach Voraussetzung ist dann $K(C) \subset K(T)$. Also ist C ein Kreis in T, was der Baumeigenschaft des Gerüstes T widerspricht.

c) Es gilt: $\mu(G_0) = d(a, G_0) - \kappa(G_0 - a) - s(a) \leq d(a, G) - \kappa(G - a)$, wobei man die Ungleichungen $d(a, G_0) \leq d(a, G), \kappa(G_0 - a) \geq \kappa(G - a)$ und $s(a) \geq 0$ verwende.

Aufgabe 1.4
Ein Digraph D heißt *p-regulär*, wenn $d^+(x) = d^-(x) = p$ für jedes $x \in E(D)$ gilt. Es sei T ein p-reguläres Turnier mit mindestens 5 Ecken. Zeigen Sie:

a) Jeder Bogen von T liegt in einem orientierten Kreis der Länge 3.

b) Jeder Bogen von T liegt in einem orientierten Kreis der Länge 4.

Lösung zu Aufgabe 1.4
Dies ist ein Spezialfall von Folgerung 5.4. Da dieser allerdings auf dem in der Vorlesung unbewiesenen Satz 5.4 aufbaut, verwenden wir hier eine elementare Alternativlösung:

a) Sei $ab \in B(T)$ ein beliebiger Bogen. Wären alle p positiven Nachbarn von b, zu denen natürlich a und b nicht gehören, auch zugleich positive Nachbarn von a, so hätte a wegen $ab \in B(T)$ mindestens $p+1$ positive Nachbarn, was der Voraussetzung widerspricht. Also gibt es ein $b^+ \in N^+(b,T)$ mit $b^+a \in B(T)$, was den orientierten Dreikreis abb^+a liefert, welcher den Bogen ab enthält.

b) Sei $ab \in B(T)$ ein beliebiger Bogen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Es gibt ein $a^- \in N^-(a,T) \setminus N^+(b,T)$.
a^- kann nicht die p Ecken in $N^+(b,T)$ dominieren, da andernfalls a^- wegen $a^-a \in B(T)$ mehr als p positive Nachfolger hätte. Also gibt es ein $b^+ \in N^+(b,T)$ mit $b^+a^- \in B(T)$, was zum orientierten Kreis abb^+a^-a führt.

2. Fall: $N^-(a,T) = N^+(b,T)$.
Man beachte, dass ein 1-reguläres Turnier nur mit 3 Ecken existiert. Es ist also $p \geq 2$. Die Menge $N^-(a,T) = N^+(b,T)$ hat dann $p \geq 2$ Elemente. Seien $c_1, c_2 \in N^-(a,T) = N^+(b,T)$ verschiedene Elemente mit $c_1c_2 \in B(T)$. Dann haben wir den Kreis abc_1c_2a.

In jedem Fall liegt der Bogen ab auf einem orientierten Kreis der Länge 4.

Aufgabe 1.5
Sei $l \geq 2$ eine natürliche Zahl und G ein schlichter $(2l+1)$-regulärer Graph der Ordnung $n(G)$ mit $2l+1 < n(G) \leq 4l+1$. Zeigen Sie, dass G einen EULER'schen Faktor G' mit $\delta(G') \geq 3$ besitzt.

Lösung zu Aufgabe 1.5
Alle n Ecken haben ungeraden Grad. Nach dem Handschlaglemma muss demnach n gerade sein. Da G schlicht, $n(G) \geq 4$ und $2\delta(G) = 2(2l+1) \geq n(G)$, folgt aus dem Satz von DIRAC, dass G HAMILTON'sch ist. Sei H ein HAMILTONkreis. Da $n(G)$ gerade ist, kann man aus H jede zweite Kante entfernen und erhält somit einen 1-Faktor F. Indem man F aus G entfernt, erhält man einen $2l$-Faktor G'. Dieser ist zusammenhängend. Denn angenommen, es gäbe zwei Komponenten K_1 und K_2 von G'. Als $2l$-regulärer Graph müssen beide Komponenten mindestens $2l+1$ Ecken besitzen. Demnach wäre $n(G) = n(G') \geq 4l+2$, was der Voraussetzung widerspricht. Also ist G' ein $2l$-regulärer zusammenhängender Faktor von G, welcher EULER'sch ist, da alle Ecken geraden Grades sind.

Aufgabe 1.6
Es sei G ein bipartiter Graph mit der Bipartition A, B, und für alle $x \in A$ gelte $d(x,G) = \Delta(G) \geq 1$. Zeigen Sie, dass in G ein Matching M mit $|M| = |A|$ existiert.

Lösung zu Aufgabe 1.6
Sei $S \subset A$ beliebig. Wir verwenden Folgerung 1.4 aus der Nachbarschaftsungleichung: $\delta(G)|S| \leq \Delta(G)|N(S,G)|$. Also ist $|S| \leq |N(S,G)|$ für alle $S \subset A$. Nach dem Satz von KÖNIG-HALL gibt es ein Matching M in G mit $E(M) \cap A = A$. Insbesondere ist $|M| = |A|$.

2 Scheinklausur am 26. 10. 1995

Aufgabe 2.1
Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph und $e_0 \in E(G)$ eine fest gewählte Ecke. Für $ab = k \in K(G)$ ist durch $\rho(k) := |d(e_0,a) - d(e_0,b)|$ eine Kantenbewertung $\rho : K(G) \to \mathbb{R}$ erklärt. Dabei ist $d(x,y)$ der Abstand von x und y in G.

a) Zeigen Sie: Für alle $k \in K(G)$ gilt $\rho(k) \in \{0,1\}$.

b) Sei $r \in \mathbb{N}_0$. Der von der Menge $\{x \in E(G) \mid d(e_0,x) = r\}$ induzierte Teilgraph $S_r(e_0)$ heißt e_0-*Sphäre vom Radius r*.

   Beweisen Sie: Sind alle e_0-Sphären zusammenhängend, so gilt für ein ρ-Minimalgerüst $T \subseteq G$: $\rho(T) = \max_{x\in E(G)} d(e_0,x)$.

Lösung zu Aufgabe 2.1

a) Sei $k = ab \in K(G)$ beliebig und $W = e_0 \cdots a$ ein kürzester Weg von e_0 nach a der Länge $d(e_0,a)$. Dann ist $W' := e_0 \cdots ab$ eine Kantenfolge von e_0 nach b der Länge $d(e_0,a)+1$. Insbesondere ist $d(e_0,b) \leq d(e_0,a)+1$, also $d(e_0,b) - d(e_0,a) \leq 1$. Analog zeige man $d(e_0,a) - d(e_0,b) \leq 1$, woraus dann die Behauptung folgt.

b) „$\leq$“ Alle Sphären $S_r(e_0)$ sind für $r = 1,\ldots,M := \max_{x\in E(G)} d(e_0,x)$ nichtleer und zusammenhängend. Daher gibt es Gerüste $T_1,\ldots,T_M$ von $S_1(e_0),\ldots,S_M(e_0)$. Insbesondere ist $\rho(T_i) = 0$ für jedes $i = 1,\ldots,M$. Nun verbinde man e_0 durch eine Kante $k_1 \in K(G)$ mit T_1, T_1 durch eine Kante $k_2 \in K(G)$ mit T_2 etc. Durch Hinzunahme der M Kanten $k_1,\ldots,k_M$ zu den Gerüsten $T_1,\ldots,T_M$ erhält man ein Gerüst T von G mit $\rho(T) = \sum_{i=1}^M \rho(k_i) + \sum_{i=1}^M \rho(T_i) = M$.

   „$\geq$“ Sei $b \in E(G)$ mit $d(e_0,b) = \max_{x\in E(G)} d(e_0,x) =: M$ und T ein beliebiges Gerüst. Dann gibt es einen Weg W in T von e_0 nach b. Daraus folgt: $\rho(T) \geq \rho(W) \geq M$.

Aufgabe 2.2
Sei G ein schlichter Graph der Ordnung $n \geq 4$, und es gelte $d(x,G) + d(y,G) \geq n+1$ für alle paarweise verschiedenen nicht adjazenten Ecken x und y. Zeigen Sie, dass jede Ecke G auf einem Kreis der Länge $n-1$ liegt.

Lösung zu Aufgabe 2.2
Sei $e \in E(G)$ beliebig und $z \in E(G) \setminus \{e\}$ beliebig, aber fest. Betrachte $G' := G - \{z\}$. Es ist G' schlicht, $n(G') \geq 3$ und $d(x,G') + d(y,G') \geq d(x,G) - 1 + d(y,G) - 1 \geq n-1 = n(G')$ für alle paarweise verschiedenen (in G') nicht adjazenten Ecken x und y, denn wenn x und y in G' nicht adjazent sind, so auch nicht in G. Nach dem Satz von ØRE ist G' HAMILTON'sch. Also gibt es einen Kreis der Länge $n-1$ durch e.

Aufgabe 2.3
Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Ecken eines n-Turnieres T_n.

a) Beweisen Sie $\sum_{i=1}^p d^+(x_i,T_n) \geq \binom{p}{2}$ für alle $p = 1,2,\ldots,n$.

b) Es sei $n \geq 3$ und T_n stark zusammenhängend. Beweisen Sie $\sum_{i=1}^p d^+(x_i,T_n) \geq \binom{p}{2} + 1$ für alle $p = 1,2,\ldots,n-1$.

Lösung zu Aufgabe 2.3

a) $T_n^{(p)} := T_n - \{x_{p+1},\ldots,x_n\}$ ist wieder ein Turnier der Ordnung p. Daher folgt: $\sum_{i=1}^p d^+(x_i,T_n) \geq \sum_{i=1}^p d^+(x_i,T_n^{(p)}) = \binom{p}{2}$.

b) Sei $p \in \{1,\ldots,n-1\}$. Da T_n stark zusammenhängend, kann $\{x_1,\ldots,x_p\}$ nicht $\{x_{p+1},\ldots,x_n\}$ dominieren. Also gibt es einen Bogen $x_ix_j \in B(T_n)$ für ein $i \leq p$ und $j > p$. Daher folgt wie oben: $\sum_{i=1}^p d^+(x_i,T_n) \geq \sum_{i=1}^p d^+(x_i,T_n^{(p)}) + 1 = \binom{p}{2} + 1$.

Aufgabe 2.4
Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph der Ordnung $n(G) = 2p$ mit $p \in \mathbb{N}$, welcher ein perfektes Matching M enthält. Weiter gilt, dass jede Kante $k \in M$ eine Brücke von G ist.

a) Zeigen Sie: $m(G) \leq \binom{p+1}{2}$. $(\star)$

b) Geben Sie im Fall $p = 4$ einen Graphen an, für den in der $(\star)$-Ungleichung die Gleichheit gilt.

Lösung zu Aufgabe 2.4

a) Man gehe vom Graphen G zu einem Graphen G' über, indem man alle Ecken $x, y \in E(G)$ mit $xy \in M$ paarweise zusammenschrumpft und die hierdurch resultierenden p Schlingen eliminiert. Der hierdurch entstandene Multigraph G' hat genau p Kanten und p Ecken weniger als G. Tatsächlich ist G' sogar schlicht, denn Mehrfachkanten hätten nur von Dreikreisen entstehen können, die eine Kante von M enthalten würden, was nach Voraussetzung nicht der Fall ist. Also gilt: $m(G) = m(G') + p \leq \binom{n(G')}{2} + p = \binom{p}{2} + p = \binom{p+1}{2}$.

b) Man zeichne einen K_4 und hänge an jede der vier Ecken je einen Stachel.

Aufgabe 2.5
Sei G ein schlichter, zusammenhängender Graph mit folgenden Eigenschaften: G besitzt einen 2-Faktor F und $\mu(G) = 3$.

a) Sei a eine Ecke von G mit $d(a, G) =: p \geq 2$. Wie viele Nachbarn x mit $d(x, G) \geq 3$ besitzt a mindestens?

b) Bestimmen Sie die möglichen Werte von $\tau_p(G)$ für alle $p \neq 2$. Dabei ist $\tau_p(G)$ die Anzahl der Ecken vom Grade p in G.

c) Skizzieren Sie ein nicht-HAMILTON'sches Modell minimaler Ordnung.

Lösung zu Aufgabe 2.5
ist dringend gesucht!

Aufgabe 2.6
Sei G ein schlichter, zusammenhängender und 1-faktorisierbarer Graph mit $n(G) \geq 4$.

a) Zeigen Sie, dass G keine Brücke enthält.

b) Zeigen Sie, dass G nicht selbstkomplementär ist.

Lösung zu Aufgabe 2.6

a) Da G 1-faktorisierbar, ist G ein r-regulärer Graph. Für gerades r ist G EULER'sch und kann somit keine Brücken besitzen. Angenommen, G besäße eine Brücke $k \in K(G)$. Dann ist $r \geq 3$ ungerade. Es seien K_1, K_2 die beiden Zusammenhangskomponenten von $G - k$, welche jeweils aus mindestens r Ecken bestehen. Nach dem Handschlaglemma ist $n(K_1)$ ungerade, weil alle Ecken von K_1 bis auf eine in K_1 den ungeraden Grad r haben. Wähle nun einen 1-Faktor F von G, der k nicht enthält. Dann enthält F nur Kanten in K_1 oder in K_2. Indem man alle Kanten in K_2 eliminiert, erhält man einen 1-Faktor von K_1, was dem Handschlaglemma widerspricht, weil $n(K_1)$ ungerade ist.

b) Angenommen, G wäre dennoch selbstkomplementär. Der Komplementärgraph ist offenbar $(n(G) - 1 - r)$-regulär. Also muss $r = n(G) - 1 - r$ bzw. $r = \frac{n(G)-1}{2}$ gelten. Dann ist also $n(G)$ ungerade. Nach dem Handschlaglemma kann G dann aber keine 1-Faktoren besitzen.

3 Scheinklausur am 17. 7. 2003

Aufgabe 3.1
Es sei G ein schlichter und zusammenhängender Graph mit einer Schnittecke u. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Der Komplementärgraph $\overline{G}$ ist zusammenhängend.

b) u ist keine Schnittecke von $\overline{G}$.

c) Aus $d(u,G) \leq n(G) - 2$ folgt $\mathrm{dm}(\overline{G}) \leq 3$.

Lösung zu Aufgabe 3.1

a) Diese Aussage ist falsch. Als Gegenbeispiel wähle man einen Weg der Länge 3.

b) Diese Aussage ist richtig. Es seien $G_1, G_2, \dots, G_p$, $p \geq 2$ die Zusammenhangskomponenten von $G - u$. Dann ist $\overline{G}[E(G) - \{u\}]$ zusammenhängend, denn aus $x \in E(G_i)$ und $y \in E(G_j)$ mit $i \neq j$ folgt $xy \in K(\overline{G})$, und aus $x, y \in E(G_i)$ und $z \in E(G_j)$ mit $i \neq j$ folgt $xz, zy \in E(\overline{G})$.

c) Diese Aussage ist richtig. Angenommen, es gilt $\mathrm{dm}(\overline{G}) \geq 4$. Dann folgt aus Satz 1.15 $\mathrm{dm}(G) \leq 2$. Wegen $d(u,G) \leq n(G) - 2$ existiert eine Ecke w, die zu u nicht adjazent ist. Ist ohne Einschränkung $w \in E(G_1)$, so ist der Abstand von w zu jeder Ecke y aus G_2 mindestens 3 im Widerspruch zu $\mathrm{dm}(G) \leq 2$.

Aufgabe 3.2
Es sei G ein schlichter zusammenhängender Kaktusgraph mit $n \geq 3$ Ecken.

a) Zeigen Sie: G ist HAMILTON'sch $\Leftrightarrow$ G ist ein Kreis.

b) Sei $\mu(G) = \frac{n-1}{2}$. Beweisen Sie zunächst, dass $m(G) = 3\nu(G)$ gilt, und zeigen Sie dann, dass G EULER'sch ist.

Lösung zu Aufgabe 3.2

a) „$\Leftarrow$“ Ist G ein Kreis, so ist G logischerweise HAMILTON'sch.

„$\Rightarrow$“ Sei G HAMILTON'sch. Dann enthält G einen Kreis $C = x_1 \cdots x_n x_1$ durch alle n Ecken von G. Angenommen, es wäre $G \neq C$. Dann ist $K(G) \setminus K(C) \neq \emptyset$. Sei also $k =: x_i x_j \in K(G) \setminus K(C)$. Dann befindet sich k in den zwei Kreisen $x_j x_{j+1} \cdots x_{i-1} x_i x_j$ und $x_i x_{i+1} \cdots x_{j-1} x_j x_i$ (alle Indizes sind modulo n zu verstehen), ein Widerspruch zu Satz 2.5.

b) Nach der Definition von Kaktusgraphen und der zyklomatischen Zahl μ gilt: $\nu(G) = \mu(G) = \frac{n-1}{2} = m - n + 1$, also $m = 3\frac{n-1}{2} = 3\nu$.

Da jeder Kreis 3 Kanten enthält und in Kaktusgraphen nach Satz 2.5 alle Kreise kantendisjunkt sind, gilt offensichtlich $m(G) \geq 3\nu(G)$. Gleichheit kann nur gelten, falls G eine Vereinigung von kantendisjunkten Kreisen der Länge 3 ist. Da G zusammenhängend ist, folgt nach Satz 3.2 die Behauptung.

Aufgabe 3.3
Es sei D ein c-partites Turnier $c \geq 2$ der Ordnung n, und es sei

$$i_g = \max\{d^+(x,D), d^-(x,D) \mid x \in E(D)\} - \min\{d^+(x,D), d^-(x,D) \mid x \in E(D)\}.$$

Ferner seien $V_1, V_2, \dots, V_c$ die Partitionsmengen von D, so dass $1 \leq r = |V_1| \leq |V_2| \leq \cdots \leq |V_c| = r + 2i_g$ gilt. Für eine Ecke $x \in E(D)$ sei $V(x)$ die Partitionsmenge V_i mit $x \in V_i$.

a) Zeigen Sie, dass $n - r$ gerade ist.

b) Sei $i_g = 1$. Zeigen Sie die folgende Verbesserung von Übung 6, Aufgabe 5:

$$d^+(x), d^-(x) = \begin{cases} \frac{n-r-2}{2}, & \text{wenn} \quad |V(x)| = r+2, \\ \frac{n-r}{2}, & \text{wenn} \quad |V(x)| = r. \end{cases}$$

Lösung zu Aufgabe 3.3

a) Angenommen, $n-r$ ist ungerade. Seien $x_1 \in V_1$ und $x_c \in V_c$. Dann folgt $d^+(x_1)+d^-(x_1)=n-r$ und $d^+(x_c)+d^-(x_c)=n-r-2i_g$. Sei ohne Einschränkung $d^+(x_1) \geq d^-(x_1)$ und $d^+(x_c) \geq d^-(x_c)$. Da $n-r$ (und damit auch $n-r-2i_g$) ungerade ist, folgern wir, dass $d^+(x_1) \geq \frac{n-r+1}{2}$ und $d^-(x_c) \leq \frac{n-r-2i_g-1}{2}$. Insgesamt haben wir den Widerspruch $d^+(x_1)-d^-(x_c) \geq \frac{n-r+1}{2} - \frac{n-r-2i_g-1}{2} = i_g+1$.

b) Laut Übung 6, Aufgabe 5 gilt für Ecken x_1 und x_2 mit $|V(x_1)| = r+2$ und $|V(x_2)| = r$, dass $\frac{n-r-3}{2} \leq d^+(x_1), d^-(x_1) \leq \frac{n-r-1}{2}$ und $\frac{n-r-1}{2} \leq d^+(x_2), d^-(x_2) \leq \frac{n-r+1}{2}$. Da $n-r$ nach a) gerade ist, schließen wir aus der Ganzzahligkeit der Eckengrade, dass $d^+(x_1), d^-(x_1) = \frac{n-r-2}{2}$ und $d^+(x_2), d^-(x_2) = \frac{n-r}{2}$.

Aufgabe 3.4

Bestimmen Sie die Anzahl der verschiedenen perfekten Matchings im vollständigen Graphen K_{2n}.

Lösung zu Aufgabe 3.4

Da jeder Die gesuchte Anzahl ist $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \prod_{i=0}^{n-1}(2i+1)$. Beweis durch vollständige Induktion nach n, wobei der Induktionsanfang $n=1$ natürlich richtig ist. Nun sei $n \geq 2$ und u eine beliebige Ecke des K_{2n}. Weiter seien $x_1, \ldots, x_{2n-1}$ die verbleibenden Ecken. Nun ist $G_i := K_{2n} - \{u, x_i\}, 1 \leq i \leq 2n-1$ der vollständige Graph K_{2n-2}, der nach Induktionsvoraussetzung $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)$ perfekte Matchings besitzt. Damit besitzt der K_{2n} genau $1 \cdot 3 \cdots (2n-3)$ perfekte Matchings, die die Kante ux_i enthalten für $1 \leq i \leq 2n-1$. Insgesamt besitzt der K_{2n} also $1 \cdot 3 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1) = \prod_{i=0}^{n-1}(2i+1)$ verschiedene perfekte Matchings.