1. Klausur Lineare Algebra SS 2013

RWTH Aachen

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{F}_7 = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ der Körper mit 7 Elementen und sei $t \in \mathbb{F}_7$. Weiter seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & t & 1 \\ 1 & 0 & 3 & t \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^{4\times 4}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^4$$

a

Welche Ränge kommen für die Matrix A vor, wenn t alle Elemente in $\mathbb{F}_7$ durchläuft?

b

Für welche $t \in \mathbb{F}_7$ ist die Matrix A nicht invertierbar?

c

Geben Sie eine Basis des Nullraumes von A im Fall $t = 0$ an.

d

Geben Sie die Lösungsmenge der Gleichung $Ax = b$ im Fall $t = 1$ an.

Aufgabe 2

Sei $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit geordneter Basis $\mathcal{B} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ ein Endomorphismus $\varphi : V \to V$ mit Abbildungsmatrix

$$ {}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} $$

a

Geben Sie eine Basis von Kern(φ) an.

b

Geben Sie eine Basis von Bild(φ) an.

c

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von φ.

d

Bestimmen Sie die Eigenwerte von φ mit ihren algebraischen Vielfachheiten.

e

Die Abbildung φ ist diagonalisierbar. Bestimmen sie eine Basis $\mathcal{C}$ von V, die aus Eigenvektoren von φ besteht.

Aufgabe 3

Sei V der Unterraum der beliebig oft stetig differenzierbaren reellen Funktionen, mit geordneter Basis $\mathcal{B} = (sin(x), sin(2x), cos(x), cos(2x))$. Es bezeichne $f'(x)$ die Ableitung von $f(x)$ für eine Funktion $f(x) \in V$.
Wir betrachten den Endomorphismus $\varphi : V \to V, f(x) \mapsto f'(x) + 4f(x)$. Berechnen Sie die Abbildungsmatrix ${}^{\mathcal{B}}M_{\varphi}^{\mathcal{B}}$ von φ bezüglich der geordneten Basis $\mathcal{B}$ von V.

Aufgabe 4

Sei $V = Q^3$ und

$$U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \leq V, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a

Welche Dimension hat U?

b

Berechnen Sie eine Basis von $U^{\perp} = \{v \in V | v^t u = 0 \text{ für alle } u \in U\}$.

c

Welche der Vektoren v und w liegen in $U^{\perp}$?

Aufgabe 5

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Dieser enthält die folgenden Vektoren:

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, s = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sei U der von u und v aufgespannte Untervektorraum.

a

Berechnen Sie eine Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von U, die u enthält.

b

Geben Sie den Cosinus des Winkels α zwischen v und s an.

Aufgabe 6

Für $t \in B_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

a

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von B_t.

b

Bestimmen Sie die Determinante von B_t.

c

Für welche Werte von t ist B_t invertierbar?

d

Für welche $t \in \mathbb{Z}$ ist B_t invertierbar in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$?

Aufgabe 7 (schriftlich)

Seien K ein Körper und U, V, W drei K-Vektorräume und U von endlich vielen Elementen erzeugt.
Ergänzen Sie die folgenden Satzanfänge zu korrekten Definitionen:

a

Die *Dimension* von U ist ...

b

Eine Teilmenge S von V heißt *linear unabhängig*, wenn ...

c

Eine Teilmenge S von V heißt *Erzeugendensystem von* V, wenn ...

d

Eine Abbildung $\varphi : V \to W$ heißt *linear*, wenn ...

Aufgabe 8 (schriftlich)

Sei $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit charakteristischem Polynom $\chi_B(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$. Was ist der Rang von B? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 9 (schriftlich)

Sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten. Zeigen Sie, dass jedes $B \in K^{n\times n}$ mit $AB = BA$ diagonalisierbar ist. Beweisen, oder widerlegen Sie, dass B auch n verschiedene Eigenwerte besitzt.