2. Semesterklausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS04/05)**

Name Vorname Matrikelnummer Studienfach Fachsemester

....

T1		T2		T3		T4		A1			
A2		A3		A4		A5		A6		$\sum$	

Informationen: Die Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I besteht aus zwei Teilen, diesem Teil und dem ersten Teil, der am 10.12.2004 stattgefunden hat. In jedem dieser Klausurteile können maximal 50 Punkte erreicht werden. Die Gesamtklausur besteht, wer insgesamt mindestens 50% der zu erreichenden Punkte und in dieser Klausur nicht weniger als 10 Punkte erreicht. Einen Übungsschein in Linearer Algebra I erhält, wer mindestens 50% der Übungsaufgaben sinnvoll bearbeitet hat UND entweder diese Klausur (in zwei Teilen) oder die Nachholklausur am Anfang des nächsten Semesters besteht.

Die Ergebnisse dieser Klausur werden spätestens am Montag, den 21.02.2005 ausschließlich durch Veröffentlichung im Internet bekanntgegeben. Eine Einsichtnahme und Rückgabe der Klausur findet am 21.02.2005 von 14:00-15:30 im Hörsaal 1 statt. Für diejenigen, die zu diesem Termin verhindert sind, gibt es einen Ersatztermin am Donnerstag, den 24.02.2005, von 11:00-12:30 im Hörsaal Eph.

Jeder erhält ein beidseitig und ein einseitig bedrucktes Aufgabenblatt!

Hilfsmittel sind nicht zugelassen! **Das B-Team wünscht Ihnen viel Erfolg!**

Ankreuzteil

In diesem Teil der Klausur brauchen Sie Ihre Aussagen nicht zu begründen. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl, bei einer falschen Antwort wird die angegebene Punktzahl abgezogen. Jede einzelne Aufgabe wird minimal mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe T1. (Jeweils 1 Punkt) Sei $\mathcal{V}$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Ist $B \in \mathcal{V}^m$ linear unabhängig, so ist B eine Basis von $\mathcal{V}$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $B \in \mathcal{V}^m$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$, so ist B eine Basis von $\mathcal{V}$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $B \in \mathcal{V}^m$ linear unabhängig, so ist $m \leq \dim \mathcal{V}$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $B \in \mathcal{V}^k$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$, so ist $k \geq \dim \mathcal{V}$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $B \in \mathcal{V}^m$ linear unabhängig, so läßt sich B zu einer Basis von $\mathcal{V}$ ergänzen.	☐ Ja	☐ Nein
Ist B eine Basis von $\mathcal{V}$ und $\varphi \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ invertierbar, so ist $\varphi \circ B$ ebenfalls eine Basis von $\mathcal{V}$.	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe T2. (Jeweils 1 Punkt) Sei K ein Körper, $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler K-Vektorraum und B eine Basis von $\mathcal{V}$. Sei weiter $\alpha \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$ mit Minimalpolynom $\mu_\alpha \in K[x]$ und $A = {}^B\alpha^B \in K^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Ist μ_α irreduzibel, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja	☐ Nein
Zerfällt μ_α vollständig in Linearfaktoren, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $\operatorname{Grad}\mu_\alpha = \dim\mathcal{V}$, so ist A diagonalisierbar.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $\operatorname{Grad}\mu_\alpha = \dim\mathcal{V}$, so ist A ähnlich zur Begleitmatrix M_{μ_α}.	☐ Ja	☐ Nein
A ist genau dann diagonalisierbar, wenn $\mu_\alpha(x) = \Pi_{i=1}^r(x-\lambda_i)$ mit $\lambda_i \in K$ für $i = 1,\ldots,r$ und $\lambda_i \neq \lambda_j$ für $i \neq j$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist V ein Eigenvektor von α zum Eigenwert λ, so ist V ein Eigenvektor von $p(\alpha)$ zum Eigenwert $p(\lambda)$, für alle $p \in K[x]$.	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe T3. (Jeweils 1 Punkt) Sei $(\mathcal{V},\Phi)$ ein Euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Jeder Vektor $V \in \mathcal{V} - \{0\}$ läßt sich zu einer Orthogonalbasis von $\mathcal{V}$ ergänzen.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt genau eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $\varphi \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$, so besitzt $\mathcal{V}$ eine Basis aus Eigenvektoren von $\varphi^{\mathrm{ad}} \circ \varphi$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $\varphi \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$, so ist $\varphi - \varphi^{\mathrm{ad}}$ schiefsymmetrisch.	☐ Ja	☐ Nein
$\Phi(V,V) + 2\Phi(V,W) + \Phi(W,W) \geq 0$, für alle $V, W \in \mathcal{V}$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $\varphi \in \operatorname{End}(\mathcal{V})$, so ist $\varphi^{\mathrm{ad}} \circ \varphi$ selbstadjungiert.	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe T4. (Jeweils 1 Punkt) Sei K ein Körper, $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ Vektorräume endlicher Dimension über K, und $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\operatorname{Dim}\mathcal{V}^* = \operatorname{Dim}\mathcal{V}$.	☐ Ja	☐ Nein
$\alpha^{\mathrm{tr}} : \mathcal{W}^* \to \mathcal{V}^*$ ist linear.	☐ Ja	☐ Nein
α ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Kokern}(\alpha^{\mathrm{tr}}) = 0$.	☐ Ja	☐ Nein
α ist genau dann surjektiv, wenn $\operatorname{Kern}(\alpha^{\mathrm{tr}}) = 0$.	☐ Ja	☐ Nein
$\operatorname{Dim}\operatorname{Bild}(\alpha) + \operatorname{Dim}\operatorname{Kern}(\alpha^{\mathrm{tr}}) = \operatorname{Dim}\mathcal{W}$.	☐ Ja	☐ Nein

Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung und den Übungen ohne Beweis verwenden. Bitte beachten Sie, daß die Begründungen einen wesentlichen Anteil an der Bewertung der Aufgaben haben.

Aufgabe 1. (2+2 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$$

mit Minimalpolynom $\mu_{\widetilde{A}} = x^3(x-1) \in \mathbb{F}_3[x]$ (dies braucht nicht nachgewiesen zu werden).

1. Bestimme $\operatorname{Kern}(\widetilde{A})$.

2. Bestimme $\operatorname{Kern}(\widetilde{A}^2) \cap \operatorname{Bild}(\widetilde{A}^2)$.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Zeige, daß die Matrizen

$$\mathrm{Diag}(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}) \in \mathbb{F}_3^{4\times 4} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$$

ähnlich sind.

Aufgabe 3. (5 Punkte) Sei

$$C := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}.$$

Berechne $\mathrm{Spur}(C^{11})$.

Aufgabe 4. (2+2 Punkte) Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein 3-dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Basis $B = (B_1, B_2, B_3)$ und

$${}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimme $\Phi(B_1, B_3)$ und $\Phi(B_3, B_2 + 2B_3)$.
2. Sei $\mathcal{U} := \langle B_1, B_2 + 2B_3 \rangle$ ein Teilraum von $\mathcal{V}$. Bestimme die beste Approximation von $V := aB_1 + bB_2 + cB_3$ in $\mathcal{U}$, für $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 5. (2+2 Punkte) Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein 3-dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Orthonormalbasis B und $\varphi \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ gegeben durch

$${}^B\varphi^B := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimme eine Orthonormalbasis C aus Eigenvektoren von φ.
2. Bestimme ein positiv definites, selbstadjungiertes $\alpha \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$ und ein $\gamma \in \mathrm{O}(\mathcal{V}, \Phi)$ mit $\varphi = \alpha \circ \gamma$ (durch Angabe der Matrizen von α und γ bezüglich einer geeigneten Basis).

Aufgabe 6. (2+3 Punkte) Sei $\mathcal{V} := \mathbb{R}[x]_{\mathrm{Grad}<4}$. Seien

$$\begin{aligned} \eta_1 : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \quad &: \quad p \mapsto p(1), \\ \eta_2 : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \quad &: \quad p \mapsto p'(1), \\ \eta_3 : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \quad &: \quad p \mapsto p''(1), \\ \eta_4 : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \quad &: \quad p \mapsto p'''(1) \end{aligned}$$

vier Linearformen, wobei $(\sum_{i=0}^d a_i x^i)' := \sum_{i=1}^d i a_i x^{i-1}$.

1. Zeige: $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ ist eine Basis von $\mathcal{V}^*$.
2. Bestimme eine Basis B von $\mathcal{V}$ mit $B^* = \eta$.