1. Semesterklausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS04/05)**

Name	Vorname	Matrikelnummer	Studienfach	Fachsemester
....	....	....	....	.....

T1		T2		T3		T4		A1			
A2		A3		A4		A5		A6		$\sum$	

Informationen: Die Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra I besteht aus zwei Teilen, diesem Teil, und dem zweiten Teil, der voraussichtlich vor Ende des Semesters stattfinden wird. In jedem dieser Klausurteile können maximal 50 Punkte erreicht werden. Die Gesamtklausur besteht, wer insgesamt mindestens 50% der zu erreichenden Punkte, und in der zweiten Klausur nicht weniger als 10 Punkte erreicht. Einen Übungsschein in Linearer Algebra I erhält, wer mindestens 50% der Übungsaufgaben sinnvoll bearbeitet hat UND entweder diese Klausur (in zwei Teilen) oder die Nachholklausur am Anfang des nächsten Semesters besteht.

Die Ergebnisse dieser Klausur werden spätestens am Mittwoch, den 15.12.2004 ausschließlich durch Veröffentlichung im Internet bekanntgegeben. Eine Einsichtnahme und Rückgabe der Klausur findet am 15.12.2004 von 12.30-14.00 im Hörsaal Be 211 statt. Für diejenigen, die zu diesem Termin verhindert sind, gibt es einen Ersatztermin am Montag, den 20.12.2004, von 11.45-12.45 im Hörsaal Fo 4.

Hilfsmittel sind nicht zugelassen! Das B-Team wünscht Ihnen viel Erfolg!

Ankreuzteil

In diesem Teil der Klausur brauchen Sie Ihre Aussagen nicht zu begründen. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl, bei einer falschen Antwort wird die angegebene Punktzahl abgezogen. Jede einzelne Aufgabe wird minimal mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe T1. (Jeweils 1 Punkt) Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in K^{m\times n}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^{m\times 1} \text{ und } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

über einem Körper K

ist lösbar, falls $b = 0$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
ist genau dann lösbar, falls $b = 0$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
ist genau dann lösbar, falls $b \in S(A)$ ist. ($S(A)$:= Spaltenraum von A)	☐ Ja	☐ Nein
ist unlösbar, falls $m > n$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
ist genau dann lösbar, falls $\operatorname{Rg} A = \operatorname{Rg}(A\|b)$ ist.	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe T2. (Jeweils 1 Punkt) Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{Q}$-linear?

$\varphi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3 : (x, y) \mapsto (y - x, y - 2x, y - 3x)$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2 : (x, y, z) \mapsto (x - y + z, 1)$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^2 : f \mapsto (f(-1), f(1))$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2} : A \mapsto A^{\mathrm{tr}}$	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe T3. (Jeweils 1 Punkt) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Jeder Körper ist ein kommutativer Ring mit Eins.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt einen Körper mit nur einem Element.	☐ Ja	☐ Nein
$x^{26} + i\sqrt{3}x^{25} + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{C}$.	☐ Ja	☐ Nein
$x^3 + x + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{F}_2$.	☐ Ja	☐ Nein
$x^3 + x + 1$ ist irreduzibel über $\mathbb{F}_3$.	☐ Ja	☐ Nein
$x^4 + \sqrt{2}x^3 + \sqrt{2}$ ist irreduzibel über $\mathbb{R}$.	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe T4. Berechne:

$\mathrm{ggT}(2004, 1670)$		(1 Punkt)
$a + ib = \frac{10}{1-3i} \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$		(1 Punkt)
$a + 43\mathbb{Z} = (7 + 43\mathbb{Z})^{-1}$ in $\mathbb{Z}/43\mathbb{Z}$, mit $0 \leq a < 43$		(2 Punkte)
$\mathrm{ggT}(x^n - 1, x^3 - 2x)$ in $\mathbb{R}[x]$ für $n \geq 1$ (in normierter Form)		(2 Punkte)

Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden. Bitte beachten Sie, daß die Begründungen einen wesentlichen Anteil an der Bewertung der Aufgaben haben.

Aufgabe 1. (5 Punkte) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -13 & -8 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2}.$$

1. Berechne A^2, A^{-1} und $A\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$.
2. Bestimme ein $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ mit $48\,a - 78\,b = \mathrm{ggT}(48, -78)$.

Aufgabe 2. (5 Punkte) Bestimme eine Lösung des linearen Gleichungssystems $Mx = b$ mit $M = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 5 \\ -13 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -8 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 4}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 1}$. Wieviele Lösungen gibt es?

Aufgabe 3. (4 Punkte) Bestimme eine Rechtsinverse der Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3\times 4}$.

Besitzt A eine Linksinverse?

Aufgabe 4. (5 Punkte) Seien $p = x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ und $q = (x+1)^3 \in \mathbb{F}_2[x]$. Bestimme ein $s \in \mathbb{F}_2[x]$ mit $sq + p\mathbb{F}_2[x] = 1 + p\mathbb{F}_2[x]$.

Aufgabe 5. (5 Punkte) $\mathbb{R}^{2\times 1}$ operiert auf $\mathbb{R}^{3\times 1}$ durch $\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \mapsto \begin{pmatrix} x + 3a - 2b \\ y + 0a + 1b \\ z + 1a + 0b \end{pmatrix}$.

Zeige: $\widetilde{A} : \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}^{1\times 1}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ ist eine trennende Invariante dieser Operation.

Aufgabe 6. (5 Punkte) Seien $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ und $\psi : \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ lineare Abbildungen. Beweise:

1. $\mathrm{Bild}(\psi \circ \varphi) \subseteq \mathrm{Bild}(\psi)$.
2. $\mathrm{Kern}(\varphi) \subseteq \mathrm{Kern}(\psi \circ \varphi)$.