Nachholklausur zur Linearen Algebra I

Prof. Dr. W. Plesken **(WS04/05)**

Name	Vorname	Matrikelnummer	Studienfach	Fachsemester
....	....	....	....	.....

T1		T2		T3		T4		T5		A1		A2	
A3		A4		A5		A6		A7				$\sum$	

Informationen: In dieser Klausur werden 61 Punkte vergeben. Die Klausur besteht, wer mindestens **27** Punkte erreicht. Einen Übungsschein in Linearer Algebra I erhält, wer diese Klausur besteht und im WS2004/05 mindestens 50% der Übungsaufgaben sinnvoll bearbeitet hat.

Die Ergebnisse dieser Klausur und die Einsichttermine werden spätestens am Freitag, den 15.04.2005 ausschließlich durch Veröffentlichung auf den Internetseiten des Lehrstuhls B bekannt gegeben.

Bearbeitungszeit: 150 Minuten

Jeder erhält ein beidseitig und ein einseitig bedrucktes Aufgabenblatt!

Hilfsmittel sind nicht zugelassen! **Das B-Team wünscht Ihnen viel Erfolg!**

Ankreuzteil

In diesem Teil der Klausur brauchen Sie Ihre Aussagen nicht zu begründen. Für jede richtige Antwort bekommen Sie die angegebene Punktzahl, bei einer falschen Antwort wird die angegebene Punktzahl abgezogen. Jede einzelne Aufgabe wird minimal mit 0 Punkten bewertet.

Aufgabe T1. (Jeweils 1 Punkt) Sei K ein Körper, $\mathcal{V}$ ein endlich dimensionaler K-Vektorraum, $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ ein K-Teilraum und $\iota : \mathcal{U} \to \mathcal{V} : U \mapsto U$ die Einbettung. Sei $\mathcal{W}$ ein weiterer K-Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Ist $\mathcal{U} \neq \mathcal{V}$, so ist $\dim \mathcal{U} < \dim \mathcal{V}$ .... ☐ Ja ☐ Nein
Jede Basis von $\mathcal{U}$ läßt sich zu einer Basis von $\mathcal{V}$ ergänzen .... ☐ Ja ☐ Nein
$\mathcal{V}/\mathcal{U}$ ist ein K-Vektorraum der Dimension $\dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{U}$ .... ☐ Ja ☐ Nein
Eine Basis von $\mathcal{U}$ ist linear unabhängig in $\mathcal{V}$ .... ☐ Ja ☐ Nein
$\epsilon : \mathrm{Hom}(\mathcal{W}, \mathcal{U}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{W}, \mathcal{V}) : \varphi \mapsto \iota \circ \varphi$ ist ein Monomorphismus .... ☐ Ja ☐ Nein
$\pi : \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{U}, \mathcal{W}) : \varphi \mapsto \varphi|_{\mathcal{U}}$ ist ein Epimorphismus .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe T2. (Jeweils 1 Punkt) Welche der folgenden Abbildungen sind $\mathbb{Q}$-linear?

$\varphi : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^3 : (x, y) \mapsto (y + \frac{1}{2}x, y, y - x)$ .... ☐ Ja ☐ Nein
$\varphi : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^2 : (x, y, z) \mapsto (1, x + y + z)$ .... ☐ Ja ☐ Nein
$\varphi : \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \to \mathbb{Q}^2 : f \mapsto (f(1), 2f(2) - f(0))$ .... ☐ Ja ☐ Nein
$\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2} : A \mapsto 2A + A^{\mathrm{tr}}$ .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe T3. (Jeweils 1 Punkt) Sei K ein Körper. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ sind ähnlich, falls $1 + 1 \neq 0$ in K ist. ☐ Ja ☐ Nein
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$ sind ähnlich .... ☐ Ja ☐ Nein
$\begin{pmatrix} 400 & 1 & -1 \\ -1 & 400 & 3 \\ 43 & -3 & 201 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $\begin{pmatrix} 10 & 1 & -20 \\ -9 & -20 & -8 \\ -47 & -2 & 10 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ sind ähnlich. ☐ Ja ☐ Nein
Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{3\times 3}$ ist diagonalisierbar .... ☐ Ja ☐ Nein
Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ist diagonalisierbar .... ☐ Ja ☐ Nein
Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ist diagonalisierbar .... ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe T4. (Jeweils 1 Punkt) Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein Euklidischer Vektorraum. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Jeder Vektor $V \in \mathcal{V} - \{0\}$ läßt sich eindeutig zu einer Orthogonalbasis von $\mathcal{V}$ ergänzen.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt genau eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $\varphi \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$, so besitzt $\mathcal{V}$ eine Basis aus Eigenvektoren von $\varphi \circ \varphi^{\mathrm{ad}} + \varphi + \varphi^{\mathrm{ad}}$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $\varphi \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$, so ist $\varphi + \varphi^{\mathrm{ad}}$ selbstadjungiert.	☐ Ja	☐ Nein
$\Phi(V,V) - 2\Phi(V,W) + \Phi(W,W) \geq 0$, für alle $V, W \in \mathcal{V}$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $\varphi \in \mathrm{End}(\mathcal{V})$, so ist $\varphi^{\mathrm{ad}} \circ \varphi$ selbstadjungiert.	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe T5. Berechne:

$\mathrm{ggT}(1001, 1365)$	☐	(1 Punkt)
$a + ib = \frac{1-i}{1+i} \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$	☐	(1 Punkt)
$a + 144\mathbb{Z} = (11 + 144\mathbb{Z})^{-1}$ in $\mathbb{Z}/144\mathbb{Z}$, mit $0 \leq a < 144$	☐	(2 Punkte)
$\mathrm{ggT}(x^n - 1, x^m - 2)$ in $\mathbb{R}[x]$ für $n, m \geq 1$ (in normierter Form)	☐	(2 Punkte)

Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung und den Übungen ohne Beweis verwenden. Bitte beachten Sie, daß die Begründungen einen wesentlichen Anteil an der Bewertung der Aufgaben haben.

Aufgabe 1. (4 Punkte) Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}.$$

Bestimme eine Lösung $x \in \mathbb{F}_2^{4\times 1}$ des linearen Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wieviele Lösungen gibt es?

Hinweis: Das Minimalpolynom von A ist $x^2 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) Bestimme eine Rechtsinverse der Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{3\times 4}$. Besitzt A eine Linksinverse?

Aufgabe 3. (5 Punkte) Seien $p = x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ und $q = (x+1)^2 \in \mathbb{F}_2[x]$. Bestimme ein $s \in \mathbb{F}_2[x]$ mit $sq + p\mathbb{F}_2[x] = 1 + p\mathbb{F}_2[x]$.

Aufgabe 4. (5 Punkte) Zeige, daß die Matrizen

$$\mathrm{Diag}\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) \in \mathbb{F}_3^{4\times 4} \text{ und } \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$$

ähnlich sind.

Aufgabe 5. (2+2 Punkte) Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein 3-dimensionaler Euklidischer Vektorraum mit Basis $B = (B_1, B_2, B_3)$ und

$$ {}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$

1. Bestimme $\Phi(B_3, B_2)$ und $\Phi(B_2, 5B_1 + B_2)$.
2. Sei $\mathcal{U} := \langle B_3, 5B_1 + B_2 \rangle$ ein Teilraum von $\mathcal{V}$. Bestimme die beste Approximation von $V := aB_1 + bB_2 + cB_3$ in $\mathcal{U}$, für $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 6. (2+4 Punkte) Sei $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{3\times 1}$ und B die Standardbasis von $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Sei weiter

$$ A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^2 \in \mathbb{R}^{3\times 3}. $$

1. Zeige: A ist positiv definit.
2. Bestimme eine Orthonormalbasis C von $\mathcal{V}$ bezüglich Φ, wobei Φ durch ${}_B\Phi^B = A$ gegeben ist.

Aufgabe 7. (2+3 Punkte) Sei $\mathcal{V} := \mathbb{R}[x]_{\mathrm{Grad}<4}$. Seien

$$ \begin{aligned} \eta_1 : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \quad &: \quad p \mapsto p(-1), \\ \eta_2 : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \quad &: \quad p \mapsto p'(-1), \\ \eta_3 : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \quad &: \quad p \mapsto p''(-1), \\ \eta_4 : \mathcal{V} \to \mathbb{R} \quad &: \quad p \mapsto p'''(-1) \end{aligned} $$

vier Linearformen, wobei $(\sum_{i=0}^{d} a_i x^i)' := \sum_{i=1}^{d} i a_i x^{i-1}$.

1. Zeige: $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4)$ ist eine Basis von $\mathcal{V}^*$.
2. Bestimme eine Basis B von $\mathcal{V}$ mit Dualbasis $B^* = \eta$.