Lineare Algebra

Zusammenfassung von M.Sondermann und P.Elftmann
WS 2002

Vorwort

Dies ist eine Zusammenfassung zur Vorbereitung auf die Klausur 'Lineare ALgebra' des Wintersemesters 2001 bei Prof. Dr. Hi. Es erhebt keinerlei Anspruch auf Korrektheit und Vollständigkeit und stellt keine offizielle Veröffentlichung des Lehrstuhls dar. Bei Fehlern, Verbesserungsvorschlägen oder sonstigen Anregungen wird um eine Email an eine der unten angegebenen Adressen gebeten.

Patrick Elftmann, patrick.elftmann@post.rwth-aachen.de
Matthias Sondermann, matthias.sondermann@post.rwth-aachen.de

Letzte Änderung : 12.August 2002

Körper K

$+ : K \times K \to K, (a,b) \to a+b$
$\cdot\ : K \times K \to K, (a,b) \to a \cdot b$

1. $(a+b)+c = a+(b+c)\ \forall\ a,b,c \in K$
2. $\exists\ 0 \in$ K mit $a+0 = 0+a = a\ \forall\ a \in K$
3. $\forall\ a \in$ K ex. $-a \in$ K mit $a+(-a) = 0 = (-a)+a$
4. $a+b = b+a\ \forall\ a,b \in K$
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
6. $\exists\ 1 \in K, 1 \neq 0,\ mit\ 1 \cdot a = a \cdot 1 = a\ \forall\ a \in K$
7. $\forall\ a \in K, a \neq 0,\ ex.\ a^{-1} \in$ K mit $a \cdot a^{-1} = 1 = a^{-1} \cdot a$
8. $a \cdot b = b \cdot a\ \forall\ a,b \in K$
9. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c\ \underline{und}\ (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c\ \forall\ a,b,c \in K$

Gruppe G

Verknüpfung $\star$ mit $G \times G \to G,\ (x,y)\ \to a \star b$
1. $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)\ \forall\ x,y,z \in G$
2. $\exists\ e \in G$ mit $e \star x = x \star e = x\ \forall\ x \in G$
3. $\forall\ x \in G\ \exists\ x' \in G\ mit\ x \star x' = e = x' \star x$
4. gilt zusätzlich $x \star y = y \star x\ \forall\ x,y \in G$, dann heißt die Gruppe abelsch

Relation R

auf M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$, $(xRy) \Leftrightarrow (x,y) \in R$

(R) reflexiv falls $(x,x) \in R\ \forall\ x \in M$
(S) symmetrisch falls $(x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$
(A) antisymmetrisch falls $(x,y) \in R\ und\ (y,x) \in R \Rightarrow x = y$
(T) transitiv falls $(x,y) \in R\ und\ (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$

RST = Äquivalenzrelation
RAT = Halbordnung

für $x \in$ M heißt $C_x := \{y \in M \mid xRy\}$ Äquivalenzklasse von R
M$|\ R :=$ Menge der Äquivalenzklassen von R ($\subseteq Pot(M)$)

Partition : Menge P von nicht leeren Teilmengen von M mit
1. $M = \cup_{C \in P} C$
2. $C_1, C_2 \in P\ mit\ C_1 \neq C_2$, dann ist $C_1 \cap C_2 = \oslash$

Mengen

Eine Menge mit n Elementen hat 2^n Teilmengen
Wenn eine Menge m Elemente hat, dann hat die Gruppe S_M genau m! Elemente

Homomorphismus

$\varphi\ :\ G \to H : \varphi(x \star y) = \varphi(x) \star \varphi(y)\ \forall\ x, y \in G$
$\varphi(0) = 0$

injektiv : Monomorphismus
surjektiv : Epimorphismus
bijektiv : Isomorphismus

Ring

$+ : R \times R \to R$
$\cdot :\ R \times R \to R$

1. (R,+) ist abelsche Gruppe
2. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)\ \forall\ x, y, z \in R$
3. $\exists\ 1 \in R\ mit\ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x\ \forall\ x \in R$
4. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\ \underline{und}\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z\ \forall\ x, y, z \in R$
5. gilt zusätzlich $x \cdot y = y \cdot x\ \forall\ x, y \in R$, dann ist R kommutativ

- Körper sind kommutative Ringe
- Ring R ist Körper, wenn R mindestens zwei Elmente besitzt, kommutativ ist und es zu jedem $0 \neq r \in R\ ein\ s \in R$ gibt, so dass rs=1

Ringhomomorphismus

$\varphi\ :\ R \to S$
1. φ ist Gruppenhomomorphismus (R,+) $\to$ (S,+)
2. $\varphi(xy) = \varphi(x)\ \varphi(y)\ \forall x, y \in R$
3. $\varphi(1) = 1$

Vektorraum V

1. V ist abelsche Gruppe (V,+) mit skalarer Multiplikation $K \times V$ →V, (a,v)→av
2. $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v\ \forall\ a, b \in K\ ,\ v \in V$
3. $a \cdot (v + v') = a \cdot v + a \cdot v'\ \forall\ a \in K\ ,\ v, v' \in V$
4. $1 \cdot v = v\ \forall\ v \in V$

Untervektorraum $W \leq V$

1. W ist Untergruppe (V,+)
2. $aw \in W \quad \forall a \in K,\ w \in W$

oder

1. $W \neq 0$
2. $w + w' \in W$ (Abgeschlossenheit bzgl. +)
3. $aw \in W$ (Abgeschlossenheit bzgl. $\cdot$)

U Teilraum von V. Dann gilt:
$u, v \in U \Rightarrow u + v \in U$
$u \in U,\ v \notin U \Rightarrow u + v \notin U$
$u \in U,\ v \notin U \not\Rightarrow u + v \in U$
$u, v \in U \not\Rightarrow u + v \notin U$
$s \in K,\ u \notin U \not\Rightarrow s \cdot u \notin U$

Die leere Menge $\oslash$ ist nicht Teilraum jedes Vektorraums

lineare Abbildung

$\varphi\ :\ V \to W$, V,W sind K-VR
lineare Abbildung = K-Homomorphismus

1. $\varphi(0) = \varphi(0)$
2. $\varphi(v + v') = \varphi(v) + \varphi(v')\ \ \forall\, v, v' \in V$
3. $\varphi(a \cdot v) = a \cdot \varphi(v)\ \ \forall\, a \in K,\ v \in V$

Endomorphismus := $Hom_K(V, V)$
V und W heißen isomorph, falls ein Isomorphismus $\varphi : V \to W$ existiert ($V \cong W$)

$$\begin{aligned}
Kern(\varphi) &:= \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\} \\
Bild(\varphi) &:= \{\varphi(v) \mid v \in V\}
\end{aligned}$$

$$\varphi \in Hom_K(V, W),\ dann: \begin{array}{l} Kern(\varphi) \leq V \\ Bild(\varphi) \leq W \\ \varphi\ injektiv \ \Leftrightarrow\ Kern(\varphi) = \{0\} \\ \varphi\ surjektiv \ \Leftrightarrow\ Bild(\varphi) = W \\ v \in V,\ w \in \varphi(v) \Rightarrow \varphi^{-1} = V + Kern(\varphi) \end{array}$$

Die Umkehrabbildung einer bijektiven linearen Abbildung ist linear

Matrizen

- $A = (a_{ij}) \in R^{m \times n}$, $A^t = (a_{ji}) \in R^{m \times n}$ $(Transponierte\ von\ A)$
- $GL_n(R) := \{A \in R^{n \times n} \mid A\ invertierbar\} = (R^{n \times n})^*$ = volle lineare Gruppe
- $A, A^t \in GL_n(R) \Rightarrow (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- $A\ invertierbar \Rightarrow\ es\ ex.\ B, C \in K^{n \times n}\ mit\ A \cdot B = E_n\ und\ C \cdot A = E_n$
- $A\ invertierbar \Rightarrow\ Lösung\ von\ Ax = b\ lautet\ A^{-1} \cdot b$
- $A\ invertierbar \Rightarrow (A \mid E_n)\ nach\ (E_n \mid B)\ möglich \Rightarrow B = A^{-1}$
- $A, B \in GL_n(K) \Rightarrow A \cdot (A^t \cdot B^t) \cdot (A^{-1} \cdot B^{-1})^t = A$
- $A \in K^{l \times m},\ B \in K^{m \times n},\ C \in K^{n \times p},\ dann\ gilt\ (AB)C = A(BC)$

elementare Matrizen:
T_{ij} : E_n mit i-ter und j-ter Zeile vertauscht
$A_{ij}(c)$: $E_n + cE_{ij}$ (E_n mit c an der Stelle ij)
$M_i(c)$: $E_m + (c-1)E_{ii}$ (E_n mit c an Stelle ii)

Rang:
$rangA = dim_K(Zeilenraum)$
$rangA = Maximalzahl\ l.u.\ Zeilen/Spalten$
$rang(AB) \leq min(rangA\ ,\ rangB)$
Der Zeilenrang einer Matrix ist gleich ihrem Spaltenrang

Die Zeilen von AB sind Linearkombinationen der Zeilen von B
Die Spalten von AB sind Linearkombinationen der Spalten von A

Ax=b ist genau dann unlösbar, wenn rang(A)+1=rang(A,b) ist
Ist A eine invertierbare obere Dreiecksmatrix, dann auch A^{-1}
Eine n×n Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie 0 nicht als Eigenwert hat
Ist A^2 = A dann ist A diagonalisierbar

Abbildungsmatrix

$V, W\ K{-}VR$, $B = (v_1, ..., v_n)$ *ist Basis von* V, $C = (w_1, ..., w_m)$ *ist Basis von* W
$\varphi \in Hom_K(V, W)$ *und* $\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \ \Rightarrow$
$M_C^B(\varphi) \ := \ a_{ij} \in K^{m \times n}$ *heißt die Abbildungsmatrix von* φ *bzgl. B und C*
$dim_K V = dim_K(Kern(\varphi)) + dim_K(Bild(\varphi))$

Seien U,V,W K-VR mit Basen A,B,C und sei $\varphi \in Hom_K(U, V)$,
$\psi \in Hom_K(V, W)$, *dann gilt* : $M_C^A(\psi \circ \varphi) = M_B^C(\psi) M_B^A(\varphi)$

φ *Isomorphismus* $\Leftrightarrow$ $M_B^C(\varphi)$ *invertierbar* $(M_C^B(\varphi^{-1}) = M_B^C(\varphi))$

$M_B^{B'}(id_V) \in K^{n \times n}$ *heisst Basiswechselmatrix*
und: Die Spalten von $M_B^{B'}(id_V)$ sind die Koeff.vekt. der v'_j bzgl. B

$M_B^{B'}(id_v)$ *ist invertierbar und* $M_B^{B'}(id_V)^{-1} = M_{B'}^B(id_V)$

Ist $T \in GL_n(K)$, *dann existiert eine Basis* B'' *von* V *mit* $M_B^{B''}(id_V) = T$

Basiswechselsatz : $M_{C'}^{B'}(\varphi) \ = \ M_{C'}^C(id_W) M_C^B(\varphi) M_B^{B'}(id_V)$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad = \ M_C^{C'}(id_W)^{-1} M_C^B(\varphi) M_B^{B'}(id_V)$

Basen/Erzeugnis

$0 \neq M \subseteq V$
$< M >:= \{v \in V \ \mid \ \exists \ v_1, ..., v_n \in M, \ so \ dass \ v \ eine \ LK \ von(v_1, ..., v_n) \ ist\}$
- $< M > \leq V$
- *Ist* $W \leq V$ *mit* $M \subseteq W$, *dann ist* $< M > \leq W$
 ($< M >$ *ist der kleinste UVR von* V, *der* M *enthält*)
- M heißt Erzeugendensystem von V, wenn $V =< M >$
- V heißt endlich erzeugt, wenn V ein endl. Erzeugendensystem besitzt
- M heißt Basis von V, wenn M ein l.u. Erzeugendensystem von V ist
- M ist Basis von V $\Leftrightarrow$
 M ist maximal l.u. Teilmenge von V
 M ist minimales Erzeugendensystem von V
- Basisergänzungssatz: $M' \subseteq V$ l.u., dann ex. eine Basis M von V mit $M' \subseteq M$

$b_1, b_2 \in V$ *und* (b_1, b_2) *l.u. und* φ *injektiv* $\Rightarrow$ $(\varphi(b_1), \varphi(b_2))$ *l.u*
Basis $(b_1, ..., b_n)$ von V, so daß $(\varphi(v_1), ..., \varphi(v_n))$ Basis von W $\Rightarrow$ φ Isomorphism.

Dimension

$dimV \ : \ dim_K V \ := \mid M \mid$ (Anzahl der Elemente einer Basis von V)
$V, W \ K - VR \ : \ V \cong W \ \Leftrightarrow \ dim_K V = dim_K W$
$U, W \ UVR \ von \ V \ \Rightarrow \ dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W)$

Die Dimension des Lösungsraumes eines homogenen LGS Ax=0 ist
gleich der Differenz der Anzahl der Unbekannten und dem Rang der Matrix

Determinanten

Signum:

- Ist $\tau \in S_n$ $Transposition,\ dann\ ist\ \tau \neq 1 (= id_{\underline{n}})\ und\ \tau^2 = 1$
- $\pi \in S_n$ ist Produkt einer ungeraden Anz. von Transpositionen benachb. Ziffern
- Ein Paar i,j heißt **Fehlstandspaar**, wenn $\pi(i) > \pi(j)\ f\ddot{u}r\ 1 \leq i \leq j < n$
- $sgn(\pi)\ :=\ (-1)^{|\{FSP\ von \pi\}|} \in Z\ hei\beta t\ das\ Signum\ von\ \pi$
- $\pi, \sigma \in S_n,\ dann\ sgn(\sigma\ \pi) = sgn(\pi)\ \cdot\ sgn(\sigma)$
- $S_n\ \Rightarrow\ \{1, -1\} = Z^*$ ist ein Gruppenhomomorphismus

Determinante:

1. multilinear :
   $D(s_1, ..., s_{j-1}, as_j + bs'_j, s_{j+1}, ...s_n) = aD(s_1, ..., s_{j-1}, s_{j+1}, ..., s_n)$
   $+\ bD(s_1, ..., s_{j-1}, s'_j, s_{j+1}, ..., s_n) \forall a, b \in R, s_1, ., s_n, s'_j \in R^n$
   Aus einer Zeile (Spalte) kann ein gemeinsamer Faktor vor die Determinante gezogen werden
2. alternierend : $D(s_1, ..., s_n) = 0,\ falls\ s_i = s_j\ f\ddot{u}r\ zwei\ i \neq j$
   Das Vorzeichen der Determinante ändert sich, wenn man zwei Zeilen (Spalten) vertauscht
3. normiert : $D(e_1, ..., e_n) = 1\ mit\ E_n = (e_1, ..., e_n)$
4. Der Wert der Determinante ändert sich nicht, wenn man ein Vielfaches einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte) addiert
5. det A = 0 genau dann, wenn die Zeile (Spalten) von A linar abhängig sind
6. det A = det A^T
   det AB = det A $\cdot$ det B
7. Bezeichnet man mit Υ_n die Menge der Permutationen der Menge (1,..,n) und für $\pi \in \Upsilon_n$ das Vorzeichen von π durch:
   sgn(π) = (1 falls π gerade Permutation und -1 falls π ungerade Permuation),
   so gilt: $det\ A\ = \sum_{\pi \in S_n} sgn(\pi) a_{\pi(1),1}, ..., a_{\pi(n),n}$

- $A \in R^{n \times n}\ obere\ Dreiecksmatrix\ \Rightarrow\ det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
- $A\ ist\ K\ddot{a}stchenmatrix\ \Rightarrow\ det(A) = \prod_{i=1}^{n} det(A_i)$
- $A'\ komplement\ddot{a}re\ Matrix\ (adjunkte)\ :\ A' := ((-1)^{i+j} det(A_{ji}))$
  $dann\ gilt\ auch:\ AA' = det(A) \cdot E_n = A'A$
  $\Leftrightarrow A' = det(A) \cdot A^{-1},\ falls\ A\ invertierbar$

- $T\ invertierbar\ \Rightarrow\ det(T), det(T^{-1}) \in R^*\ und\ det(T^{-1}) = det(T)^{-1}$
- $T\ invertierbar\ \Rightarrow\ det(T^{-1}AT) = det(A)$
- A invertierbar $\Rightarrow$ det(A) invertierbar
- A invertierbar $\Leftrightarrow$ $det(A) \neq 0$
- A ganzzahlig invertierbar $\Rightarrow$ $det(A) = (-1, 1)$

K-Algebra

Verknuepfung $\cdot \; : \; V \times V \; \rightarrow V$
1. $(V, +, \cdot)$ *ist ein Ring*
2. $a(v \cdot v') = (av) \cdot v' = v \cdot (av')$
K-Algebra-Homomorphismus, falls $\varphi(1) = 1, \; \varphi(v \cdot v') = \varphi(v) \cdot \varphi(v')$

Polynomring

(P, X) *heißt Polynomring, falls* :
1. P *ist* $K - Algbera$
2. $\{X^0, X^1, X^2, ...\}$ *ist* $K - Basis$ *von* P *und unendlich*

- Jedes Polynom besitzt eine eindeutige Darstellung als LK $f = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i X^i$
- deg(f)=m heißt der Grad von f
- f normiert falls a_m=1
- f konstant falls deg(f)=0 (Nullpolynom ist auch konstant! f=0 hat keinen Grad)
- linear falls deg(f)=1
- f+g $\neq \; 0 \; \Rightarrow \; deg(f+g) \; \leq \; max\{deg(f), deg(g)\}$
- deg(f) $\neq \; deg(g) \; \Rightarrow \; deg(f+g) = max\{deg(f), deg(g)\}$
- deg($f \cdot g$)=deg(f)+deg(g) , insbesondere fg$\neq$ 0
- $K[X]^* = K^* = \; \{a \in K \; \mid \; a \neq \; 0\}$
- $f, g \in K[X], g \neq 0,$ *dann gibt es* $q, r \in K[X]$ *mit* $f = q \cdot g + r$
- g teilt f, geschrieben g$|$ f falls $h \in K[X]$ *existiert mit* $f = g \cdot h$
- teilerfremd, wenn $h \mid f$ *und* $h \mid g$, *dann* $h \in K$
- f heißt irreduzibel falls $f \neq 0, deg(f) \geq 1$ *und* $f = gh \Rightarrow deg(g) = 0, \; deg(h) = 0$
- f,g teilerfremd $\Leftrightarrow$ *es ex.* $h, k \in K[X]$ *mit* $1 = fh + gk$
- K-Algebra-Homo $\tau : \; K[X] \rightarrow V$ *mit* $\tau_v(X) = v$ (Einsetzungshomo)
- f(a)=0, a heißt Nullstelle und es gilt f=(X-a)q, mit $q \in K[X]$
- $f = (X-a)^m g$ *und* $g(a) \neq 0 -$ m heißt die Vielfachheit von a als Nullstelle
- K heißt algebraisch abgeschlossen, falls jedes f eine Nullstelle hat (C abgeschl.)
- zwei verschiedene normierte Polynome vom Grad 1 sind teilerfremd
- nur das Nullpolynom hat unendlich viele Nullstellen

lineare Abhängigkeit

$(v_1, ...; v_n)$ *mit* $v_i \in V$ *heißt linear abhängig*
wenn $a_1, ..., a_n \in K$ *existieren mit* $(a_1, ..., a_n) \neq 0$ *und* $\sum\limits_{n=1}^{n} a_i v_i = 0$

$0 \in M \; \Rightarrow \; M$ *ist l.a.*
$M = v \; , \; v \neq 0 \; \Rightarrow \; M$ *ist l.u.*
$M' \subseteq M \; , \; M'$ *l.a.* $\Rightarrow \; M$ *ist l.a.*
$M' \subseteq M \; , \; M$ *l.u.* $\Rightarrow \; M'$ *ist l.u.*
Matrix in Zeilenstufenform : von 0 verschiedenen Zeilen und Spalten l.u.

Eigenwert und Eigenvektor

EW von φ $(bzw.\ A)$ $falls\ 0 \neq v\ existiert\ mit\ \varphi(v) = av\ (bzw.\ Av = av)$
EV zum EW falls gilt: $\varphi(v) = av\ \ bzw.\ \ Av = av$
$V(a, \varphi) \neq 0\ bzw.\ V(a, A) \neq 0$ heißt der Eigenraum von φ zum Eigenwert a

- $V(0, \varphi) = Kern(\varphi)$
- Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig
- $\varphi \in End_K(V)$ heißt **diagonalisierbar**, falls eine Basis B von V existiert, so daß $M_B(\varphi)$ Diagonalmatrix ist
- $A \in K^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, falls $T \in GL_n(K)$ existiert mit $T^{-1}AT$ Diagonalmatrix
- φ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ V besitzt Basis aus EV von φ
- A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ φ_A diagonalisierbar
- besitzt φ n paarweise versch. EW, dann ist φ diagonalisierbar
- Hat φ den Eigenwert 0, so ist φ nicht invertierbar
- Hat φ^2 den Eigenwert 0, so hat φ ebenfalls den Eigenwert 0
- Ist φ injektiv, so ist 0 kein Eigenwert
- Ist $\varphi^{2n} = 0$, so ist $\varphi^n = 0$

- A, B *heißen* **ähnlich** , $falls\ T \in GL_n(k)\ existiert\ mit\ B = T^{-1}AT$
- A ist ähnlich zu obere $\triangle$ -matrix $\Leftrightarrow$ das char. Polynom zerfällt in Linearfakt.
- A diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ μ_A zerfällt in Produkt von paarw. versch. Linearfaktoren
- ähnliche Matrizen beschreiben den gleichen Endo nur bzgl. verschiedener Basen
- $XE_n - A \in K[X]^{n \times n}$ heißt die charakteristische Matrix von A
- $\chi_A := det(XE_n - A) \in K[X]$ heißt das charakteristische Polynom
- Es ist stets der Grad von $\chi_A =$ n
- Rang = n $\Leftrightarrow \chi_A(0) \neq 0$
- Rang = n $\Leftrightarrow \mu_A(0) \neq 0$
- sei $T \in GL_n(K),\ dann\ gilt:\ \chi_{T^{-1}AT} = \chi_A$
- $\varphi \in End_K(V),\ B\ Basis\ von\ V,\ A := M_B(\varphi)\ und\ \chi_\varphi = \chi_a$
- $\varphi(A) := \varphi(a_{ij})\ Ringhomo\ dann\ ist\ det(\varphi(A)) = \varphi(det(A))$
- A ähnlich zu Dreiecksmatrix $\Rightarrow$ $\chi_A = \prod\limits_{i=1}^{n} X - a_{ii}$
- Sp(A) $:= \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} \in R$ heißt die Spur von A
- Sp(AB)=Sp(BA) und $Sp(T^{-1}AT) = Sp(A)$

-**Begleitmatrix** C(f) von f (normiert) $:= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

- f normiert $\Rightarrow$ $\chi_{C(f)} = f$
- $U \leq V\ heißt\ \varphi - invariant,\ falls\ \varphi(U) \leq U\ ist$

$End_K(V)\ ist\ K - VR\ mit$
$$\begin{aligned} + :\ & End_K(V) \times End_K(V) \ \Rightarrow\ End_K(V) \\ & (\varphi + \psi)(v) \ = \ \varphi(v) + \psi(v) \\ \cdot :\ & K \times End_K(V) \ \Rightarrow\ End_K(V) \\ & (a\varphi)(v) \ := \ a\varphi(v) \end{aligned}$$

$End_K(V)\ ist\ K - Algebra\ mit\ s.o.\ und$
$$\begin{aligned} \cdot :\ & End_K(V) \times End_K(V) \ \Rightarrow\ End_K(V) \\ & (\varphi, \psi) \ \Rightarrow\ \varphi \circ \psi \end{aligned}$$

Ist B eine basis von V, dann ist $M_B :\ End_K(V) \ \Rightarrow\ K^{n\times n},\ \varphi \ \Rightarrow\ M_B(\varphi)$

Satz von Cauly-Hamilton : $\chi_\varphi(\varphi) = 0\ bzw.\ \chi_A(A) = 0$

Minimalpolynom $\mu_A \in K[X], \deg(\mu_A) \geq 1\ mit :$
1. $\mu_A\ ist\ normiert$
2. $\mu_A(A) = 0$
3. $\mu_A \mid f\ \forall\ f \in K[X]\ mit f(A) = 0$

Jeder Teiler von χ_A ist in μ_A mindestens 1-mal enthalten

Ist B eine Basis von V, dann ist $\mu_\varphi = \mu_{M_B(\varphi)}$
Ist B ähnlich zu A, dann ist $\mu_A = \mu_B$
Ist B ähnlich zu A, dann ist Sp(A) = Sp(B)

$0 \neq f \in K[X]\ mit\ f(\varphi) = 0,\ g, h\ teilerfremd\ mit f = g \cdot g$
$U := Kern(g(\varphi)),\ W := Kern(h(\varphi))$
Dann sind U und W φ-invariant und es gilt:
$V = U \oplus W,\ d.h.\ V = U + W\ und\ U \cap W = 0$

Bilinear- und Sesquiform

Abbildung $\beta : V \times V \to K$
1. $\beta(v_1 + v_2, w) = \beta(v_1, w) + \beta(v_2, w)$
$\beta(av, w) = a\beta(v, w)\ \forall\ v, v_1, v_2, w \in V,\ a \in K$
2. $\beta(v, w_1 + w_2) = \beta(v, w_1) + \beta(v, w_2)$
$\beta(v, aw) = \overline{a}\beta(v, w)\ \forall\ v, w_1, w_2 \in V,\ a \in K$

symmetrisch bzw. hermitesch:
$\beta(v, w) = \underline{\beta(w, v)}\ \forall\ v, w \in V$
$\beta(v, w) = \overline{\beta(w, v)}\ \forall v, w \in V$

Ist β sym. bzw. herm., dann ist β Skalarprodukt, wenn β positiv definit
d.h. $\beta(v, v) > 0\ \forall v \in V,\ v \neq 0$

Cauchy-Schwarze-Ungleichung
$|\ (v_1, v_2)\ |^2 \leq\ (v_1, v_1)(v_2, v_2)$
$|\ (v_1, v_2)\ |^2 =\ (v_1, v_1)(v_2, v_2)\ \Leftrightarrow\ v_1, v_2\ sind\ l.a.$

V e.d. und β eine Bilinearform auf V, $B = (v_1, ..., v_n)\ Basis\ von\ V$
dann heißt $G_B(\beta)\ :=\ (\beta(v_i, v_j))_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n \times n}\ die\ Gram-Matrix\ bzgl.\ B$

$A \in R^{n \times n}$ heißt positiv definit, wenn $A = A^t\ und\ v^t A v > 0\ \forall\ 0 \neq\ v \in R^n$
$A \in C^{n \times n}$ heißt positiv definit, wenn $A = \overline{A}\ und\ v^t A \overline{v} > 0\ \forall v \in C^n$
$T = M_A^{A'}(id_V)\ ist\ BWM,\ A, A'\ Grammatrizen(\beta)\ \Rightarrow\ A' = T^t A \overline{T}$

Länge,Winkel,Orthogonalität

K=R : (V,(,)) euklidischer Raum
K=C : (V,(,)) unitaerer Raum

1. $\|\ \|$ ist Norm auf V ($Laenge\ L = \sqrt{< v, v >}$) mit den Eigenschaften
$\|\ v\ \| \geq\ 0\ \forall\ v \in V\ und$
$\|\ v\ \| =\ 0\ \Leftrightarrow\ v = 0$
$\|\ av\ \| =\ |a| \cdot \|\ v\ \|$
$\|\ v_1 + v_2\ \| \leq \|\ v_1\ \|\ +\ \|\ v_2\ \|\ \ (Dreiecksungleichung)$
2. Polarisationsformeln
für K=R gilt: (v,w)= $\frac{1}{2}(\|\ v + w\ \|^2 - \|\ v\ \|^2 - \|\ w\ \|^2)$
für K=C gilt: (v,w)= $\frac{1}{4}(\|\ v + w\ \|^2 - \|\ v - w\ \|^2 + i\ \|\ w + iw\ \|^2 - i\ \|\ v - iw\ \|^2)$
3. für $0 \neq v,\ 0 \neq w \in V\ gilt :\ |\ \frac{(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}\ | \leq\ 1$

V euklidisch, v,w$\neq$ 0 $\Rightarrow\ -1 \leq\ \frac{(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}\ \leq 1$

$cos(\alpha)\ =\ \frac{(v,w)}{\|v\| \cdot \|w\|}\ =\ (\frac{v}{\|v\|}\ ,\ \frac{w}{\|w\|})$
α heißt der Winkel zwischen v und w
v,w heißen orthogonal $\Leftrightarrow\ \alpha = \frac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ cos(\alpha) = 0\ \Leftrightarrow\ (v, w) = 0$

Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (Beispiel)

gegeben : v_1, v_2, v_3
1. normalisiere v_1 : $w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$
2. x $= v_2 - < v_2, w_1 > w_1$: $w_2 = \frac{x}{\|x\|}$
3. y $= v_3 - < v_3, w_1 > w_1 - < v_3, w_2 > w_2$: $w_3 = \frac{y}{\|y\|}$

orthogonal, unitär

Eine Basis $(v_1, ..., v_n)$ von V heißt Orthonormalbasis (ONB) von V falls gilt:
$(v, v_j) = \delta_{ij}\ 1 \leq i, j \leq n$
$U^{\perp} := \{v \in V \mid (u, v) = 0\ \forall\ u \in U\}$ heißt der Orthogonalraum zu U

Sei $dim_K(V)$=n. V besitzt ONB
Ist $A \in K^{n\times n}$ *positiv definit, dann ex.* $S \in GL_n(K)$ *mit* $A = S^t\overline{S}$
Ist $U \leq V$, *dann ist* $V = U \oplus U^{\perp}$ *(d.h.* $V = U + U^{\perp}$ *und*$U \cap U^{\perp} = \{0\}$)
Insbesondere ist dimV = dimU + dim$U^{\perp}$

$\varphi \in End_K(V)$ *heißt orthogonal, falls* $K = R$ *(bzw unitär, falls* $K = C$*) und es gilt :*
$(\varphi(v), \varphi(w)) = (v, w)$

$A \in R^{n\times n}$ *heißt orthogonal, falls* $A^t A = E_n$
$A \in C^{n\times n}$ *heißt unitär, falls* $A^t\overline{A} = E_n$

$O(n) := \{A \in R^{n\times n} \mid A$ *orthogonal*$\}$ *heißt orthogonale Gruppe*
$U(n) := \{A \in C^{n\times n} \mid A$ *unitär*$\}$ *heißt unitäre Gruppe*

Sei V n-dimensional und B eine ONB von V. Sei $\varphi \in End_K(V)$ *und*
$A = M_B(\varphi)$. Dann gilt:
A orthogonal (bzw. unitär) $\Leftrightarrow \varphi$ orthogonal (bzw. unitär)

Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt:
A orthogonal (bzw. unitär) $\Leftrightarrow$ Spalten von A bilden ONB von K^n *bzgl.* $< , >$

O(n)$\leq GL_n(R)$, $U(n) \leq GL_n(C)$

Sei A$\in C^{n\times n}$. $A^t := \overline{A^t}$ heißt die zu A adjungierte Matrix
$\varphi \in End_K(V)$ heißt selbstadjungiert, falls gilt: $(\varphi(v), w) = (v, \varphi(w))$
φ selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ $\overline{A^t} = A$

Spekralsatz

Sei A$\in R^{n\times n}$ symmetrisch.
Dann existiert ein a$\in R\ mit\ \chi_A(a)=0$. A besitzt einen reellen Eigenwert.

Sei $\varphi \in End_K(V)$ *selbstadjungiert. Sei* $A \in K^{n\times n}$ *und* $\overline{A^t} = A$ *(d.h. A symmetrisch/hermitesch)*

1. Es ex. ONB von V, die aus EV von φ besteht
2. **Satz von der Hauptachsentransformation**
   K=R: Es ex. $S \in O(n)$, so daß S^tAS eine Diagonalmatrix ist,
   deren Diagonaleintrge die EW von A sind.
3. K=C: Es ex. $S \in U(n)$, so daß S^tAS eine Diagonalmatrix ist,
   deren Diagonaleinträge die EW von A sind.

$\overline{A^t} = A$, (d.h. symmetrisch oder hermitesch) $\Rightarrow$ A ist diagonalisierbar.

orthogonale Endormorphismen

Sei $A \in O(2)$*. Dannex.* $\alpha \in R$ $0 \le \alpha \le 2\pi$ *mit :*

1. A=$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}$

oder

2. A=$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}$

Im Fall 1 ist $\varphi_A :\ R^2 \Rightarrow\ R^2$ eine Drehung um den Winkel α und
$\chi_A = X^2 - 2\cdot cos(\alpha)X + 1$.
Im Fall 2 ist φ_A eine Spiegelung an der Geraden durch (0,0),(cos($\frac{\alpha}{2}$)$, sin(\frac{\alpha}{2})$)
und A ist ähnlich zur $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Sei $\varphi \in End_R(V\ orthogonal)$.

1. Ist W $\le$ V $\varphi-$invariant, dann ist auch $W^\perp\ \varphi - invariant$ und es gilt
   V=W$\oplus W^\perp$
2. Es ex. $W\ \le V\ \varphi - invariant$ mit $dim_R(W) \le 2$

Sei $\varphi \in End_R(V\ orthogonal)$. Dann ex. ONB B von V mit

$$M_B(\varphi) = \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$$

mit $A_j = 1 \in R^{1\times 1}$, $oder A_j = -1 \in R^{1\times 1}\ oder$

$$A_j = \begin{pmatrix} cos(\alpha_j) & -sin(\alpha_j) \\ sin(\alpha_j) & cos(\alpha_j) \end{pmatrix} \in\ R^{2\times 2}$$