Lösungsvorschlag - LA1 NHK01/02

Aufgabe 9:

Es sei $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Das Minimalpolynom μ_A von A sei gleich $\prod_{i=0}^{k} (X - \alpha_i)$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq k \leq n$ und es gelte $\alpha_i \neq \alpha_j$ für $i \neq j$ und $\alpha_i^{n_i} = 1$ für gewisse $1 \leq n_i \in \mathbb{N}$ und alle $1 \leq i \leq k$. Zeigen Sie, dass es ein $1 \leq m \in \mathbb{N}$ gibt, für das $A^m = E_n$ ist.

Die Aufgabenstellung sieht komplizierter aus als sie eigentlich ist. Zunächst zerfällt das Minimalpolynom in paarweise verschiedene Linearfaktoren, wobei jeder Eigenwert der Matrix einspotent ist (d.h. es existiert eine Potenz dieses Eigenwertes die 1 ist, z.B. $\alpha^6 = 1$).

Da A paarweise verschiedene Eigenwerte hat, ist A diagonalisierbar, also gilt:

$$\exists B \in GL_n(\mathbb{C}), A' \in \mathbb{C}^{n \times n} : A = B \cdot A' \cdot B^{-1}$$

Mit einer Diagonalmatrix A'. Auf der Hauptdiagonalen von A' stehen bei dieser Darstellung die Eigenwerte von A. Setzt man nun $z = lcm\left(\{n_1, ..., n_k\}\right)$ als kleinstes gemeinsames Vielfaches von $n_1, ..., n_k$, so gilt für A^z:

$$\begin{aligned} A^z &= \left(B \cdot A' \cdot B^{-1}\right)^z \\ &= B \cdot A' \cdot \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{E_n} \cdot A' \ldots \cdot B \\ &= B \cdot A'^z \cdot B^{-1} \end{aligned}$$

Potenziert man eine Diagonalmatrix, werden lediglich die Diagonalelemente potenziert, also die Eigenwerte die auf der Diagonalen von A' stehen. Da für alle n_i gilt $n_i | z$ wird jeder Diagonaleintrag zu 1.

$$\begin{aligned} A^z &= B \cdot E_n \cdot B^{-1} \\ &= B \cdot B^{-1} \\ A^z &= E_n, \ q.e.d. \end{aligned}$$

Aufgabe 10:

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ für ein $1 \leq n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $f, g \in K[X]$ zwei Polynome. Zeigen Sie, dass die Matrizen $f(A)$ und $g(A)$ vertauschbar sind, dass also $f(A) \cdot g(A) = g(A) \cdot f(A)$ ist.

Zunächst setze $m := \deg f, n := \deg g$. Dann gilt $f(A) = \sum_{k=0}^{m} a_k A^k$ und $g(A) = \sum_{k=0}^{n} b_k A^k$. Das Produkt von Polynomen ist über die Faltung definiert:

$$\begin{aligned} f(A) \cdot g(A) &= g(A) \cdot f(A) \\ \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} A^k &= \sum_{k=0}^{m+n} \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l A^k \end{aligned}$$

Das ganze läuft dann darauf hinaus, das genau alle Koeffizienten vor dem A^k gleich sein müssen, also die Summanden für die jeweiligen $k \in \underline{m+n}$.

$$\Leftrightarrow \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} A^k = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l A^k, \forall k \in \underline{m+n}$$

Substitution der Indizies mit der Funktion $u_{(l)} = k - l$, k fest:

$$\Leftrightarrow \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = \sum_{u=k}^{k-k} a_{k-u} b_u = \sum_{u=k}^{0} a_{k-u} b_u = \sum_{u=0}^{k} a_{k-u} b_u = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} b_l$$

Bis auf die Bennenung die Indizes sind die Summen gleich. Also gilt q.e.d.

Aufgabe 12:

Es sei $1 \leq n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mit $A^3 = E_n$. Zeigen sie dass A Diagonalisierbar ist.

Die Matrix A ist genau dann diagonalisierbar, wenn ich Minimalpolynom μ_A in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Aus $A^3 = E_n$ folgt $A^3 = A^0 \Rightarrow A^3 - A^0 = 0$, also hat das Polynom $p \in K[X], p = X^3 - 1$ eine Nullstelle bei $p(A)$. Nach Caley-Hamilton gilt dann: $\mu_A | p$. Hier ist leicht zu sehen das $\mu_A = X^3 - 1$ ist. Ebenso schnell sieht man, das $\mu_A(1) = 0$ ist. Da $\deg \mu_A = 3$ gilt, muss es drei paarweise verschiedene Eigenwerte $1, p, q \in \mathbb{C}$ geben, so dass das Minimalpolynom zefällt in:

$$
\begin{aligned}
\mu_A &= X^3 - 1 \\
&= (X-1)(X-p)(X-q) \\
&= X^3 - (p+q+1)X^2 + (pq+p+q)X - pq
\end{aligned}
$$

Ähnlich dem Verfahren bei der Partialbruchzerlegung kann man hier drei Gleichungen folgern:

1. $p \cdot q = 1$
2. $p + q + 1 = 0 \left(\Rightarrow p^2 + p + 1 = 0\right)$
3. $p + q + pq = 0$

Von dieser Stelle an ist die Lösung der Aufgabe ein gigantisches Zahlengewusel. Es gilt im Prinzip nur jeweils einen Wert für p und q zu finden, so das p, q die drei Gleichungen erfüllen. Den Beweis schliesst man dadurch, daß man zeigt, das die drei Werte $\{1, p, q\}$ paarweise verschieden sind.

Aufgabe 13:

Matrix einfach mit Gauß bearbeiten. Wem multiplizieren in solchen kreativen Körpern zu fehleranfällig erscheint, man kann die gleichen Operationen auch durch addieren durchführen, was sich in dem Körper recht naheliegend war. Als Ergebnis erhalte ich nach Gauß:

$$
A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}
$$

Lösungsvorschlag - LA1 NHK05/06

Aufgabe 6:

Berechnen Sie die Determinante, das charakteristische Polynom χ_A un einen Eigenvektor v der folgenden Matrix $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 5 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinante:

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 5 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \det \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 5 & -11 \end{bmatrix} = 45 - 44 = 1$$

Char. Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_A = \det(\lambda E_3 - A) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 9 & 0 \\ -5 & \lambda + 11 & 5 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{bmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \det \begin{bmatrix} \lambda - 4 & 9 \\ -5 & \lambda + 11 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)\left[(\lambda - 4)(\lambda + 11) + 45\right] \end{aligned}$$

Eigenvektor zum Eigenwert 1:

$\exists v \in \mathbb{Q}^3 : Av = 1v = v$, wobei v der gesuchte Vektor ist, also

$$\begin{aligned} Av = v \Leftrightarrow & \begin{bmatrix} 4 & -9 & 0 \\ 5 & -11 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \\ & \Leftrightarrow 4v_1 - 9v_2 = v_1 \wedge 5v_1 - 11v_2 - 5v_3 = v_2 \\ & \Rightarrow -3v_1 = -9v_2 \wedge 5v_1 - 5v_3 = 12v_2 \\ & \Rightarrow v_1 = 3v_2 \wedge -3v_2 = -5v_3 \\ & \Rightarrow v = \begin{bmatrix} 3s \\ s \\ \frac{3}{5}s \end{bmatrix}, s \in \mathbb{Q}\backslash\{0\} \end{aligned}$$

Aufgabe 7:

Sei $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit 2 Elementen. Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{F}_2^{5\times 1}$ mit $Ax = b$, wobei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 5}$ und $b \in \mathbb{F}_2^{4\times 1}$ die folgenden sind:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ b := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Gaußalgorithmus:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow x_4 = 0 \wedge x_5 = 1 \wedge x_1 + x_2 = 1 \wedge x_1 + x_3 = 0$

$\Rightarrow x_4 = 0 \wedge x_5 = 1 \wedge x_2 = 1 - x_1 \wedge x_1 = x_3$

$\Rightarrow x_4 = 0 \wedge x_5 = 1 \wedge x_2 = 1 - x_3 \wedge x_1 = x_3$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} s \\ 1-s \\ s \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, s \in \mathbb{F}_2 \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \vee x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 8:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix, für die $A^3 + A^2 + A + E_3 = 0$ ist, wobei E_3 die 3×3-Einheitsmatrix ist.

(a)

Zeigen Sie, dass das Minimalpolynom μ_A von A einTeiler von $X^4 - 1$ ist.

Zuerst entspricht $X^4 - 1 = (X-1)(X^3 + X^2 + X + 1)$. Wobei $p = X^3 + X^2 + X + 1$ das zu $A^3 + A^2 + A + E_3$ gehörige Polynom ist. Da p das Polynom $X^4 - 1$ teilt ist nurnoch zu zeigen das μ_A ebenfalls p teilt (Transitivität von $a|b$). Einzige Nullstelle von p ist $p_{(-1)} = 0$. Nach Faktorisierung von p ist also entweder $p_1 = (X+1)(X^2+1)$, $p_2 = (X^2+1)$ oder $p_3 = (X+1)$ das Minimalpolynom. Nach Caley-Hamilton ergibt sich $\mu_A = X^3 + X^2 + X + 1$. $\mu_A | X^4 - 1$ wurde bereits zu Anfang gezeigt.

(b)

Es sei zusätzlich $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Was ist dann A^{2006}?

Mit gegebenem A^2 ergibt sich $A^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Also folgt $A^{2006} = A^{2004} \cdot A^2 = \left(A^4\right)^{501} \cdot A^2 = E_3^{501} \cdot A^2 = A^2$.

Aufgabe 9:

Es seien K ein Körper, V und W K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Zeigen Sie: Sind $v, w \in V$ und ist $\left(\varphi_{(v)}, \varphi_{(w)}\right)$ linear unabhängig, dann ist (v, w) linear unabhängig.

Indirekter Beweis:

$$\begin{aligned} (v,w)\ l.a. &\Rightarrow \exists \lambda \in K : \lambda v = w \\ &\Rightarrow \varphi_{(\lambda v)} = \varphi_{(w)} \\ &\Rightarrow \lambda \varphi_{(v)} = \varphi_{(w)} \\ &\Rightarrow \left(\varphi_{(v)}, \varphi_{(w)}\right)\ l.a. \\ &\Rightarrow q.e.d. \end{aligned}$$

Aufgabe 10:

Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $X, Y \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ zwei Matrizen. Zeigen Sie ,dass die Menge $\{A \in \mathbb{Q}^{n \times n} | AX = YA\}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{n \times n}$ ist.

Definiere $U := \{A \in \mathbb{Q}^{n \times n} | AX = YA\}$, zu Zeigen also: $U \leq \mathbb{Q}^{n \times n}$.

UVR-Kriterium 1 $(U \neq \emptyset)$

$$\begin{aligned} &0 = 0 \\ &\Rightarrow 0X = Y0 \\ &\Rightarrow 0 \in U \\ &\Rightarrow U \neq \emptyset \end{aligned}$$

UVR-Kriterium 2 $(s \in \mathbb{Q}, A \in U \Rightarrow sA \in U)$

$$\begin{aligned} &AX = YA \\ &\Rightarrow s(AX) = s(YA) \\ &\Rightarrow (sA)X = Y(sA) \\ &\Rightarrow (sA) \in U \end{aligned}$$

UVR-Kriterium 3 $(A, B \in U \Rightarrow (A + B) \in U)$

$$\begin{aligned} & AX = YA \wedge BX = YB \\ & \Rightarrow AX + BX = YA + YB \\ & \Rightarrow (A + B)X = Y(A + B) \\ & \Rightarrow (A + B) \in U \end{aligned}$$

$\Rightarrow U \leq \mathbb{Q}^{n \times n}$.

Aufgabe 11:

Es sei $n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$ und $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^{n\times 1} \times \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}$ eine beliebige Sesquilinearform auf $\mathbb{C}^{n\times 1}$. Weiter sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $\varphi_A : \mathbb{C}^{n\times 1} \to \mathbb{C}^{n\times 1}, v \mapsto Av$. Es gelte $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ für alle $v, w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ (das heißt, φ_A ist selbstadjungiert bezüglich $\langle\ ,\ \rangle$). Sei $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ Eigenvektor von φ_A zum Eigenwert a und $w \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ ein Eigenvektor von φ_A zum Eigenwert b mit $a \neq \overline{b}$. Zeigen Sie, das $\langle v, w\rangle = 0$ ist.

Wegen gegebenen Eigenwerten gilt: $Av = av$, $Aw = bw$. Damit gilt $\langle Av, w\rangle = \langle av, w\rangle = a \langle v, w\rangle$ und $\langle v, Aw\rangle = \langle v, bw\rangle = \overline{b} \langle v, w\rangle$. Aus der in der Aufgabenstellung beschriebenen Selbstadjungiertheit $\langle Av, w\rangle = \langle v, Aw\rangle$ folgt dann $\overline{b} \langle v, w\rangle = a \langle v, w\rangle$. Nach Aufgabenstellung gilt auch $a \neq \overline{b}$, damit bleibt für die Gleichung aus der Selbstadjungiertheit nur die Lösung $\langle v, w\rangle = 0$.

Lösungsvorschlag - LA1 SKL Teil II 01/02

Aufgabe 9:

Invertieren Sie die Matrix

$$:= \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

mit Hilfe des in der Vorlesung vorgestellten Verfahrens. Dokumentieren Sie genau, welche Umformungen Sie in jedem Schritt vornehmen und geben Sie am Ende die Matrix A^{-1} explizit an.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -5 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 0 & -12 & -3 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -5 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right]$$

$$\rightsquigarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 4 \\ 6 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 10:

Es sei $A \in \mathbb{F}_3^{4\times 4}$ die folgende Matrix ($\mathbb{F}_3 = \{-1, 0, 1\}$):

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A und geben Sie die Eigenwerte von A an. Bestimmen Sie die Dimension sämtlicher Eigenräume von A. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A. Ist A in $\mathbb{F}_3^{4\times 4}$ diagonalisierbar?

Char. Polynom:

$$\chi_A = \det(XE_4 - A) = (X+1) \cdot \det \begin{bmatrix} X-1 & -1 & 1 \\ 0 & X & -1 \\ 0 & -1 & X \end{bmatrix}$$
$$= (X+1)(X-1) \cdot \det \begin{bmatrix} X & -1 \\ -1 & X \end{bmatrix}$$
$$= (X+1)(X-1)(X^2-1)$$
$$= (X^2-1)^2$$
$$= (X+1)^2(X-1)^2$$

Eigenwerte von A:

Aus $\chi_A(x) = 0$ folgt $x \in \{-1, 1\}$. Die Matrix A besitzt die Eigenwerte -1 und 1.

Dimension der Eigenräume:

$$\dim(Eig(A,1)) = \dim(\ker(1E_4 - A))$$
$$= \dim(\ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}) = \dim(\ker \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = 2$$

$$\dim(Eig(A,-1)) = \dim(\ker(-1E_4 - A))$$
$$= \dim(\ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}) = \dim(\ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = 1$$

Minimalpolynom:

Für das Minimalpolynom kommen einige Polynome in Frage. Mittels Caley-Hamilton ($\mu_A(A) = 0$) findet man durch Ausrechnen der Polynom das Minimalpolynom:

- $[(X+1)(X-1)]_{(A)} = (X^2-1)_{(A)} \neq 0$
- $\left[(X+1)(X-1)^2\right]_{(A)} = (X^2-1)(X-1)_{(A)} \neq 0$
- $\left[(X+1)^2(X-1)\right]_{(A)} = (X^2-1)(X+1)_{(A)} = 0$

Also ist $\mu_A = (X+1)^2(X-1)$ das Minimalpolynom.

Ist die Matrix A diagonalisierbar?

Nein, denn die Summe der geometrischen Vielfachheiten (Summe der Dimensionen der Eigenräumen) ist kleiner 4. (Es gibt nicht genug linear unabhängige Eigenvektoren um eine Eigenvektorbasis zu konstruieren.)

Aufgabe 11:

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung: Ist V ein K-Vektorraum über einem Körper K und sind u, v und w Vektoren aus V mit der Eigenschaft, dass jedes Paar $(u, v), (u, w)$ und (v, w) linear unabhängig ist, dann ist auch die Folge (u, v, w) linear unabhängig.

Die Behauptung ist falsch. Wähle $u, v \in V$ linear unabhängig. Wähle $w = u+v$, dann gilt $(u, v), (u, w)$ und (v, w) linear unabhängig, aber $(u, v, w) = (u, v, u+v)$ linear abhängig.

Aufgabe 12:

Es sei $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ und $\varphi : \mathbb{Q}^{2\times 2} \to \mathbb{Q}^{2\times 2}$ die Abbildung, die durch die Vorschrift $\varphi(B) = B \cdot A$ (normales Matrixprodukt!) für alle $B \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$ definiert ist.
Zeigen Sie, dass φ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist. Berechnen Sie die Matrix $\mathcal{M}^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}(\varphi)$ der linearen Abbildung φ bezüglich der geordneten Basen

$$\mathcal{B} := \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

und

$$\mathcal{C} := \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

Geben Sie eine Basis von $Kern(\varphi)$ an. Geben Sie eine Basis von $Bild(\varphi)$ an.

Linearität:

Mit $M, N \in \mathbb{Q}^{2\times 2}, k \in \mathbb{Q}$ folgt

- $\varphi(kM) = (kM)A = k(MA) = k\varphi(M)$
- $\varphi(M + N) = (M + N)A = MA + NA = \varphi(M) + \varphi(N)$

$\Rightarrow \varphi$ ist $\mathbb{Q}$-linear.

Basiswechselmatrix:

Den n-ten Basisvektor aus der Basis $\mathcal{B}$ abbilden und aus den Basisvektoren der Basis $\mathcal{C}$ linearkombinieren. Die Koeffizienzen für die Linearkombination ergibt die n-te Spalte der Matrix $\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}(\varphi)$.

$$\varphi(b_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \kappa_{\mathcal{C}}(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Analog für die Basisvektoren $b_2, ..., b_4$ aus $\mathcal{B}$ folgt dann

$$\mathcal{M}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Basis des Kerns:

Betrachtet man die Abbildungsvorschrift für eine beliebige Matrix, erhält man:

$$\varphi(\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} x-y & x-y \\ z-w & z-w \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} Kern(\varphi) &= \{M \in \mathbb{Q}^{2\times 2} | \varphi(M) = 0\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} | \begin{bmatrix} x-y & x-y \\ z-w & z-w \end{bmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2} | x = y \wedge z = w \right\} \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Also ist die Basis des Kerns $(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})$.

Basis des Bildes:

Sei $\mathcal{M}$ die Darstellungsmatrix der Abbildung φ.

$$\mathcal{M} := \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow Bild(\varphi) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

Also ist die Basis des Bildes $(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix})$.

Aufgabe 13:

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n \times n}$ eine Matrix, wobei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$ ist. Das Minimalpolynom von A sei gleich X^{n-1}. Zeigen Sie, dass dann das charakteristische Polynom von A gleich X^n ist.

Zunächst ist bekannt $\mu_A = X^{n-1}$ und $\deg \chi_a = n$ sowie $\mu_A | \chi_A$. Außerdem wissen wir das μ_A die gleichen Nullstellen besitzt wie χ_A, nur in evtl. unterschiedlicher Vielfachheit. Es gilt also:

$$\mu_A | \chi_A \Rightarrow \exists p \in K[X] : \chi_A = p \cdot \mu_A$$

Wobei für die Grade der Polynome gilt:

$$\deg \chi_A = \deg(p \cdot \mu_A) = \deg p + \deg \mu_A \Rightarrow \deg p = \deg \chi_A - \deg \mu_A = n - (n-1) = 1$$

Also ist p von der Form $p = (X - \alpha)$ mit $\alpha \in K$. Da μ_A und χ_A die selben Nullstellen haben, folgt $\alpha = 0$, da μ_A keine anderen Nullstellen als die 0 selbst hat. Also ist $p = X - 0 = X$ und damit $\chi_A = \mu_A \cdot X = X^{n-1} \cdot X = X^n$.

Lösungsvorschlag - LA1 VDK00/01

Aufgabe 11:

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $v \in K^{n \times 1}$ ein Spaltenvektor ungleich 0. Weiter sei $A := v \cdot v^t$. Zeigen Sie, dass A den Eigenwert 0 hat. Welche Dimension hat der Eigenraum von A zum Eigenwert 0?

Sei $v := \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ dann gilt $A = v \cdot v^t = [v_1 \cdot v, v_2 \cdot v, \ldots, v_n \cdot v]$. Die Spalten der Matrix sind also lediglich Vielfache des Vektors v. Dann folgt direkt:

$$rg_{(A)} = 1 < 2 \leq n \Rightarrow 0 \; ist \; EW \; zu \; A, \; q.e.d.$$

Weiter gilt für die Dimension des Eigenraumes zum Eigenwert 0

$$\begin{aligned} \dim\left(Eig_{(A,0)}\right) &= \dim\left(\ker_{(A-0E_n)}\right) \\ &= \dim\left(\ker_{(A)}\right) \\ &= n - rg(A) \\ &= n-1, \; q.e.d. \end{aligned}$$

Aufgabe 12:

Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Aussage? Für alle $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ gilt $A \cdot A^t = A^t \cdot A$. Vergessen Sie nicht die Begründung.

Für $n = 1$ gilt die Aussage natürlich. Für $n = 2$ betrachte die Matrix $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, a \neq 0 \neq b, a, b \in \mathbb{Q}$. Dann ist $A^t = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$, wobei gilt

$$A \cdot A^t = \begin{bmatrix} a^2b^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix} = A^t \cdot A$$

Für größere n betrachte jeweils die Matrix $A = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & \multirow{2}{*}{0} \\ 0 & 0 & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & E_{n-2} \end{array}\right]$, wo sich das selbe Resultat ergibt. Also gilt die Aussage nur für $n = 1$.

Aufgabe 13:

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$ eine invertierbare Matrix. Zeigen Sie, dass es dann ein Polynom $f \in K[X]$ gibt, so dass $f_{(A)} = A^{-1}$ ist.

Es gilt $\chi_A = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k X^k$ (char. Pol.). Nach Caley-Hamilton gilt $\chi_A(A) = 0$, also

$$\chi_A(A) = \sum_{k=0}^{n} c_k A^k = \left(\sum_{k=1}^{n} c_k A^k\right) + c_0 A^0 = 0$$

Das lässt sich Umstellen zu

$$\sum_{k=1}^{n} c_k A^k = -c_0$$

Weiter gilt $c_0 = (-1)^n \det(A)$ (Übungsblatt) und wegen A invertierbar folgt $c_0 \neq 0$. Also kann man bedenkenlos durch $-c_0$ dividieren.

$$-\frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^{n} c_k A^k = 1$$

Und jetzt multipliziert man die gesamte Gleichung mit A^{-1}, was das gesuchte Polynom liefert:

$$A^{-1} = -\frac{1}{c_0} \sum_{k=1}^{n} c_k A^{k-1}, \ q.e.d.$$

Aufgabe 14:

Es sei K ein Körper, $2 \leq n \in \mathbb{N}$ und $A \in K^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix. Zeigen Sie, dass dann für jedes Polynom $f \in K[X]$ die Matrix $f(A)$ auch diagonalisierbar ist.

Setzt man eine diagonalierbare Matrix in ein Polynom ein, passieren folgende Dinge: Die Matrix wird potenziert, skaliert und aufsummiert. Zu zeigen ist also, dass diese drei Operationen die Diagonalisierbarkeit unangetastet lassen.
Die Matrix A ist diagonalisierbar genau dann, wenn eine Matrix $B \in GL_n(K)$ und eine Diagonalmatrix A' existieren, so dass gilt:

$$A = B \cdot A' \cdot B^{-1}$$

Zur Operation der Potenzierung: Es gilt also

$$\begin{aligned}
A^n &= \left(B \cdot A' \cdot B^{-1}\right)^n \\
&= \underbrace{\left(B \cdot A' \cdot B^{-1}\right) \cdot \ldots \cdot \left(B \cdot A' \cdot B^{-1}\right)}_{n\ mal} \\
&= B \cdot A' \cdot \underbrace{B^{-1} \cdot B}_{E_n} \cdot A' \ldots \\
A^n &= B \cdot A'^n \cdot B^{-1}
\end{aligned}$$

Da alle Potenzen von A' ebenfalls Diagonalmatrizen sind ist auch A'^n eine. Also ist A^n immernoch diagonalisierbar.

Für die Summation und die Skalierung von diagonalisierbaren Matrizen bleibt die Diagonalisierbarkeit ebenfalls unberührt, daher gilt die Aussage.