Scheinklausuren zur Linearen Algebra I vom Lehrstuhl B für Mathematik, Prof. Dr. W. Plesken

21. Oktober 2001

Vorwort

Dieses Skript stellt eine kleine Sammlung von Scheinklausuren der Linearen Algebra I zusammen (allerdings ohne Ankreuzteil), die vom Lehrstuhl B für Mathematik, Prof. Plesken gestellt wurden.

Diese Klausuraufgaben können helfen, sich einen Überblick darüber zu verschaffen, was in einer Klausur verlangt werden könnte. Aber diese Aufgaben sollten nur als Ergänzung zu der Vorlesung gesehen werden, da Aufgaben zum besseren Verständnis der Theorie beitragen, sie aber nicht ersetzen können. So ist eine (mehr oder weniger) gute Kenntnis der Theorie (eigentlich) Voraussetzung zum Lösen der Aufgaben. Umgekehrt kann auch die Theorie an Hand der Aufgaben verifiziert und gelernt werden — schließlich schwebt die Theorie (für sich alleine genommen) in Höhen, die zu erreichen oft nicht nur eine Leiter benötigt.

Die hier gesammelten Aufgaben können nicht alle Aufgabentypen vollständig wiedergeben, ebenso kann am Datum der Klausuren eine gewisse Aktualität der Klausur gesehen werden. Da zum Wintersemester 2000/2001 die Vorlesung von Prof. Plesken neu konzipiert wurde, kann es sein, dass weitere Aufgaben abgefragt werden, die hier nicht vorkommen. Ferner habe ich mir die Freiheit genommen, die Formulierung der Aufgaben und die dazugehörigen Lösungen dem Stand der „neueren“ Vorlesung anzupassen.

Ich würde mich freuen, wenn dieses Skript immer wieder mit neuen Klausuren aktualisiert wird.

Außerdem wünsche ich allen Studis, die die Vorlesung Lineare Algebra hören, viel Spaß und ein gutes Gelingen — and don’t panic, wie in großen Lettern auf dem Anhalter zu lesen ist — and remember: you live to live not to study. m. o. w.

1 Scheinklausuren zur Linearen Algebra I

1.1 1. Klausur im Wintersemester 1979/80

Aufgabe 1.1 Für welches $k \in \mathbb{R}$ ist das folgende lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrrl} & -x & & & +(k-3)z & = 1 \\ \wedge & 3x & + \quad 3y & + & 9z & = 3 \\ \wedge & 2x & +(k+2)y & + & 7z & = 4 \end{array}$$

(a) nicht lösbar,

(b) eindeutig lösbar,

(c) lösbar, aber nicht eindeutig lösbar?

Aufgabe 1.2 Sei $V_1 = (1,2,0,1,1), V_2 = (2,1,1,2,1)$ und $V_3 = (2,2,1,1,1), V_4 = (1,1,1,2,0), V = (1,1,1,1,0) \in K^5$. Bestimmen Sie eine Basis von $\mathfrak{T} = \langle V_1, V_2, V_3, V_4 \rangle$ und entscheiden Sie, ob $V \in \mathfrak{T}$, wenn

(a) $K = \mathbb{R}$,

(b) $K = \mathbb{F}_3$, der Körper mit 3 Elementen ist.

Aufgabe 1.3 Sei

$$\begin{aligned} R_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\} \\ R_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ R_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_2 \right\} \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ der Körper mit zwei Elementen ist. Für jedes $i \in \{1,2,3\}$ untersuche man, ob R_i mit der Matrizenmultiplikation ein Ring oder ein Körper ist.

Aufgabe 1.4 Sei $\mathfrak{T}_1 := \{f \in \mathrm{PolFu}_3(\mathbb{R}) \mid f(1) = 1\}$ und $\mathfrak{T}_2 := \{f \in \mathrm{PolFu}_3(\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$. Für jedes $i \in \{1,2\}$ untersuche man, ob $\mathfrak{T}_i$ ein Teilraum von $\mathrm{PolFu}_3(\mathbb{R})$ ist, und bestimme gegebenenfalls eine Basis und die Dimension von $\mathfrak{T}_i$. Dabei sei $\mathrm{PolFu}_3(\mathbb{R})$ die Menge aller Polynomfunktionen, die von Polynomen maximal 3. Grades (mit Nullpolynom) über $\mathbb{R}$ induziert werden.

Aufgabe 1.5 Sei K ein Körper und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{3\times 3},$$

$\mathfrak{U} = \{X \in K^{3\times 3} \mid AX = XA\}$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{U}$ ein Teilraum von $K^{3\times 3}$ ist, und geben Sie eine Basis von $\mathfrak{U}$ an. (Man nennt $\mathfrak{U}$ den Zentralisator von A.)

1.2 1. Klausur am 19. 12. 1987

Aufgabe 2.1 Bestimmen Sie alle reelle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrl} & x_1 & + \; x_2 & & & = 1 \\ \wedge & x_1 & + 2x_2 & + x_3 & + \; x_4 & = 1 \\ \wedge & x_1 & + \; x_2 & & + 2x_4 & = 2 \end{array}.$$

Aufgabe 2.2 A und B seien $m \times n$-Matrizen über dem Körper K. Zeigen Sie:

$$\text{Rang}(A+B) \leq \text{Rang}(A) + \text{Rang}(B)$$

Aufgabe 2.3 Sei $\mathfrak{U} = \langle (1,2,1,0), (-1,0,3,2), (1,-2,1,4) \rangle \subseteq \mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie $a,b,c \in \mathbb{R}$, so dass $((1,0,0,a),(0,1,0,b),(0,0$ eine Basis von $\mathfrak{U}$ ist.

Aufgabe 2.4 Zeigen Sie: Im Vektorraum $\mathfrak{V}$ ist (U,V,W) genau dann linear unabhängig, wenn $(U+V, V+W, W+U)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 2.5 Bestimmen Sie A^{-1} zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Aufgabe 2.6 In $\mathbb{R}^4$ seien $\mathfrak{U} = \langle (1,2,3,4), (1,0,0,1) \rangle$ und $\mathfrak{V} = \langle (1,0,1,0), (1,2,2,5) \rangle$. Bestimmen Sie je eine Basis von $\mathfrak{U}+\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$.

Aufgabe 2.7 Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (2y+z, x-4y, 3x)$. Bestimmen Sie die Matrix von f bezüglich der Basis $B = ((1,1,1),(1,1,0),(1,0,0))$.

Aufgabe 2.8 Sei f eine lineare Abbildung des Vektorraums $\mathfrak{V}$ in sich mit $f^2 = f$. Zeigen Sie:

(a) Für alle $V \in \text{Bild}(f)$ gilt: $f(V) = V$.

(b) $\mathfrak{V} = \text{Bild}(f) \oplus \text{Kern}(f)$ (direkte Summe).

Aufgabe 2.9 Sei $\mathfrak{V} = \mathbb{R}[x], \mathfrak{U} = (x^3+1)\mathbb{R}[x]$ und $\bar{p} = p + \mathfrak{U} \in \mathfrak{V}/\mathfrak{U}$ für $p \in \mathfrak{V}$. Stellen Sie $\overline{x^4+x^3+x^2+x+1}$ als Linearkombination in der Basis $(\bar{1}, \bar{x}, \bar{x^2})$ von $\mathfrak{V}/\mathfrak{U}$ dar.

1.3 2. Klausur am 23. 1. 1988

Aufgabe 3.1 Im EUKLID'ischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei die Standardbasis eine Orthonormalbasis. Ergänzen Sie den Vektor $(1,1,1)$ zu einer Orthogonalbasis.

Aufgabe 3.2 Im EUKLID'ischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei $B = ((1,0,1),(1,1,1),(0,0,1))$ eine Orthonormalbasis und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (0,0,z)$. Bestimmen Sie die Matrix von f^{ad} bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 3.3 Bestimmen Sie zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine invertierbare Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $B^{tr}AB$ eine Diagonalmatrix ist.

Aufgabe 3.4 Zeigen Sie: Jede Bilinearform Φ auf einem $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathfrak{V}$ lässt sich auf genau eine Weise als Summe zweier Bilinearformen Ψ_1 und Ψ_2 mit $\Psi_1(x,y) = \Psi_1(y,x)$ und $\Psi_2(x,y) = -\Psi_2(y,x)$ für alle $x,y \in \mathfrak{V}$ schreiben.

Aufgabe 3.5 Sei B eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathfrak{V}$, Φ die Bilinearform auf $\mathfrak{V}$ mit ${}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $f : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ linear mit ${}^Bf^B = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Zeigen Sie: f ist orthogonal bezüglich Φ.

Aufgabe 3.6 Sei Φ die Bilinearform des $\mathbb{R}^2$, bezüglich der $B = ((1,0),(1,1))$ eine Orthonormalbasis ist. Zeigen Sie: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \mapsto (x, x-y)$ ist symmetrisch bezüglich Φ.

Aufgabe 3.7 Für $X = (X_1, X_2, X_3)$ und $Y = (Y_1, Y_2, Y_3) \in \mathbb{R}^3$ sei das Skalarprodukt Φ definiert als

$$\Phi(X,Y) := X_1Y_1 + (X_2 + X_3)(Y_2 + Y_3) + X_3 + Y_3.$$

Bestimmen Sie die Matrix der Spiegelung an $\mathfrak{U} := \langle (1,0,0), (0,1,0) \rangle$ bezüglich der Standardbasis.

Aufgabe 3.8 Betrachten Sie $\mathbb{R}^{3\times 1}$ als Dualraum zu $\mathfrak{V} = \mathbb{R}^{1\times 3}$, d. h. identifiziere $A \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit $\underline{A} : \mathbb{R}^{1\times 3} \to \mathbb{R} : V \mapsto V \cdot A$. Bestimmen Sie die duale Basis zu $B = ((1,1,1), (1,2,2), (0,1,2))$.

Aufgabe 3.9 Für $p = a_0 + a_1 x$ und $q = b_0 + b_1 x \in \mathfrak{V} = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p = 0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(p) \leq 1\}$ sei $\Phi(p,q) = (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) + a_1 b_1$. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ als beste Approximation von $1 + x$ im Unterraum $\mathfrak{U} = \mathbb{R}$ bezüglich des Skalarproduktes Φ, wobei wir $\mathbb{R}$ mit der Menge der Polynome 0. Grades (plus Nullpolynom) identifizieren.

Aufgabe 3.10 Sei $K = \mathbb{F}_2$ und $\varepsilon : K[x] \to K^K : p \mapsto f_p$ (wobei f_p die Polynomfunktion von p ist). Ferner sei $\mathfrak{U} = \{p \in K[x] \text{ mit } \mathrm{Grad}(p) \leq 2\}$ und φ die Einschränkung von ε auf $\mathfrak{U}$. Bestimmen Sie die Matrix von φ bezüglich der Basen $(1, x, x^2)$ und $((1,0),(0,1))$ von $\mathfrak{U}$ bzw. K^K, wobei wir (a,b) mit der Abbildung $0 \mapsto a$ und $1 \mapsto b$ identifizieren.

1.4 1. Klausur am 14. 12. 1991

Aufgabe 4.1 Bestimmen Sie alle Lösungen über dem Körper $\mathbb{F}_3 = \{0,1,2\}$ der Restklassen modulo 3 des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrr}
 & x_1 & & & + & x_3 & & & = & 1 \\
\wedge & x_1 & + & x_2 & & & & & = & 0 \\
\wedge & 2x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\
\wedge & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 2
\end{array}$$

Aufgabe 4.2 A, B seien $n \times n$-Matrizen über dem Körper K. Zeigen Sie: $\mathrm{Rang}(BA) \leq \mathrm{Rang}(A)$.

Aufgabe 4.3 Für welches $t \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcl}
x - ty & = & 1 \\
\wedge (t-1)x - 2y & = & 1
\end{array}$$

(a) eindeutig lösbar,

(b) lösbar, aber nicht eindeutig,

(c) nicht lösbar?

Aufgabe 4.4 Im Vektorraum $\mathbb{R}^5$ seien

$$\begin{array}{rcl}
\mathfrak{U} & = & \langle (1,1,1,0,1), (2,1,0,0,1), (0,0,1,0,0) \rangle \quad \text{und} \\
\mathfrak{V} & = & \langle (1,1,0,0,1), (3,2,0,0,2), (0,1,1,1,1) \rangle.
\end{array}$$

Bestimmen Sie je eine Basis von $\mathfrak{U} + \mathfrak{V}$ und $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$.

Aufgabe 4.5 Bezüglich einer Basis $B = (B_1, B_2, B_3)$ des Vektorraums $\mathfrak{V}$ sei eine lineare Abbildung $f : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}$ gegeben durch die Matrix ${}^B f^B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Kern von f und die Menge aller $x \in \mathfrak{V}$ mit $f(x) = B_1 + B_2 + B_3$.

Aufgabe 4.6 Im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei $\mathfrak{U} = \langle (1,1,2,1), (1,1,3,2) \rangle$. Bestimmen Sie ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösungsmenge $\mathfrak{U}$ ist.

Aufgabe 4.7 Sei $\mathfrak{V} = \mathbb{R}[x]$ der Polynomring über $\mathbb{R}$, $\mathfrak{U} = (x^3 - x^2 + 1)\mathbb{R}[x]$ und $f : \mathfrak{V} \to \mathfrak{V}/\mathfrak{U} : p \mapsto p + \mathfrak{U}$. Stellen Sie $f(x^4)$ in der Basis $(f(1), f(x), f(x^2))$ von $\mathfrak{V}/\mathfrak{U}$ dar.

1.5 2. Klausur am 15. 2. 1992

Aufgabe 5.1 Sei $(B_1,\dots,B_3)$ eine Basis des Vektorraums $\mathfrak{V}$ über $\mathbb{R}$ und $f:\mathfrak{V}\to\mathfrak{V}$ die lineare Abbildung mit $f(B_1)=B_1+B_2+B_3$, $f(B_2)=B_1$ und $f(B_3)=B_2+t\cdot B_3$. Für welche $t\in\mathbb{R}$ ist f ein Isomorphismus?

Aufgabe 5.2 $B=(B_1,B_2,B_3)$ und $C=(C_1,C_2,C_3)$ seien Basen des Vektorraums $\mathfrak{V}$ über $\mathbb{R}$ mit $C_1=B_1+B_2$, $C_2=B_1+2B_2+B_3$, $C_3=B_1+B_2+B_3$ und $B^\star$ bzw. $C^\star$ die zugehörigen Dualbasen von $\mathfrak{V}^\star$. Schreiben Sie die Elemente von $B^\star$ als Linearkombination der Elemente von $C^\star$.

Aufgabe 5.3 Im EUKLID'ischen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei $((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$ eine Orthonormalbasis. Bestimmen Sie den Unterraum der zu $(1,0,0)$ orthogonalen Vektoren.

Aufgabe 5.4 Im EUKLID'ischen Vektorraum $\mathbb{R}^4$ sei die Standardbasis eine Orthonormalbasis und $\mathfrak{U}=\langle(1,2,2,0),(3,3,0,0)\rangle$. Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $(1,1,1,1)$ in $\mathfrak{U}$.

Aufgabe 5.5 Sei $\mathfrak{V}=\{p\in\mathbb{R}[x]\mid p=0 \text{ oder } \mathrm{Grad}(p)\le 2\}$ der Vektorraum der Polynome maximal 2. Grades und $B=(1,x,x^2)$ eine Basis von $\mathfrak{V}$. Ferner sei Φ eine symmetrische Bilinearform mit GRAMmatrix ${}_B\Phi^B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&3\\2&3&4\end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Orthogonalbasis von $\mathfrak{V}$.

Aufgabe 5.6 Sei $A=\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}$. Für welche $t\in\mathbb{R}$ existiert eine invertierbare Matrix $B\in\mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $B^{-1}AB$ eine Diagonalmatrix ist?

Aufgabe 5.7 Sei $\mathfrak{V}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f:\mathfrak{V}\to\mathfrak{V}$ linear mit $\mathrm{Bild}(f)\neq\{0\}$ und $f^2=f$. Zeigen Sie, dass 1 ein Eigenwert von f ist, und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum.

1.6 1. Klausur am 20. 12. 2000

Aufgabe 6.1 Sei $A:=\begin{pmatrix}2&1&0\\-3&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$. Berechnen Sie ein $B\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A\cdot B=I_3$. Geben Sie ein $\widetilde{B}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ an mit $\widetilde{B}\cdot A=I_3$.

Aufgabe 6.2 Sei $\mathfrak{V}:=\langle(1,2,2,2),(0,3,2,2),(3,1,1,3),(2,1,2,1)\rangle\le\mathbb{F}_5^4$. Bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von $\mathfrak{V}$.

Aufgabe 6.3 Sei $M=\{0,\dots,4\}$. Zeigen Sie:

(a) $S_M:=\{\nu\in M^M\mid\nu \text{ ist bijektiv}\}$ ist Gruppe bezüglich der Komposition $\circ$ und operiert auf M^M durch $(\nu,f)\mapsto\nu\circ f\circ\nu^{-1}$.

(b) Seien $f:M\to M:x\mapsto x^2+x+1 \bmod 5$ und $g:M\to M:x\mapsto x^2+4x+2 \bmod 5$. Liegen f und g in derselben Bahn unter der Operation aus (a)?

Aufgabe 6.4 Sei K ein Körper, $A\in K^{n\times m},B\in K^{m\times t}$. Zeigen Sie: $\mathrm{Rang}(A\cdot B)\le\mathrm{Rang}(A)$.

Aufgabe 6.5 Sei $p=x^3+2x+1\in\mathbb{F}_3[x]$. Bestimmen Sie ein $q\in\mathbb{F}_3[x]$ mit $q\cdot(x^2+x+1)+p\mathbb{F}_3[x]=1+p\mathbb{F}_3[x]$.

Aufgabe 6.6 Seien $f_i\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}},1\le i\le 3$ gegeben durch $f_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto 1,f_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\cos x,f_3:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\cos(2x)$. Zeigen Sie: $(f_1,f_2,f_3)\in(\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^3$ ist linear unabhängig. Geben Sie alle Funktionen $f\in\langle f_1,f_2,f_3\rangle$ an mit $f(0)=1,f(\frac{\pi}{2})=2,f(\pi)=-1$.

1.7 2. Klausur am 14. 2. 2001

Aufgabe 7.1 Sei $\mathfrak{V}$ ein 5-dimensionaler $\mathbb{F}_3$-Vektorraum mit Basis $B = (B_1, \ldots, B_5)$. Es seien zwei Teilräume von $\mathfrak{V}$ gegeben durch $\mathfrak{U}_1 := \langle B_1 + B_2 + B_3 + B_4 + B_5, B_3 + B_4 \rangle, \mathfrak{U}_2 := \langle B_1 + B_2, B_2 + B_3, B_1 + B_4 + B_5 \rangle$. Bestimmen Sie Basen für $\mathfrak{U}_1 + \mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$ sowie die Dimension der $\mathfrak{U}_i$.

Aufgabe 7.2 Seien $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ Vektorräume über $\mathbb{R}$ der Dimension $\dim(\mathfrak{V}) = 3, \dim(\mathfrak{W}) = 4$. Weiter seien $B = (B_1, B_2, B_3)$ eine Basis von $\mathfrak{V}$ und $C = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ eine Basis von $\mathfrak{W}$ und $\varphi : \mathfrak{V} \to \mathfrak{W}$ linear gegeben durch ${}^C\varphi^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie eine Basis von Kokern(φ).

Aufgabe 7.3 Sei $(\mathfrak{V}, \Phi)$ ein 3-dimensionaler EUKLID'ischer Vektorraum mit Basis $B = (B_1, B_2, B_3)$ und ${}_B\Phi^B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Sei $\mathfrak{U} := \langle B_1 + B_2, B_2 + B_3 \rangle$ ein Teilraum von $\mathfrak{V}$. Bestimmen Sie die beste Approximation von $V_1 := B_1 - B_2 + B_3$ und $V_2 := B_3$ in $\mathfrak{U}$.

Aufgabe 7.4 Sei $(\mathfrak{V}, \Phi)$ ein 3-dimensionaler EUKLID'ischer Vektorraum mit Orthonormalbasis B und $\varphi \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$ gegeben durch ${}^B\varphi^B := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie ein positiv definites, selbstadjungiertes $\alpha \in \mathrm{End}(\mathfrak{V})$ und $\gamma \in O(\mathfrak{V}, \Phi)$ mit $\varphi = \alpha \circ \gamma$.

Aufgabe 7.5 Sei $A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Entscheiden Sie, ob A positiv definit ist.

Aufgabe 7.6 Sei $C := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$. Berechnen Sie Spur$(C^{13})$.

Aufgabe 7.7 Sei $\mathfrak{V} = \mathbb{F}_3^5$ und $A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es ist $\mu_{\overline{A}} = (x+2)(x^2+x+2)$ (dies brauchen Sie nicht zu beweisen). Bestimmen Sie eine Basis B von $\mathfrak{V}$, so dass ${}^B\overline{A}^B = \mathrm{Diag}(I_{r_1} \otimes M_{x+2}, I_{r_2} \otimes M_{x^2+x+2})$, sowie die r_1 und r_2.

2 Lösungsvorschläge

2.1 1. Klausur im Wintersemester 1979/80

Lösung 1.1 Wir wenden den GAUSS'schen Algorithmus an:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & k-3 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 3 \\ 2 & k+2 & 7 & 4 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3-k & -1 \\ 0 & 3 & 3k & 6 \\ 0 & k+2 & 2k+1 & 6 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3-k & -1 \\ 0 & 1 & k & 2 \\ 0 & 0 & -k^2+1 & -2k+2 \end{array}\right)$$

- Ist $k^2 \neq 1$, d. h. $k \neq 1$ und $k \neq -1$ so hat die Koeffizientenmatrix den (Höchst-)Rang 3. Daher ist das dazugehörige lineare Gleichungssystem (unabhängig vom Bildvektor) stets eindeutig lösbar.
- Ist $k^2 = 1$ und $2-2k \neq 0$, so ist das Gleichungssystem nicht lösbar. Dies trifft genau für $k = -1$ zu.
- Ist $k^2 = 1$ und $2-2k = 0$, d. h. $k = 1$, so ist das Gleichungssystem lösbar, da aber der Rang der Koeffizientenmatrix < 3 ist, besitzt das lineare Gleichungssystem verschiedene Lösungen.

Lösung 1.2 Um eine Basis von $\mathfrak{T}$ zu bestimmen, bringen wir die Matrix, deren Zeilen V_1, V_2, V_3, V_4 sind, auf strikte Stufenform. Dabei dividieren oder multiplizieren wir nicht mit Vielfachen der 3, um noch ein von der Wahl der Körpers $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{F}_3$ unabhängiges Ergebnis zu erhalten.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Da beim Zeilen-GAUSS das Erzeugnis der Zeilen nicht verändert wird, ist $\mathfrak{T}$ das Erzeugnis der Zeilen letzten Matrix, d. h.

(a) Ist $K = \mathbb{R}$, so kann man die vierte Spalte wegen $3 \neq 0$ noch ausräumen und erhält mit $B := ((1,0,0,0,1),(0,1,0,0,0),(0,0,$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem, also eine Basis, von $\mathfrak{T}$, und es ist: $V = B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \in \langle B \rangle = \mathfrak{T}$.

(b) Ist $K = \mathbb{F}_3$, also $3 = 0$ und $-1 = 2$, so ist die vierte Zeile die Nullzeile und $B := ((1,0,0,0,1),(0,1,0,2,0),(0,0,1,0,2))$ ein linear unabhängiges Erzeugendensystem bzw. eine Basis von $\mathfrak{T}$. V ist genau dann in $\mathfrak{T}$ enthalten, wenn $\langle B_1, B_2, B_3, V \rangle$ dieselbe Dimension wie $\langle B_1, B_2, B_3 \rangle$ hat. Wir haben:

$$\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4,$$

also $\dim(\langle B_1, B_2, B_3, V \rangle) = 4 > 3 = \dim(\langle B_1, B_2, B_3 \rangle)$. Somit ist $V \notin \mathfrak{T}$.

Lösung 1.3 (a) R_1 ist kein Ring, da $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin R_1$.

(b) R_2 ist ein Ring: Da die Menge aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ einen Ring bildet, sind von den Ringaxiomen nur noch die Abgeschlossenheit und die Existenzaussagen nachzuprüfen.

- Sind $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \in R_2$, so auch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & a+c \end{pmatrix} \in R_2,$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix} \in R_2.$$

- Es ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R_2$ und es ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R_2$.
- Außerdem ist auch $-\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -b & -a \end{pmatrix} \in R_2$.

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in R_2$ ist von der Nullmatrix verschieden und besitzt kein multiplikativ inverses Element in R_2, da es selbst in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ kein inverses Element gibt, weil die Matrix den Rang $1 < 2$ hat und somit nicht invertierbar ist. Also ist R_3 kein Körper.

(c) R_3 ist ein Körper, denn

- Sind $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} c & d \\ d & c+d \end{pmatrix} \in R_3$, so auch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & d \\ d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ b+d & (a+c)+(b+d) \end{pmatrix} \in R_3$$

und

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a+b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc+bd \\ ad+bc+bd & (ac+bd)+(ad+bc+bd) \end{pmatrix} \in R_3.$$

- Es ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R_3$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R_3$.
- In R_3 sind nur $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ von der Nullmatrix verschieden. Da

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist, besitzt jedes von der Nullmatrix verschiedene Element ein multiplikativ inverses Element in R_3.

- Da Multiplikation mit der Nullmatrix, der Einheitsmatrix und dem inversen Element stets kommutativ ist und jede Multiplikation in R_3 dadurch erfasst wird, ist die Matrizenmultiplikation in R_3 kommutativ.
- Der Rest folgt aus der Gültigkeit der entsprechenden Aussagen im $\mathbb{F}_2$.

Lösung 1.4 $\mathfrak{T}_1$ ist kein Teilraum, da er kein Nullelement enthält.
Sind $f, f_1, f_2 \in \mathfrak{T}_2$, sowie $r \in \mathbb{R}$, so ist $(f_1+f_2)(1) = f_1(1)+f_2(1) = 0+0 = 0$ und $(r\cdot f)(1) = r\cdot f(1) = r\cdot 0 = 0$, d. h. $f_1+f_2 \in \mathfrak{T}_2$ und $r\cdot f \in \mathfrak{T}_2$. Also ist $\mathfrak{T}_2$ ein Teilraum von $\mathrm{PolFu}_3(\mathbb{R})$.

Lösung 1.5 Sei $X \in K^{3\times 3}$ beliebig. Da $XA = \begin{pmatrix} X_{13} & 0 & X_{11} \\ X_{23} & 0 & X_{21} \\ X_{33} & 0 & X_{31} \end{pmatrix}$ und $AX = \begin{pmatrix} X_{31} & X_{32} & X_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ X_{11} & X_{12} & X_{13} \end{pmatrix}$, ist $\mathfrak{U} = \left\{ X \in K^{3\times 3} \middle| \exists a,b,c \in K \mathrm{mit} X = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \right\}$. Durch Nachrechnen sieht man leicht, dass $B, B_1, B_2 \in \mathfrak{U}, k \in$

$K \Rightarrow B_1 + B_2 \in \mathfrak{U}$ und $k \cdot B \in \mathfrak{U}$. Daher ist $\mathfrak{U} \leq K^{3\times 3}$. Eine Basis von $\mathfrak{U}$ ist somit offenbar gegeben durch:
$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \in \left(K^{3\times 3}\right)^3$.

2.2 1. Klausur am 19. 12. 1987

Lösung 2.1 Anwenden des GAUSS'schen Algorithmus liefert:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2}+p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}-p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right).$$

Also ist die Lösungsmenge $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) + \langle (1,-1,1,0) \rangle$.

Lösung 2.2 Offenbar ist $\langle A_{1,\_} + B_{1,\_}, \ldots, A_{n,\_} + B_{n,\_} \rangle \leq \langle A_{1,\_}, \ldots, A_{n,\_} \rangle + \langle B_{1,\_}, \ldots, B_{n,\_} \rangle$.
$\Rightarrow \text{Rang}(A+B) = \dim(\langle A_{1,\_} + B_{1,\_}, \ldots, A_{n,\_} + B_{n,\_} \rangle) \leq \dim(\langle A_{1,\_}, \ldots, A_{n,\_} \rangle + \langle B_{1,\_}, \ldots, B_{n,\_} \rangle) = \dim(\langle A_{1,\_}, \ldots, A_{n,\_} \rangle) + \dim(\langle B_{1,\_}, \ldots, B_{n,\_} \rangle) - \dim(\langle A_{1,\_}, \ldots, A_{n,\_} \rangle \cap \langle B_{1,\_}, \ldots, B_{n,\_} \rangle) \leq \dim(\langle A_{1,\_}, \ldots, A_{n,\_} \rangle) + \dim(\langle B_{1,\_}, \ldots, B_{n,\_} \rangle) = \text{Rang}(A) + \text{Rang}(B)$

Lösung 2.3 Gesucht ist die Standardbasis von $\mathfrak{U}$. Man erhält sie durch ZeilenGAUSS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

also ist $(a,b,c) = (1,-1,1)$.

Lösung 2.4 Entscheidend ist, dass das lineare Gleichungssystem $\begin{array}{ll} & a \quad + c = r \\ \wedge & a + b \quad = s \\ \wedge & \quad b + c = t \end{array}$ eindeutig lösbar ist, weil $\text{Rang} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Es gilt: $(U+V, V+W, W+U)$ ist linear unabhängig $\Leftrightarrow a \cdot (U+V) + b \cdot (V+W) + c \cdot (W+U) = 0$ ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow (a+c) \cdot U + (a+b) \cdot V + (b+c) \cdot W = 0$ ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow r \cdot U + s \cdot V + t \cdot W = 0$ ist eindeutig lösbar $\Leftrightarrow (U,V,V)$ ist linear unabhängig.

Lösung 2.5 Hier hilft der erweiterte GAUSS-Algorithmus weiter:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right), \text{also ist} A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 2.6 Diese Aufgabe wird mit dem ZASSENHAUS-Algorithmus gelöst:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1&2&3&4&1&2&3&4\\ 1&0&0&1&1&0&0&1\\ 1&0&1&0&0&0&0&0\\ 1&2&2&5&0&0&0&0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{|cccc|cccc} \hline 1&0&0&1&0&-1&-\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\ 0&1&0&3&0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{4}&-\frac{3}{4}\\ 0&0&1&-1&0&1&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\ \hline 0&0&0&0&1&1&\frac{3}{2}&\frac{3}{2}\\ \hline \end{array}\right).$$

Also ist eine Basis von $\mathfrak{U}+\mathfrak{V}$ gegeben durch $((1,0,0,1),(0,1,0,3),(0,0,1,-1)$. Eine Basis von $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}$ ist $((1,1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}))$.

Lösung 2.7 f bildet die Basisvektoren auf folgende, leicht zu erratende Linearkombinationen ab: $(1,1,1)\mapsto (3,-3,3) = 3\cdot(1,1,1)-6\cdot(1,1,0)+6\cdot(1,0,0); (1,1,0)\mapsto(2,-3,3) = 3\cdot(1,1,1)-6\cdot(1,1,0)+5\cdot(1,0,0); (1,0,0)\mapsto(0,1,3) = 3\cdot(1,1,1)-2\cdot(1,1,0)-1\cdot(1,0,0)$. Also ist: ${}^Bf^B = \begin{pmatrix} 3&3&3\\ -6&-6&-2\\ 6&5&-1 \end{pmatrix}$.

Lösung 2.8 (a) Sei $V\in \text{Bild}(f)$. Dann gibt es ein $U\in\mathfrak{V}$ mit $V=f(U)$. Durch Abbilden erhält man $f(V)=f(f(U))$ und nach Voraussetzung ist $f(f(U))=f(U)=V$, also haben wir zusammen: $f(V)=V$.

(b) Zu zeigen ist, dass für jedes $V\in\mathfrak{V}$ gilt: $V=V_B+V_K$ mit *eindeutigem* $V_B\in\text{Bild}(f)$ und $V_K\in\text{Kern}(f)$.

Zunächst die Existenz: Sei $V\in\mathfrak{V}$ beliebig. Setze dann $V_B := f(V)\in\text{Bild}(f)$. Durch Abbilden erhält man mit $f^2=f$: $f(V)=f(V_B)\Leftrightarrow f(V-V_B)=0$, da f linear. Also ist $V-V_B=:V_K\in\text{Kern}(f)$, d. h. $V=V_B+V_K$ mit einem $V_B\in\text{Bild}(f)$ und $V_K\in\text{Kern}(f)$.

Nun die Eindeutigkeit: Sei $V=V_B^1+V_K^1=V_B^2+V_K^2$ mit $V_B^1,V_B^2\in\text{Bild}(f)$ und $V_K^1,V_K^2\in\text{Kern}(f)$. Durch Abbilden erhält man: $f(V_B^1+V_K^1)=f(V_B^2+V_K^2)$ und da f linear und V_K^1,V_K^2 aus dem Kern sind, haben wir: $f(V_B^1)=f(V_B^2)$. Wegen (a) folgt daraus: $V_B^1=V_B^2$ und schließlich $V_K^1=V-V_B^1=V-V_B^2=V_K^2$.

Lösung 2.9 Es ist $x^4+x^3+x^2+x+1=(x+1)\cdot(x^3+1)+x^2$ wegen Polynomdivision. Daher ist: $\overline{x^4+x^3+x^2+x+1}=0\cdot\overline{1}+0\cdot\overline{x}+31\cdot\overline{x}^2$.

2.3 2. Klausur am 23. 1. 1988

Lösung 3.1 Sei S die Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Weil S eine Orthonormalbasis ist, ist die GRAMmatrix des Skalarproduktes Φ bezüglich S die Einheitsmatrix, so dass Φ das Standardskalarprodukt ist.

Nun ist ((1,1,1),(1,0,0),(0,1,0)) eine Basis vom $\mathbb{R}^3$. Wende also das GRAM-SCHMIDT'sche Orthogonalisierungsverfahren an, um eine Orthogonalbasis B zu gewinnen:
$B_1 := (1,1,1), B_2 := -\frac{\Phi((1,0,0),(1,1,1))}{\Phi((1,1,1),(1,1,1)}\cdot(1,1,1)+(1,0,0) = (\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$. Man ersetze B_2 durch $(2,-1,-1)$.
$B_3 := -\frac{\Phi((0,1,0),(1,1,1))}{\Phi((1,1,1),(1,1,1)}\cdot(1,1,1)-\frac{\Phi((0,1,0),(2,-1,-1))}{\Phi((2,-1,-1),(2,-1,-1)}\cdot(2,-1,-1)+(0,1,0) = (0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$. Also ist $((1,1,1),(2,-1,-1),(0,1,-$
eine Orthogonalbasis vom $\mathbb{R}^3$.

Lösung 3.2 Sei S die Standardbasis. Da $B=((1,0,1),(1,1,1),(0,0,1))$ eine Orthonormalbasis ist, haben wir: ${}^B(f^{ad})^B = ({}^Bf^B)^{tr}$, also: ${}^S(f^{ad})^S = {}^S id^B\cdot({}^Bf^B)^{tr}\cdot{}^B id^S$. Nach Definition ist:

$${}^Bf^B = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}, {}^S id^B = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix} \text{ und mit Invertieren ist } {}^B id^S = \begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}.$$

$$\text{Also ist } {}^S(f^{ad})^S = \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2&0&2\\-1&0&1\\-3&0&3\end{pmatrix}.$$

Lösung 3.3 Interpretiere A als GRAMmatrix ${}_S\Phi^S$ einer symmetrischen Bilinearform Φ. Gesucht ist dann eine Basistransformation, die S in eine Orthogonalbasis überführt. Da A nicht positiv definit ist, scheidet hier das GRAM-SCHMIDT'sche Orthogonalisierungsverfahren aus. Wir verwenden hier statt dessen die (allgemeineren) Spalten-Zeilen-Umformungen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&1&1&1&0&0\\ 1&0&0&0&1&0\\ 1&0&0&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&-1&-1\\ 0&-1&-1&0&1&0\\ 0&-1&-1&0&0&1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&-1&0\\ 0&-1&0&0&1&-1\\ 0&0&0&0&0&1 \end{array}\right)$$

Interpretiere $B := \begin{pmatrix} 1&-1&0\\ 0&1&-1\\ 0&0&1 \end{pmatrix}$, als ${}^Sid^C$. Dann ist $B^{tr}AB = {}_C\Phi^C = \begin{pmatrix} 1&0&0\\ 0&-1&0\\ 0&0&0 \end{pmatrix}$. Dabei ist C also eine Orthogonalbasis, was hier nicht weiter interessiert.

Lösung 3.4 Zunächst die Eindeutigkeit: Sei $\Phi = \Psi_1 + \Psi_2$.
Für alle $x,y \in \mathfrak{V}$ gilt: $\Phi(x,y) + \Phi(y,x) = 2\Psi_1(x,y) \Rightarrow \Psi_1(x,y) = \frac{\Phi(x,y)+\Phi(y,x)}{2}$.
Ebenso ist $\Phi(x,y) - \Phi(y,x) = 2\Psi_2(x,y) \Rightarrow \Psi_2(x,y) = \frac{\Phi(x,y)-\Phi(y,x)}{2}$. Nun die Existenz:
Seien Ψ_1 und Ψ_2 definiert durch $\Psi_1(x,y) = \frac{\Phi(x,y)+\Phi(y,x)}{2}$ und $\Psi_2(x,y) = \frac{\Phi(x,y)-\Phi(y,x)}{2}$.
$\Psi_{1,2}(ax_1 + bx_2, y) = \frac{\Phi(ax_1+bx_2,y)\pm\Phi(y,ax_1+bx_2)}{2} = \frac{a\cdot\Phi(x_1,y)+b\cdot\Phi(x_2,y)\pm a\cdot\Phi(y,x_1)\pm b\cdot\Phi(y,x_2)}{2} =$
$a\cdot\frac{\Phi(x_1,y)\pm\Phi(y,x_1)}{2} + b\cdot\frac{\Phi(x_2,y)\pm\Phi(y,x_2)}{2} = a\cdot\Psi_{1,2}(x_1,y) + b\cdot\Psi_{1,2}(x_2,y)$.
Ebenso zeigt man die Linearität von Ψ_1 und Ψ_2 in der zweiten Komponente.
Ferner ist: $\Psi_1(x,y) = \frac{\Phi(x,y)+\Phi(y,x)}{2} = \frac{\Phi(y,x)+\Phi(x,y)}{2}$ (Kommutativgesetz in $\mathbb{R}$) $= \Psi_1(y,x)$ und $\Psi_2(x,y) = \frac{\Phi(x,y)-\Phi(y,x)}{2} = -\frac{\Phi(y,x)-\Phi(x,y)}{2} = -\Psi_2(y,x)$.

Lösung 3.5 Es ist ${}^B(f^{ad})^B = ({}_B\Phi^B)^{-1}\cdot({}^Bf^B)^{tr}\cdot{}_B\Phi^B$. Da offenbar $({}_B\Phi^B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&-1 \end{pmatrix}$, ist ${}^B(f^{ad})^B = \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&-1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2}&1\\ 1&\sqrt{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1&0\\ 0&-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}&-1\\ -1&\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Nun ist f orthogonal, falls $f^{ad}\circ f = id_{\mathfrak{V}}$. Dies folgt aber unmittelbar aus ${}^B(f^{ad})^B\cdot{}^Bf^B = \begin{pmatrix} \sqrt{2}&-1\\ -1&\sqrt{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \sqrt{2}&1\\ 1&\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1&0\\ 0&1 \end{pmatrix}$.

Lösung 3.6 f bildet $(1,0)$ auf $(1,1)$ und $(1,1)$ auf $(1,0)$ ab, d. h. ${}^Bf^B = \begin{pmatrix} 0&1\\ 1&0 \end{pmatrix}$. Da ${}^Bf^B$ symmetrisch und B mit Φ eine Orthonormalbasis ist, muss f bezüglich Φ symmetrisch sein.

Lösung 3.7 $\mathfrak{U}^\perp = \{(x,y,z)|\Phi((x,y,z),(1,0,0)) = 0 \wedge \Phi((x,y,z),(0,1,0)) = 0\} = \{(x,y,z)|$ $x+z=0 \wedge y+2z=0\}$. Offenbar ist $(1,2,-1)\in\mathfrak{U}^\perp$. Die Spiegelung f bildet $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ auf sich selbst ab und $(1,2,-1)$ auf $(-1,-2,1)$. Da wir schon die Bilder von $(1,0,0)$ und $(0,1,0)$ kennen, müssen wir nur noch $f((0,0,1))$ berechnen:
$f((0,0,1)) = f((-1,-2,1)+(1,0,0)+(0,2,0)) = -f((1,2,-1))+f((1,0,0))+2f((0,1,0)) = (1,2,-1)+$ $(1,0,0)+(0,2,0) = (2,4,-1)$. Also ist mit S als Standardbasis: ${}^Sf^S = \begin{pmatrix} 1&0&2\\ 0&1&4\\ 0&0&-1 \end{pmatrix}$.

Lösung 3.8 Es sei S die Standardbasis des $\mathbb{R}^{1\times3}$. Man prüft leicht nach, dass für die Standardbasis $S^\star$ des $\mathbb{R}^{3\times1}$ gilt: $\underline{S_i^\star}(S_j) = \delta_{ij}$, also dass $S^\star$ die Dualbasis von S ist. Wir verwenden schließlich die Formel: ${}^{S^\star}id^{B^\star} =$ $({}^Sid^B)^{-tr} = \begin{pmatrix} 1&1&0\\ 1&2&1\\ 1&2&2 \end{pmatrix}^{-tr} = \begin{pmatrix} 1&1&1\\ 1&2&2\\ 0&1&2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2&-1&0\\ -2&2&-1\\ 1&-1&1 \end{pmatrix}$. Also ist $B^\star := \left(\begin{pmatrix} 2\\ -2\\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1\\ 2\\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0\\ -1\\ 1 \end{pmatrix}\right) \in$ $(\mathbb{R}^{3\times1})^3$ die Dualbasis zu B.

Lösung 3.9 Da $\Phi(b,b) = b^2$, ist (1) eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{U}$. Die Bestapproximation von $1+x$ ist die Projektion von $1+x$ in $\mathfrak{U}$ bezüglich der Zerlegung $\mathfrak{V} = \mathfrak{U} \oplus \mathfrak{U}^\perp$. Man erhält die Projektion in $\mathfrak{U}$ über die Berechnung der FOURIERkoeffizienten zu einer Orthonormalbasis von $\mathfrak{U}$: $a = \Phi(1,1+x)\cdot 1 = 2$ ist die Bestapproximation von $1+x$ in $\mathfrak{U}$.

Lösung 3.10 Sei $B := (1,x,x^2)$ und $C := ((1,0),(0,1))$. Es ist $\varphi(1) = (1,1) = C_1 + C_2, \varphi(x) = (0,1) = C_2$ und $\varphi(x^2) = (0,1) = C_2$. Also haben wir: ${}^C\varphi^B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2.4 1. Klausur am 14. 12. 1991

Lösung 4.1 Mit dem GAUSS'schen Algorithmus erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1+p \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2+2p \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right)$$

Die Lösungsmenge lautet also: $\mathbb{L} = (1,2,0,0) + \langle (1,2,2,1) \rangle$.

Lösung 4.2 Der Rang einer Matrix ist die Dimension des Erzeugnisses ihrer Spalten. Das Erzeugnis ihrer Spalten ist aber das Bild der von ihr induzierten linearen Abbildung. Also haben wir: $\mathrm{Rang}(BA) = \dim(\mathrm{Bild}(\overline{B \cdot A})) = \dim(\mathrm{Bild}(\overline{B} \circ \overline{A})) = \dim(\mathrm{Bild}(\overline{B}|_{\mathrm{Bild}\overline{A}})) = \dim(\mathrm{Bild}\overline{A}) - \dim((\mathrm{Kern}\overline{B}|_{\mathrm{Bild}\overline{A}})) \leq \dim(\mathrm{Bild}\overline{A}) = \mathrm{Rang}(A)$.

Lösung 4.3 Wende den GAUSS-Algorithmus an und erhalte:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -t & 1 \\ t-1 & -2 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -t & 1 \\ 0 & t^2-t-2 & 2-t \end{array}\right).$$

(a) Das Gleichungssystem ist nun genau dann eindeutig lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix maximal ist, d. h. wenn $t^2 - t - 2 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq -1$ und $t \neq 2$. Also ist das Gleichungssystem genau dann eindeutig lösbar, falls $t \notin \{-1,2\}$.

(b) Das Gleichungssystem ist genau dann nicht lösbar, wenn $t^2 - t - 2 = 0$ und $2 - t \neq 0 \Leftrightarrow (t = 2$ oder $t = -1)$ und $t \neq 2$. Also ist das Gleichungssystem nicht lösbar für $t = -1$.

(c) Das Gleichungssystem ist lösbar, aber nicht eindeutig, wenn die ersten beiden Fälle nicht auftreten, also für $t = 2$.

Lösung 4.4 Wende den ZASSENHAUS-Algorithmus an und erhalte:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Also ist eine Basis von $\mathfrak{U} + \mathfrak{V}$ gegeben durch $((1,0,0,0,0),(0,1,0,0,1),(0,0,1,0,0),(0,0,0,1,0))$. Eine Basis von $\mathfrak{U} \cap \mathfrak{V}$ ist $((1,0,0,0,0),(0,1,0,0,1))$.

Lösung 4.5 Wir lösen erst den zweiten Teil der Aufgabe, suchen also das Urbild von $B_1 + B_2 + B_3$ unter f mit dem GAUSS-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1+2p \\ 0 & 1 & 0 & -2p \\ 0 & 0 & 1 & p \end{array}\right).$$

Also ist $B_1 + \langle 2B_1 - 2B_2 + B_3\rangle$ die Menge aller $x \in \mathfrak{V}$ mit $f(x) = B_1 + B_2 + B_3$. Da jede Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems eine Restklasse nach der Lösungsmenge des dazugehörigen homogenen Gleichungssystems ist, haben wir: $\text{Kern}(f) = \langle 2B_1 - 2B_2 + B_3\rangle$.

Lösung 4.6 Wir berechnen erst die Standardbasis von $\mathfrak{U}$, um etwas Rechenarbeit zu sparen: $\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&1&3&2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&0&1&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$, also $\mathfrak{U} = \langle(1,1,0,-1),(0,0,1,1)\rangle$. Gesucht ist ein Gleichungssystem, das $\mathfrak{U}$ als Lösungsmenge hat. Da beim GAUSS'schen Algorithmus die Lösungsmenge nicht verändert wird, kann er auch rückwärts angewandt werden:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&p_1\\0&1&0&0&p_1\\0&0&1&0&p_2\\0&0&0&1&-p_1+p_2\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&1&0\\0&1&0&0&p_1\\0&0&1&0&p_2\end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&-1&0&0&0\\0&1&-1&1&0\end{array}\right)$$

$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&1&0\\0&1&-1&1&0\end{array}\right)$. Also haben wir mit $\begin{array}{ccccccccc} & x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & 0\\ \wedge & & & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 0\end{array}$ ein lineares Gleichungssystem, das $\mathfrak{U}$ als Lösungsmenge hat.

Lösung 4.7 f bildet p auf seine Restklasse ab. Da $x^4 = (x+1)(x^3 - x^2 + 1) + x^2 - x - 1$ nach Polynomdivision, ist $f(x^4) = -1 + \mathfrak{U} - x + \mathfrak{U} + x^2 + \mathfrak{U} = -f(1) - f(x) + f(x^2)$.
Mit $B := (f(1), f(x), f(x^2))$ ist also: $f(x^4) =^B \begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

2.5 2. Klausur am 15. 2. 1992

Lösung 5.1 Die lineare Abbildung f ist ein Isomorphismus genau dann, wenn f bijektiv ist. Bei Endomorphismen wie f sind wegen $\dim(\mathfrak{V}) = \dim(\text{Kern}(f)) + \dim(\text{Bild}(f))$ die Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv gleichbedeutend. Es ist also nur zu untersuchen, wann f surjektiv ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Rang der Matrix ${}^B f^B$ maximal ist.

$$\text{Rang}\left(\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&0&t\end{pmatrix}\right) = \text{Rang}\left(\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&t-1\end{pmatrix}\right) = \text{Rang}\left(\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&t-1\end{pmatrix}\right)$$

Also ist genau für $t \neq 1$ die lineare Abbildung f ein Isomorphismus.

Lösung 5.2 Es gilt: ${}^{C^\star} id^{B^\star}_{\mathfrak{V}^\star} = ({}^{B^\star} id^{C^\star}_{\mathfrak{V}^\star})^{-1} = (({}^B id^C_{\mathfrak{V}})^{-tr})^{-1} = ({}^B id^C_{\mathfrak{V}})^{tr} = \begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}^{tr} = \begin{pmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.
Also ist $B_1^\star = C_1^\star + C_2^\star + C_3^\star, B_2^\star = C_1^\star + 2C_2^\star + C_3^\star$ und $B_3^\star = C_2^\star + C_3^\star$.

Lösung 5.3 Mit $B := ((1,1,1),(0,1,1),(0,0,1))$ und S als Standardbasis ist das Skalarprodukt Φ gegeben durch ${}_B\Phi^B = I_3$. Da ${}^B id^S = \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$, ist ${}_S\Phi^S = ({}^B id^S)^{tr} \cdot_B \Phi^B \cdot^B id^S = ({}^B id^S)^{tr} \cdot^B id^S =$
$\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}$. Dann ist $\langle(1,0,0)\rangle^\perp = \{(x,y,z) | \Phi((x,y,z),(1,0,0)) =$
$0\} = \{(x,y,z) | (x,y,z) \cdot \begin{pmatrix}2&-1&0\\1&2&-1\\0&-1&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 0\} = \{(x,y,z) |$
$2x - y = 0\} = \langle(1,2,0),(0,0,1)\rangle$.

Lösung 5.4 Die Orthogonalprojektion von $(1,1,1,1)$ in $\mathfrak{U}$ lässt sich schnell durch Berechnung der FOURIERkoeffizienten bestimmen. Dazu benötigt man aber eine Orthonormalbasis von $\mathfrak{U}$. Da die Standardbasis S eine Orthonormalbasis ist, muss das Skalarprodukt Φ gegeben sein durch ${}_S\Phi^S = I_4$, d. h. Φ ist das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^4$. Zunächst berechne man mit dem GRAM-SCHMIDT'schen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthogonalbasis B' von $\mathfrak{U}$ durch $B'_1 := (1,2,2,0)$ und $B'_2 := -\frac{\Phi((1,1,0,0),(1,2,2,0))}{\Phi((1,2,2,0),(1,2,2,0))} \cdot (1,2,2,0) + (1,1,0,0) = -\frac{3}{9} \cdot (1,2,2,0) + (1,1,0,0) = (\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0)$. Durch Normieren erhalten wir nun die Orthonormalbasis $B = ((\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},0), (\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0))$. Schließlich müssen wir nur noch die Projektion P von $(1,1,1,1)$ in $\mathfrak{U}$ berechnen:
$P = \Phi((\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},0),(1,1,1,1)) \cdot (\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3},0) + \Phi((\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0),(1,1,1,1)) \cdot (\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0) = (\frac{7}{9},\frac{11}{9},\frac{8}{9},0)$.

Lösung 5.5 Verwende zur Orthogonalisierung von symmetrischen Bilinearformen Spalten-Zeilen-Umformungen. Das GRAM-SCHMIDT'sche Orthogonalisierungsverfahren kann hier nicht angewendet werden, da $\mathfrak{V}$ kein EUKLID'ischer Vektorraum ist. Die Bilinearform ist nämlich nicht positiv definit, weil z. B. $\Phi(B_1,B_1) = 0$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Also ist $C = (\frac{1}{\sqrt{2}}B_2, \sqrt{2}B_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}B_2, B_1 - 2B_2 + B_3) = (\frac{1}{\sqrt{2}}x, -\frac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}, x^2 - 2x + 1)$ eine Orthogonalbasis von $\mathfrak{V}$ mit ${}_C\Phi^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Lösung 5.6 Für $t = 0$ ist A selber Diagonalmatrix, wähle also $B = I_2$. Sei nun $t \neq 0$. Der Übergang von A zu $B^{-1}AB$ entspricht einer Basistransformation von $\overline{A}$ in eine Eigenvektorbasis. Wir müssen also nur noch feststellen, für welche $t \neq 0$ die Abbildung $\overline{A}$ eine Eigenvektorbasis besitzt. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Minimalpolynom von A vollständig in verschiedene Linearfaktoren zerfällt. Da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mu_A = 1 - 2x + x^2 = (x-1)^2$. Insbesondere zerfällt das Minimalpolynom für kein $t \neq 0$ in verschiedene Linearfaktoren, so dass A nicht diagonalisierbar ist, d. h. es gibt das geforderte B dann und nur dann, wenn $t = 0$.

Lösung 5.7 Durch doppelte Mengeninklusion zeigen wir: $E_f(1) = \text{Bild}(f)$. Insbesondere folgt aus $\text{Bild}(f) \neq \{0\}$, dass 1 ein Eigenwert von f ist.

„$\subseteq$“: Sei $e \in E_f(1) \Rightarrow e = f(e)$. Da $f(e) \in \text{Bild}(f)$, ist $e \in \text{Bild}(f)$.

„$\supseteq$“: Sei $b \in \text{Bild}(f) \Rightarrow \exists v \in \mathfrak{V}$ mit $b = f(v)$. Durch Abbilden erhält man $f(b) = f(f(v)) = f(v) = b$, also $b \in E_f(1)$.

2.6 1. Klausur am 20. 12. 2000

Lösung 6.1 Wir berechnen rechtsinverse Matrizen mittels erweitertem GAUSS-Verfahren:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \end{array}\right)$$ Also ist $B := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ die (einzige) Matrix aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $AB = I_3$. Wenn A ein Linksinverses hätte, dann wäre A invertierbar, so dass Links- und Rechtsinverses identisch sein müssten. Wenn überhaupt, dann könnte also nur B ein Linksinverses sein. Nachrechnen ergibt tatsächlich: $BA = I_3$. Also ist $\widetilde{B} := B$ die (einzige) Matrix mit $\widetilde{B}A = I_3$.

Lösung 6.2 ZeilenGAUSS verändert das Erzeugnis der Zeilen (sowie den Rang) einer Matrix nicht. $\begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&3&2&2\\3&1&1&3\\2&1&2&1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&2&2&2\\0&1&4&4\\0&0&0&2\\0&2&3&2\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}1&0&4&0\\0&1&4&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ Die Matrix ist nun auf strikte Stufenform gebracht und hat den Rang 3, d. h. $\dim(\mathfrak{V})=3$, und $((1,0,4,0),(0,1,4,0),(0,0,0,1))$ ist eine Basis (die Standardbasis) von $\mathfrak{V}$.

Lösung 6.3 Die Operation entspricht lediglich dem Austauschen der Zeichen $0,\ldots,4$ im Schaubild des σ-Algorithmus.

(a) Um die Gruppeneigenschaft nachzuweisen, muss Abgeschlossenheit, Assoziativität, Gesetz vom neutralen und inversen Element gezeigt werden:

- Abgeschlossenheit: Seien ν_1,ν_2 bijektive Abbildungen von M in sich. Dann ist die Komposition $\nu_1\circ\nu_2$ auch eine bijektive Abbildung von M in sich.
- Assoziativität: Die Komposition von Abbildungen ist immer assoziativ.
- neutrales Element: id_M ist offenbar bijektiv und eine Abbildung von M in sich mit der Eigenschaft: $\nu\circ id_M = id_M\circ\nu = \nu$ für alle $\nu\in S_M$.
- inverses Element: Sei $\nu\in S_M$, d. h. ν ist bijektive Abbildung von M in sich. Dann gibt es Umkehrabbildung ν^{-1}, wobei ν^{-1} ebenfalls bijektive Abbildung von M in sich ist mit $\nu\circ\nu^{-1} = \nu^{-1}\circ\nu = id_M$.

Jetzt müssen noch die beiden Operationseigenschaften gezeigt werden. Der Übersicht halber nennen wir die Operation ω.

- $\omega(id_M,f) = id_M\circ f\circ(id_M)^{-1} = f$.
- $\omega(\nu_1,\omega(\nu_2,f)) = \omega(\nu_1,\nu_2\circ f\circ(\nu_2)^{-1}) = \nu_1\circ\nu_2\circ f\circ(\nu_2)^{-1}\circ(\nu_1)^{-1} = (\nu_1\circ\nu_2)\circ f\circ(\nu_1\circ\nu_2)^{-1} = \omega(\nu_1\circ\nu_2,f)$.

(b) Zwei Funktionen f und g liegen genau dann in derselben Bahn bezüglich obiger Operation, falls ihre Gestalt beim σ-Algorithmus bis auf Permutierung der Elemente gleich ist.
$f:\ \begin{matrix}0\searrow\\4\nearrow\end{matrix}\ 1\to 3\circlearrowleft \quad 2\circlearrowleft$ bzw. $g:\ \begin{matrix}0\searrow\\1\nearrow\end{matrix}\ 2\to 4\circlearrowleft \quad 3\circlearrowleft$. Indem man im Schaubild von f die 1 durch 2, 2 durch 3, 3 durch 4 und 4 durch 1 vertauscht, erhält man die Gestalt von g, genauer: mit
$\nu: M^M\to M^M:\ \begin{matrix}0\mapsto 0\\1\mapsto 2\\2\mapsto 3\\3\mapsto 4\\4\mapsto 1\end{matrix}$ ist $\nu\in S_M$ mit $\omega(\nu,f)=g$. Also liegen f und g in derselben Bahn unter ω.

Lösung 6.4 Der Rang einer Matrix ist die Dimension des Erzeugnisses ihrer Spalten. Das Erzeugnis ihrer Spalten ist aber das Bild der von ihr induzierten linearen Abbildung. Also haben wir: $\mathrm{Rang}(AB) = \dim(\mathrm{Bild}(\overline{A\cdot B})) = \dim(\mathrm{Bild}(\overline{A}\circ\overline{B})) = \dim(\mathrm{Bild}(\overline{A}|_{\mathrm{Bild}\overline{B}})) \le \dim(\mathrm{Bild}(\overline{A})) = \mathrm{Rang}(A)$.

Lösung 6.5 Wende Polynomdivision an. Aus $(x^3+2x+1):(x^2+x+1) = x+2$ Rest $2x+2$ und $(x^2+x+1):(2x+2) = 2x$ Rest 1 erhält man: $x^3+2x+1 = (x+2)(x^2+x+1)+(2x+2)$ und $x^2+x+1 = 2x(2x+2)+1$. Wir multiplizieren die erste Gleichung mit $2x$, um die $2x(2x+2)$ aus der zweiten Gleichung in die erste Gleichung einsetzen zu können, und erhalten dann, nach 1 aufgelöst: $(2x^2+x+1)(x^2+x+1)+x(x^3+2x+1)=1$, also $(2x^2+x+1)(x^2+x+1)+p\mathbb{F}_3[x] = 1+p\mathbb{F}_3[x]$. Wähle also $q := 2x^2+x+1\in\mathbb{F}_3[x]$.

Lösung 6.6 Es seien $a_1,a_2,a_3 \in \mathbb{R}$ mit $a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3=0 \Leftrightarrow a_1+a_2\cos x+a_3\cos(2x)=0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Setze speziell $x=0, x=\frac{\pi}{2}, x=\pi$ ein. Dann folgt: $\begin{array}{cccccccccc} & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 0 \\ \wedge & a_1 & & & - & a_3 & = & 0 \\ \wedge & a_1 & - & a_2 & + & a_3 & = & 0 \end{array}$. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$
Es folgt also: $a_1=a_2=a_3=0$, d. h. f_1,f_2,f_3 sind linear unabhängig.
Sei $f=a_1f_1+a_2f_2+a_3f_3$ bzw. $f(x)=a_1+a_2\cos x+a_3\cos(2x)$ mit $f(0)=1, f(\frac{\pi}{2})=2, f(\pi)=-1 \Leftrightarrow$
$\begin{array}{cccccccc} & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & = & 1 \\ \wedge & a_1 & & & - & a_3 & = & 2 \\ \wedge & a_1 & - & a_2 & + & a_3 & = & -1 \end{array}$. Man löse dies mit dem GAUSS-Verfahren: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$
Also gibt es genau ein f mit den gewünschten Eigenschaften, nämlich $f: x \mapsto 1+\cos x-\cos(2x)$.

2.7 2. Klausur am 14. 2. 2001

Lösung 7.1 Man verwende hier den ZASSENHAUS-Algorithmus:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} & \boxed{1} \end{array}\right).$$

Also ist eine Basis von $\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2$ gegeben durch $(B_1+B_4, B_2+2B_4, B_3+B_4, B_5)$. Eine Basis von $\mathfrak{U}_1 \cap \mathfrak{U}_2$ ist $(B_1+B_2+B_3+B_4+B_5)$. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 2. Also ist $\dim(\mathfrak{U}_1)=2$ und $\dim(\mathfrak{U}_2)=\dim(\mathfrak{U}_1+\mathfrak{U}_2)+\dim(\mathfrak{U}_1\cap\mathfrak{U}_2)-\dim(\mathfrak{U}_1)=3$.

Lösung 7.2 Suche zunächst lineare Abbildung ψ mit $\mathrm{Kern}(\psi)=\mathrm{Bild}(\varphi)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Wähle also $\psi: \mathfrak{W} \to \mathbb{R}^{2\times 1}$ durch ${}^S\psi^C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei S die Standardbasis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$ ist. ψ parametrisiert $\mathrm{Kokern}(\varphi)$, d. h. es sind $W_1+\mathrm{Bild}(\varphi)=W_2+\mathrm{Bild}(\varphi)$ genau dann, wenn $\psi(W_1)=\psi(W_2)$. Es ist nun $\psi(C_1)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ und $\psi(C_2)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Insbesondere lässt sich jedes $W+\mathrm{Bild}(\varphi) \in \mathrm{Kokern}(\varphi)$ mit $\psi(W)=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ eindeutig als Linearkombination $a(C_1+\mathrm{Bild}(\varphi))+b(C_2+\mathrm{Bild}(\varphi))$ schreiben. Also ist $(C_1+\mathrm{Bild}(\varphi), C_2+\mathrm{Bild}(\varphi))$ eine Basis von $\mathrm{Kokern}(\varphi)$.

Lösung 7.3 Bestimme zunächst den 1-dimensionalen Orthogonalraum $\mathfrak{U}^\perp$:
$\Phi({}^B\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, {}^B\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}) = 0 \wedge \Phi({}^B\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, {}^B\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}) = 0 \Leftrightarrow \begin{array}{ccccccccc} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \\ \wedge & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{array}$. Man löse dieses Gleichungssystem: $\mathfrak{U}^\perp = \langle {}^B\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}\rangle$. Da $\Phi({}^B\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}, {}^B\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}) = 5$, ist $(\frac{1}{\sqrt{5}}{}^B\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix})$ eine ON-Basis von $\mathfrak{U}^\perp$. Berechne nun die Projektion von V_1 bzw. V_2 in $\mathfrak{U}^\perp$ über die FOURIERkoeffizienten: $\pi_{\mathfrak{U}^\perp}(V_1)=$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\Phi({}^B\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix},{}^B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix})\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}{}^B\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}=\frac{3}{5}{}^B\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$ sowie analog $\pi_{\mathfrak{U}^\perp}(V_2)=\frac{1}{5}{}^B\begin{pmatrix}3\\-2\\0\end{pmatrix}$. Schließlich ist $\pi_{\mathfrak{U}}(V_1)=V_1-\pi_{\mathfrak{U}^\perp}(V_1)=-\frac{4}{5}B_1+\frac{1}{5}B_2+B_3$ und $\pi_{\mathfrak{U}}(V_2)=V_2-\pi_{\mathfrak{U}^\perp}(V_2)=-\frac{3}{5}B_1+\frac{2}{5}B_2+B_3$.

Lösung 7.4 Wir suchen positiv definites $A\in\mathbb{R}^{3\times3}_{sym}$ und $G\in O(3,\mathbb{R})$ mit ${}^B\varphi^B=AG$. Da B eine ON-Basis ist, sind nämlich α, definiert durch ${}^B\alpha^B=A$, und γ, definiert durch ${}^B\gamma^B=G$, positiv definit und selbstadjungiert bzw. orthogonal, wobei $\varphi=\alpha\circ\gamma$.
Der Beweis zur Polarzerlegung besagt, dass $A^2={}^B\varphi^B({}^B\varphi^B)^{tr}=({}^B\varphi^B)^2$ ist. G ergibt sich dann automatisch aus $G=A^{-1B}\varphi^B$.
Normalerweise müssten wir jetzt ${}^B\varphi^B({}^B\varphi^B)^{tr}$ ausmultiplizieren und hiervon eine Eigenvektorbasis bestimmen. Da aber zufällig φ selbstadjungiert ist, sind alle Eigenvektoren von φ (zum Eigenwert λ) auch Eigenvektoren von $\varphi\circ\varphi^{ad}$ (zum Eigenwert λ^2.). Also suchen wir (nur) eine Eigenvektorbasis von φ. Es ist $\mu_\varphi(x)=(x-1)(x+2)$ und $E_\varphi(1)=\langle{}^B\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},{}^B\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\rangle$ sowie $E_\varphi(-2)=\langle{}^B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\rangle$. Orthogonalisiert und normiert man die resultierende Eigenvektorbasis (da die Vektoren in Koordinaten bezüglich einer ON-Basis angegeben sind, ist das Skalarprodukt in B-Koordinaten als „Standardskalarprodukt“ aufzufassen), erhält man: $E:=(\frac{1}{\sqrt{2}}{}^B\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}{}^B\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{3}}{}^B\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$. Insbesondere ist ${}^Eid^{BB}\varphi^B({}^B\varphi^B)^{trB}id^E=\mathrm{Diag}(1,1,4)$.
Wähle also $A:={}^Bid^E\mathrm{Diag}(1,1,2)^Eid^B$. Dann ist A positiv definit, da seine Eigenwerte positiv sind, und symmetrisch, da aus ${}^E\alpha^E=\mathrm{Diag}(1,1,2)$ symmetrisch und E ON-Basis folgt, dass α selbstadjungiert ist, und mit B als ON-Basis auch ${}^B\alpha^B=A$ symmetrisch ist. Ferner ist $A^2={}^Bid^E\cdot\mathrm{Diag}(1,1,2)^2\cdot{}^Eid^B={}^Bid^E\mathrm{Diag}(1,1,4)^Eid^B={}^B\varphi^B({}^B\varphi^B)^{tr}$. Da B und E beide ON-Basen sind, ist ${}^Bid^E=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&-\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$ orthogonal und somit ${}^Eid^B=({}^Bid^E)^{tr}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$. Jetzt erhält man: $A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$. Schließlich ist $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&-1&-1\\-1&5&-1\\-1&-1&5\end{pmatrix}$, und man erhält: $G=A^{-1B}\varphi^B=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2&-2\\-2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix}$.

Lösung 7.5 Interpretiere A als GRAMmatrix ${}_S\Phi^S$ einer symmetrischen Bilinearform Φ. A ist genau dann positiv definit, falls es eine ON-Basis gibt. Verwende zum Orthogonalisieren Spalten-Zeilen-Umformungen: $\begin{pmatrix}3&1&-3\\1&3&1\\-3&1&3\end{pmatrix}\rightsquigarrow\begin{pmatrix}3&0&0\\0&\frac{8}{3}&2\\0&2&0\end{pmatrix}$. An dieser Stelle können wir schon aufhören, da wir eine 0 auf der Hauptdiagonalen erkennen, d. h. es gibt einen Vektor $V\neq0$ mit $\Phi(V,V)=0$ bzw. $V^{tr}AV=0$. Also ist A nicht positiv definit.

Lösung 7.6 Man sieht, dass C eine Begleitmatrix ist, d. h. $\mu_C=x^3-4x^2-x-1=(x+4)(x+1)^2$. Also kommt man durch Konjugieren von C auf die Matrix $J:=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&1&4\end{pmatrix}$ (es ist $-4=1$ und $-1=4$). Ebenso erkennt man, dass man durch Konjugieren von C^{13} auf J^{13} kommt. Da die Spur invariant bezüglich des Konjugierens ist, brauchen wir nur noch $\mathrm{Spur}(J^{13})$ zu berechnen. Es ist $J=\mathrm{Diag}(1,\begin{pmatrix}4&0\\1&4\end{pmatrix})$ von Blockdiagonalgestalt, also ist $J^{13}=\mathrm{Diag}(1^{13},\begin{pmatrix}4&0\\1&4\end{pmatrix}^{13})$ und erhalten so: $\mathrm{Spur}(C^{13})=\mathrm{Spur}(J^{13})=1+$

Spur($\begin{pmatrix}4&0\\1&4\end{pmatrix}^{13}$). Nun ist $\begin{pmatrix}4&0\\1&4\end{pmatrix}$ eine Dreiecksmatrix, so dass beim Potenzieren die Diagonalelemente potenziert werden, da $\begin{pmatrix}a_1&0\\\star&a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1&0\\\star&b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1b_1&0\\\star&a_2b_2\end{pmatrix}$. Also ist $\begin{pmatrix}4&0\\1&4\end{pmatrix}^{13}=\begin{pmatrix}4^{13}&0\\\star&4^{13}\end{pmatrix}$ und somit: $\mathrm{Spur}(C^{13})=1+4^{13}+4^{13}=1+(-1)^{13}+(-1)^{13}=-1=4$.

Lösung 7.7 Setze $\mathfrak{V}_1:=\mathrm{Kern}((x+2)(\overline{A}))=E_{\overline{A}}(-2)$ und $\mathfrak{V}_2:=\mathrm{Kern}((x^2+x+2)(\overline{A}))=\mathrm{Bild}((x+2)(\overline{A}))$. Dann sind $\mathfrak{V}_1$ und $\mathfrak{V}_2$ beide $\overline{A}$-invariant und $\mathfrak{V}=\mathfrak{V}_1\oplus\mathfrak{V}_2$.

$\left(\begin{array}{ccccc|c}2&2&2&2&0&0\\1&0&2&0&1&0\\2&2&1&1&1&0\\0&0&2&1&0&0\\2&1&1&1&2&0\end{array}\right)\rightsquigarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&0&0&p\\0&1&0&0&0&p\\0&0&1&0&0&2p\\0&0&0&1&0&2p\\0&0&0&0&1&p\end{array}\right)$, also $\mathfrak{V}_1=E_A(-2)=\langle\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\\1\end{pmatrix}\rangle$. Wende nun Spalten GAUSS an, um $\mathfrak{V}_2=\mathrm{Bild}((x+2)(\overline{A}))$ als Erzeugnis der Spalten von $A+2I_5$ zu erhalten. $\begin{pmatrix}2&2&2&2&0\\1&0&2&0&1\\2&2&1&1&1\\0&0&2&1&0\\2&1&1&1&2\end{pmatrix}\rightsquigarrow$ $\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}$. Also ist $\mathfrak{V}_2=\langle\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{pmatrix}\rangle$, $r_1=\frac{\dim(\mathfrak{V}_1)}{\mathrm{Grad}(x+2)}=1$ und $r_2=\frac{\dim(\mathfrak{V}_2)}{\mathrm{Grad}(x^2+x+2)}=2$. Gesucht wird noch eine Basis B mit ${}^B\overline{A}^B=\mathrm{Diag}(1,\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix})$.

Setze $B_1:=\begin{pmatrix}1\\1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$ als Eigenvektor, $B_2\in\mathfrak{V}_2$ beliebig, z. B. $B_2:=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\in\mathfrak{V}_2$, $B_3:=\overline{A}(B_2)=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\\2\end{pmatrix}$. Wähle nun $B_4\in\mathfrak{V}_2-\langle B_2,B_3\rangle$ beliebig, z. B. $B_4:=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{pmatrix}$ und $B_5:=\overline{A}(B_4)=\begin{pmatrix}2\\0\\0\\2\\1\end{pmatrix}$. Dann ist B eine gewünschte Basis mit ${}^B\overline{A}^B=\mathrm{Diag}(I_1\otimes M_{x+2},I_2\otimes M_{x^2+x+2})$.