LA Zusammenfassung

4. Februar 2001

Vom Minimalpolynom bis Multilinearformen

1 3.50 Def Minimalpolynom

1. Für $A \in K^{n\times n}$ und $P = p(x) = a_0 + a_1X + \ldots + a_dX^d \in K[x]Seip(A)$ definiert als $p(A) := a_0I_n + a_1A + A_2A^2 + \ldots + a_dA^d$ weiter heisst$K[x] \to K^{n\times n} : p \mapsto p(A)$ der Einsetzungshomomorphismus zu A und das normierte Polynom $\mu_A(x) = p = x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0$ minimalen Grades mit p(A) =0 heisst das Minimalpolynom von A.

2 3.51 Bemerkung

1. Der Grad des Minimalpolynoms von A ist das kleinste $d \in \mathbf{N}$ mit $(I_n, A, \ldots A^d)$ linear abhängig. Insbesondere ist das Minimalpolynom wohldefiniert.

2. Das Minimalpolynom, genauer $\mu : K^{n\times n} \to K[x] : A \mapsto \mu_A(x)$ ist eine Invariante der Konjugationsoperation von GL(n,K) auf $K^{n\times n}$.

3. Sei $\alpha \in End(V), b \in V^n$ Basis von V und $A =^B \alpha^B \Rightarrow \mu_\alpha(x) = \mu_A(x)$

4. Ist $p \in K[x]$ das Minimalpolynom von α bzw. von A. so ist der Kern des Einsetzungshom. gleich $pK[x]$. Insbesondere ist das Bild des Einsetzungshomomorphismus von der Dimension =Grad p(x)

3 3.53 Begleitmatrix

Eine Begleitmatrix zu einem Minimalpolynom $P = p(x) = a_0 + a_1X + \ldots + a_dX^d \in K[x]$ wird nach dem folgenden Schema aufgestellt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ddots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \vdots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{d-1} \end{pmatrix} \in K^{d\times d}$$

4 3.55 Def Eigenvektor

Sei $\alpha \in End(V)$, (V e.e. K-VR)

1. Ein $a \in K$ heisst Eigenwert von α falls ein Vektor $v \neq 0$ ex. mit $\alpha(v) = av$. In diesem Fall heisst v Eigenvektor und $E_\alpha(a) = E(a) := Kern(\alpha - aId_V)$ der Eigenraum vom Eigenwert a von α

2. Ist E eine Basis von V aus Eigenvektoren von α, so heisst E eine α-eigenvektorbasis oder einfach Eigenvektorbasis von V.

3. Entsprechend für Matrizen $A \in K^{n \times n}$

5 3.57 Lemma

$\alpha : V \to V lin.$, V e.e. K-VR $\{0\} \neq U \leq V$ mit $\alpha(U) \leq U$ Setze β :U $\to U : u \mapsto \alpha(u)$
$\Rightarrow \mu_\beta(x) | \mu_\alpha(x)$

6 3.58 Satz

$\alpha \in End(V)$, (V e.e. K-VR) $a \in K$ EW von $\alpha \Leftrightarrow a$ Wurzel des Minimalpolynoms $\mu_\alpha(x)$
$(\mu_\alpha(a) = 0)$

7 3.61 Def

1. Seien $U_1, \ldots U_n$ K-VR Die äussere dir. Summe der U_i ist definiert als $U_1 \oplus \cdots \oplus U_n = \bigoplus_{i=1}^n U_i = \{(u1, \ldots, u_n) | u_i \in U_i, i = 1, \ldots n\}$ mit $a(u_1, \cdots, u_n) := (au_1, \ldots, au_n), a \in K, u_i \in U_i)$

2. Der K-VR V heisst (inner) direkte Summe der Teilräume $U_i, \ldots, U_n \leq V$ falls $\bigoplus_{i=1}^n U_i \to V : (u_1, \ldots, u_n) \mapsto u_1 + \ldots + u_n$ ein Isomorphismus ist, d.h. jedes $v \in V$ kann eindeutig als $V = u_1 + \ldots + u_n$ mit $u_i \in U_i$ geschrieben werden.

3. $\pi \in (End(V))^n$ heisst eine Zerlegung der Identität (in orthogonale Projektionen), falls gilt
$\pi_i \circ \pi_j = \delta_{ij}\pi_i, 1 \leq i, j \leq n$ und $Id_V = \pi_1 + \cdots + \pi_n$ Ist $V = \bigoplus_{i=1}^n U_i$
$B^i \in (U_i)d_{(i)}$ Basis von U$_i \forall i \Rightarrow B = (B_1^{(1)}, \ldots, B_{d(1)}^{(1)}, B_1^{(2)}, \ldots B_{d(2)}^{(2)}, \cdots, B_{d(n)}^{(n)}) \in V^l$ mit $l = d(1) + \cdots + d(n)$ ist eine Basis von V, eine solche Basis heisst angepasst.

8 3.62. Lemma

1. Sei $V = \bigoplus_{i=1}^n U_i$. Dann definiert $\pi_i : V \to V : u_1 + \cdots + u_n \mapsto u_i (u_i \in U_i)$ mit $i = 1 \ldots n$ eine Zerlegung der Identität mit $U_i = Bild\pi_i$

$(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ heisst die zur direkten Summenzerlegung $V = \bigoplus_{i=1}^n U_i$ assoziierte zerlegung der Identität.

2. Ist $\pi \in (End(V))^n$ eine Zerlegung der Identität, so gilt $V = \bigoplus_{i=1}^n Bild(\pi_i)$ und π ist die zur dieser direkten Summenzerlegung assoziierte Zerlegung der Identität.

9 3.63. Satz

Sei $V = \bigoplus_{i=1}^n U_i$ eine dir. Summenzerlegung mit assoz. Zerl. $\pi \in (End(V))^n$ der Identität und $\alpha \in End(V)$
Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) $\alpha(U_i) \leq U_i \forall i = 1, \ldots n$

(b) $\alpha \circ \pi_i = \pi_i \circ \alpha \forall i = 1, \ldots n$ (In diesem Fall : α ist verträglich mit der Zerlegung)

1. Ist α verträglich mit der Zerlegung und ist $B = (B_1^{(1)}, \ldots, B_{d(1)}^{(1)}, B_1^{(2)}, \ldots B_{d(2)}^{(2)}, \cdots, B_{d(n)}^{(n)})$ eine angepasste Basis mit $B^{(i)} \in (U_i)^{d(i)} \forall i$
$\Rightarrow \alpha = Diag(B_1^{(1)}, \ldots, B_{d(1)}^{(1)}, B_1^{(2)}, \ldots B_{d(2)}^{(2)}, \cdots, B_{d(n)}^{(n)})$
wobei $\alpha_i : U_i \to U_i : u \mapsto \alpha(u)$

10 3.64. Satz

Sei V ein e.e. K-VR und $\alpha \in End(V)$ mit Minimalpolynom $\mu(x) = \mu_\alpha(x)$ vom Grad d.
Genau dann existiert eine Basis aus EV, wenn μ genau d verschiedene Wurzeln $s_1, \ldots, s_d$ hat.

11 3.65 Satz

Sei V ein e.e. K-VR und $\alpha \in End(V)$ mit Minimalpolynom $\mu_\alpha(x) \in K[x]$

1. ist $\mu_\alpha(x) = p_1(x)p_2(x)$ mit $p_1, p_2 \in K[x]$ teilerfremd und normiert $(ggT(p_1, p_2) = 1)$
$\Rightarrow$ es existiert eine mit α verträgliche dir. Summenzerlegung $V = T_1 \oplus T_2$,so dass $\alpha_i : T_i \to T_i : T \mapsto \alpha(T)$ MinPol $p_i(x)$ hat.
Insbesondere hat ${}^B\alpha^B$ Blockdiagonalgestalt für angepasste Basen.

2. Ist $\mu_\alpha(x) = \prod_{i=1}^n p_i, p_i \in K[x]$ paarweise teilerfremd und normiert $\to$ ex. eine mit α verträgliche dir. Summenzerlegung $V = \bigoplus_{i=1}^n T_i$,so dass $\alpha_i := \alpha|_{T_i} : T_i \to T_i$ Minimalpolynom p_i hat.

12 3.66 Lemma

Sei $\alpha \in End(V)$ mit irreduziblem Minimalpolynom $\mu_\alpha(x) \in K[x]$ vom Grad d = Dim V.
Ist $v \in V - \{0\}$
$\Rightarrow B := (v, \alpha(v), \dots, \alpha^{d-1}(v))$ ist eine Basis von V und ${}^B\alpha^B$ =Begleitmatrix von $\mu_\alpha(x)$

13 3.68 Algorithmus

Gegeben : $\alpha \in End(V)$, V e.e. K-VR.
Gesucht : Das Minimalpolynom $\mu_\alpha(x)$
Algorhytmus:

1. Wähle $v \in V - \{0\}$

2. Bestimme das Minimalpolynom $\mu_{\alpha,v}(x)$ von v durch Testen wann $((v), (v, \alpha(v)), (v, \alpha(v), \alpha^2(v), \dots)$erstmals l.a. wird.
   Ist $a \in K^{(n+1)\times 1)}$ die erste lin.Abhängigkeit mit $a_{n+1} = 1$ also
   $(v, \alpha(v), \dots, \alpha^n(v)) \cdot a = 0$
   $\Rightarrow \mu_{\alpha,v}(x) = a_1 + a_2 x + \dots + a_n x^{n-1} + x^n$
   Setze $W =< v, , \alpha(v), \dots, \alpha^n(v) >$ und$\mu(x) = \mu_{\alpha,v}(x)$.

3. Solange W $\neq$ V, wähle $v \in V - W$
   Bestimme das MinPol $\mu_{\alpha,v}(x)$
   Ersetze $\mu(x)$ durch $KgV(\mu(x), \mu_{\alpha,v}(x)) =$
   $\frac{\mu(x)\cdot\mu_{\alpha,v}(x)}{ggT(\mu(x),\mu_{\alpha,v}(x)}$ und W durch $W+ < v, \alpha(v), \alpha^2(v), \dots >$
   Falls $W \neq V$, wiederhole Schritt 3.

4. Sobald W=V ist, gilt$\mu(x) = \mu_\alpha(x)$.

14 3.69 Satz

Sei $\alpha \in End(V)$ mit irreduziblem Minimalpolynom $\mu_\alpha(x)$
$\Rightarrow$ Grad$(\mu_\alpha(x))|^{DimV}$
weiter ex. eine Basis B von V mit ${}^B\alpha^B = I_r \otimes M_p := Diag(\underbrace{M_{\mu_\alpha}, \dots, M_{\mu_\alpha}}_{r})$
wobei $r \cdot Grad(\mu_\alpha) = DimV$ und M_{μ_α} die Begleitmatrix zu μ_α ist.

15 3.70 Folgerung

Sei $\alpha \in End(V)$ mit MinPol $\mu_\alpha(x) =_{i=1}^{l} p_i(x)$ mit $p_i(x) \in K[x]$ irred. und normiert. Genau dann existiert eine Basis B mit
${}^B\alpha^B = Diag(I_{r_1} \otimes M_{p_1}(x), \dots, I_{r_l} \otimes Mp_l(x))$
wenn die p_i paarweise verschieden sind. Siehe Ü 12.

16 3.71 Lemma

Ein normiertes Polynom $p(x) \in \mathbf{R}[x]$ ist genau dann irreduzibel (in $\mathbf{R}[x]$) falls $p(x) = x - a$ für ein $a \in \mathbf{R}$ oder $p(x) = x^2 + ax + b$ für $a, b \in \mathbf{R}$ mit $a^2 - 4b < 0$

17 4.1 Def Inneres Produkt

Sei V ein $\mathbf{R}$-VR

1. Eine symmetrische Bilinearform Φ auf V ist eine Abb
   $\Phi : V \times V \to \mathbf{R}$ mit
   $\Phi(v,w) = \Phi(w,v) \forall v, w \in V$ und
   $\Phi(v, aw_1 + bw_2) = a\Phi(v, w_1) + b\Phi(v, w_2) \forall v, w_1, w_2 \in V$ Die Abb. $V \to \mathbf{R} : v \mapsto \Phi(v,v)$ heisst die von Φ induzierte quadratische Form.

2. Ein inneres Produkt oder eine positiv definite Bilinearform oder ein pos.def. Skalarprodukt auf V ist eine symm. Bilinearform Φ auf V mit $\Phi(v,v) > 0 \forall v \in V - \{0\}$

3. Ist $DimV <$ und Φ ein inneres Produkt auf V, dann heisst (V, Φ) ein Euklidischer VR oder ein endlich dim. Hilbertraum.

4. $\mathbf{R}^{n \times n}_{sym} = \{A \in \mathbf{R}^{n \times n} | A^{tr} = A\}$ bezeichnet die Menge der symmetrischen Matrizen über $\mathbf{R}$. $A \in \mathbf{R}^{n \times n}_{sym}$ heisst positiv definit falls
   $x^{tr} Ax > 0 \forall x \in \mathbf{R}^{n \times 1} - \{0\}$

Klar: symm. Bilinearform ist in beiden Komponenten linear.

18 4.2 Beispiel

1. $V = \mathbf{R}$
   $\Phi : V \times V \to \mathbf{R} : (v,w) \mapsto v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n$ist ein inneres Produkt, Standardskalarprodukt.
   Allg. $V = \mathbf{R}^{n \times m}$
   $\Phi : V \times V \to \mathbf{R} : (A,B) \mapsto Spur(AB^{tr})$ inneres Produkt, gennant Standardskalarprodukt auf $\mathbf{R}^{m \times n}$

2. Sei $V \leq \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ ein VR von stetigen Funktionen.
   $\Phi : V \times V \to \mathbf{R}(f,g) \mapsto \int_{-1}^{2} f(x)g(x)dx$.
   Falls $int^2_{-1} f(x)^2 dx > 0 \forall f \in V, f \neq 0$, dann ist Φ ein inneres Produkt(z.B. wenn V aus Polynomfunktionen besteht.)

3. Sei V ein $\mathbf{R}$-VR, e.e und $B \in V^n$ Basis von V.
   Für $A \in \mathbf{R}^{n \times n}_{sym}$ist $\Phi : V \times V \to \mathbf{R} : (v,w) \mapsto (v^B)^{tr} A w^B$ eine symm. Bilinearform.
   Φ inneres Produkt $\Leftrightarrow$ A positiv definit, (z.B. A=I_n)

19 4.3 Satz

Sei V ein $\mathbf{R}$-VR mit Basis $B \in V^n$ und $\Phi : V \times V \to \mathbf{R}$ symm. Bilinearform
Notation: ${}_B\Phi^B : \underline{n} \times \underline{n} \to \mathbf{R} : (i,j) \mapsto \Phi(B_i, B_j)$
heisst die Grammatrix von Φ bez. B
Es gilt: ${}_B\Phi^B \in \mathbf{R}^{n\times n}_{sym}$ und für alle $v, w \in V$ gilt:
$\Phi(v,w) = v_B \cdot_B \Phi^B \cdot^B w$ mit $v_B := (v^B)^{tr}$.

20 4.4 Folgerung

Sind $B, C \in V^n$ Basen von V, und Φ Bilinearform auf V
$\Rightarrow_C \Phi^C = \left({}^B id_V^C\right)^{tr} \cdot \left({}_B\Phi^B\right) \cdot \left({}^B id_V^C\right)$

21 4.5 Definition

Sei (V, Φ) Eukl. VR.

1. Das Paar $(x,y) \in V^2$ heisst orthogonal falls $\Phi(x,y) = 0$
2. Eine Basis $B \in V^n$ von V heisst Orthogonalbasis, falls $\Phi(B_i, B_j) = 0 \forall i \neq j$ d.h. ${}_B\Phi^B$ ist eine Diagonalmatrix.
3. Eine Basis $B \in V^n$heisst Orthonormalbasis, kurz ON-Basis, falls $\Phi(B_i, B_j) = \delta_{ij}$ für $i, j \in \underline{n}$, d.h. ${}_B\Phi^B = I_n$.

22 4.6 Satz

Sei $B \in V^n$ eine ON-Basis des Eukl.VR (V, Φ)
Für v $\in V gilt:$
v=$\Phi(B_1, v)B_1 + \cdots + \Phi(B_n, v)B_n$

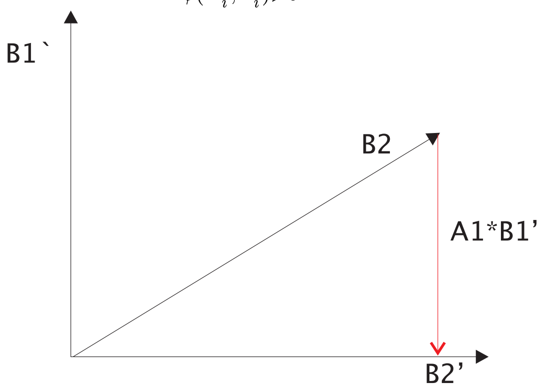
d.h.$v^B = \begin{pmatrix} \Phi(B_1, v) \\ \vdots \\ \Phi(B_n, v) \end{pmatrix}$

$\Phi(B_i, v)$ heisst der i-te Fourrierkoeffizient von V bez. ON-Basis B.
Beweis: Sei $V = a_1 B_1 + \cdots + a_n B_n = B \cdot a$
$\Rightarrow \Phi(B_i, V) = a_1 \underbrace{\Phi(B_i, B_1)}_{0} + \cdots + a_i \underbrace{\Phi(B_i, B_i)}_{1} + \cdots + a_n \underbrace{\Phi(B_i, B_n)}_{0} = a_i$,q.e.d
Ist $B \in V^n$ Orthogonalbasis $\Rightarrow B' \in V^n$ON-Basis, wobei $B'_i := \Phi(B_i, B_i)^{-1/2} \cdot B_i$

23 4.7 Satz

Ist (V, Φ) ein Eukl.VR mit Basis $B \in V^n \Rightarrow \exists$ ON-Basis B' von V mit $< B'_1, \ldots, B_i` >=< B_1, \ldots, B_i > \forall i \in \underline{n}$
Beweis(Schmiddtsches Orthogonalisierungsverfahren):

Es genügt, eine Orthogonalbasis zu konstruieren, die später normiert werden kann.
Setze $B_1' := B_1$. Angenommen, $B_1', \dots, B_{k-1}'$ schon konstruiert.
Ansatz: $B_k' = a_1 B_1' + \dots + a_{k-1} B_{k-1}' + 1 \cdot B_k$ (damit $< B_1', \dots, B_k' >=< B_1, \dots, B_k >$ automatisch erfüllt)
Bestimme a$_1$:0 $=\Phi(B_1', B_k') = a_1 \Phi(B_1', B_1') + 0 + \dots 0 + \Phi(B_1', B_k)$
d.h. $a_1 = -\frac{\Phi(B_1', B_k)}{\phi(B_1', B_1') > 0}$
analog $a_i = -\frac{\Phi(B_i', B_k)}{\phi(B_i', B_i') > 0}$



24 4.9 Folgerung :Chaulesky - Zerlegung

25 4.10 Satz Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Sei (V, Φ) ein Eukl. VR und $v, w \in V \Rightarrow \Phi(v, v)\Phi(w, w) - (\Phi(v, w))^2 \geq 0$ mit Gleichheit $\Leftrightarrow$ wenn (v,w) l.a.

26 4.11 Definition

1. Für $v \in V$ heisst$|v| := \sqrt{\Phi(v, v)}$ die Länge von v.
2. Für $(v, w) \in V^2$ mit $v \neq 0$ und $w \neq 0$ ist der Winkel $\angle(v, w)$ mit $0 \leq \angle(v, w) \leq \pi$ durch
   $\cos(\angle(v, w)) = \frac{\Phi(v, w)}{||v||w|}$ definiert.

27 4.12 Satz Dreicksungleichung

Sei (V, Φ) ein Eukl. VR und $v, w \in V \Rightarrow |v + w| \leq |v| + |w|$

28 4.13 Definition

(V, Φ) ein Eukl. VR. Für $M \subseteq V$ heisst $M^\perp := v \in V | \Phi(w, v) = 0 \forall w \in M$ der Orthogonalraum von M.

29 4.14 Satz

Sei (V, Φ) ein Eukl. VR und $U \leq V \Rightarrow V = U \oplus U^{\perp}$
Insbesondere $DimU + DimU^{\perp} = DimV$.
Die Projektionen $\pi_U und \pi_{U^{\perp}}$ in der Zerlegung von V in Orthogonalräume werden Orthogonalprojektionen genannt (auf U bzw. auf $U^{\perp}$) Ist $v \in V \Rightarrow |\pi_{U^{\perp}}(v)| = min\{|v-u||u \in U\}$ wird durch genau einen Vektor angenommen, nämlich $\pi_U(v)$ (=: Beste Approximation von V an U).

30 4.16 Satz

Sei $\alpha \in End(V)$ Dann ex. ein eindeutiges $\alpha^{ad} \in End(V)$ mit $\Phi(v, \alpha(w)) = \Phi(\alpha^{ad}(v), w) \forall v, w \in V$.
α^{ad} heisst die zu α adjungierte linerare Abbildung.
Ist $B \in V^n$ Basis von V, so gilt:
${}^{B}\left(\alpha^{ad}\right)^{B} = \left({}_{B}\Phi^{B}\right)^{-1} \left({}^{B}\alpha^{B}\right)^{tr} \left({}_{B}\Phi^{B}\right)$

31 4.17 Definition

$\alpha \in End(V)$ heisst selbstadjungiert oder symmetrisch, falls $\alpha^{ad} = \alpha$
$\Phi(\alpha(v), w) = \Phi(v, \alpha(w))$.

32 4.18 Beispiel

Eine Orthogonalprojektion, also ein $\pi \in End(V)$ mit $\pi^2 = \pi$ eind. $(Kern(\pi))^{\perp} = Bild(\pi)$ ist selbstadjungiert. Umgekehrt klar: jede selbstadjungierte Projektion $\pi \in End(V)$ ist eine Orthogonalprojektion. Dann sei $v?\pi(v) \in Bild(\pi), w \in Kern(\pi) \Rightarrow$
$\Phi(w, v) = \Phi(w, \pi(v)) = \Phi(\pi(w), v) = \Phi(0, v) = 0$

33 4.19 Bemerkung

Ist $\alpha \in End(V)$ selbstadjungiert $\Rightarrow \Phi_a : V \times V \to \mathbf{R}(v, w) \mapsto \Phi(v, \alpha(w))$ ist eine symmetrische Bilinearform.
α heisst positiv definit falls Φ positiv definit.
Umgekehrt: $\psi : V \times V \to \mathbf{R}$ symm. Bilinearform
$\Rightarrow \exists$ein eind. $\alpha = \alpha^{ad} \in End(V)$ mit $\psi = \Phi_a$.
Für eine Basis $B \in V^n$ gilt: ${}_{B}\Phi_{\alpha}^{B} =_{B} \Phi^{b} \cdot^{B} \alpha^{B}$
insbesondere B ON-Basis $\Rightarrow_{B} \Phi_{\alpha}^{B} =^{B} \alpha^{B}$

34 4.20

$\in \mathbf{R}^{n \times n}$ heisst orthogonal, falls $g^{tr} g = I_n$, d.h. g ist invertierbar mit $g^{-1} = g^{tr}$.
Die Menge aller orthogonalen Matrizen von Grad n wird mit $O_n(\mathbf{R})$ bezeichnet

und heisst die orthogonale Gruppe vom Grad n über $\mathbf{R}$.

35 4.21 Hauptsatz - Reeller Spektralsatz

1. Ist $\alpha \in End(V)$ selbstadjungiert, (V, Φ) Eukl. VR, so ex. eine ON-Basis aus Eigenvektoren von α.

2. (Matrixversion): Ist $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ symmetrisch, so ex. orthogonale Matrix $g \in O(n, \mathbf{R})$ mit $g^{tr}Ag = g^{-1}Ag$ diagonal.

Beweis :Matrixversion folgt sofort aus der Nichtmatrixversion.

1. Schritt: Das Minimalpolynom $\mu_\alpha(x)$von α ist vielfachheitenfrei.
   Genügt zu zeigen: $p(x) \in \mathbf{R}[x]$mit $p(\alpha)^2 = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0$. $[p(\alpha)^{tr} = p(\alpha^{tr})]$
   . Aber mit α ist auch $p(\alpha)$ selbstadj: $\Rightarrow p(\alpha)^2 = p(\alpha)^{ad} \circ p(\alpha)$
   In Matrixform bez. ON-Basis B: $A =^B \alpha^B (= A^{tr})$
   $p(A)^2 = p(A)^{tr} \cdot p(A)$
   Also $p(\alpha)^2 = 0 \Rightarrow p(A)^{tr} p(A) = 0 \Rightarrow p(A) = 0 \Rightarrow p(\alpha) = 0$.
   Konsequenz : $(\pi_1, \ldots, \pi_k)$ Zerlegung der Id_V in örthogonaleP̈rojektionen π_i mit $\pi_i = p_i(\alpha)$.
   $\alpha|_{Bild\pi_i} = \alpha_i$hat irreduzibles MinPol $p_i(x) \in \mathbf{R}[x]|p_i$ paarw. verschieden.
   $V = Bild\pi_1 \oplus \cdots \oplus Bild\pi_k$

2. Schritt: Hat ein selbstadj Endomorphismus irred. Minimalpolynom $\Rightarrow$ Grad=1 (insbesondere Grad $p_i = 1$).
   Irreduzible Polynome in $\mathbf{R}$ haben grad 1 oder 2.
   Schliesse Grad 2 aus:
   Angenommen, Grad=2 $\Rightarrow$ ex. $v \in VR$ mit $\underbrace{(v, \alpha(v))}_{2-diminvar.Teilraum}$ l.u und $(v, \alpha(v), \alpha^2(v))$l.a.
   Wähle ON-Bais von $< v, \alpha(v) >$
   $\alpha|_{<v,\alpha(v)>}$ liefert symmetrische Matrix:
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$
   $\Rightarrow x^2 - (a^2 + b^2)$ ist das MinPol zur Irreduziblität.
   Widerspruch, da zerlegbar in $(x - \sqrt(a^2 + b^2)(x + \sqrt(a^2 + b^2)$

3. Schritt (Zusammenfassung):
   Wir haben eine Zerlegung von V in die Eigenrüme $Bild(\pi_i)$ von α. Indem wir von jedem $Bild(\pi_i)$ eine ON-Basis hernehmen und zu einer Basis von V zusammenfügen, bekommen wir eine ON-Basis aus Eigenvektoren von α, denn $Bild\pi_i$ ist orthogonal zu $Bild(\pi_j)|(I \neq j)$.
   Bew: mit α ist auch $q_i(\alpha = \pi_i$ selbstadjungiert, q.e.d
   Die Hauptachsen sind die Eigenvektoren.

36 4.22 Bemerkung

Sei $\alpha \in End(V)$ selbstadj und B eine ON-Basis aus Eigenvektoren von α.
Die Einheitssphäre $S^{n-1} := \{x_1B_1 + \cdots + x_nB_n | x_1^2 + \cdots x_n^2 = 1\}$
wird durch α auf das Ellipsoid $(S^{n-1}) = \{x_1B_1 + \cdots + x_nB_n | \sum_{a_i \neq 0} \left(\frac{x_i}{a_i}\right)^2 = 1\}, x_i = 0$ falls $a_i = 0$
Beachte: $\alpha = \sum_i a_i \pi_i$

37 4.24 Definition

$\alpha \in End(V)$

1. α heisst normal, falls $\alpha^{ad} \circ \alpha = \alpha \circ \alpha^{ad}$

2. α heisst orthogonal, falls $\alpha^{tr} \circ \alpha = Id_V$ d.h. $\alpha^{tr} = \alpha^{-1}$. Die Menge der orthogonalen Abbildungen von V wird mit $O(V, \Phi)$ bezeichnet und heisst die orthogonale Gruppe von (V, Φ)

3. α heisst schiefsymmetrisch, falls $\alpha^{ad} = -\alpha$
   Klar: selbstadj, orthogonale, schiefsymmetrische Endomorphismen sind allesamt normal. (:-o)
   normal: Sowohl $\alpha^{ad} \circ \alpha$ als auch $\alpha \circ \alpha^{ad}$ sind selbstadj. (gilt immer).
   αnormal: beide sind gleich.

38 4.25 Bemerkung

Sei $\alpha \in End(V)$
Dann gilt:

1. $\alpha_{sym} = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha^{ad})$ ist symmetrisch
   $\alpha_{schief} = \frac{1}{2}(\alpha - \alpha^{ad})$ ist schiefsymmetrisch und $\alpha = \alpha_{sym} + \alpha_{schief}$

2. α normal $\Leftrightarrow \alpha_{sym} \circ \alpha_{schief} = \alpha_{schief} \circ \alpha_{sym}$

39 4.26 Bemerkung

1. $\alpha \in End(V)$ orthogonal $\Leftrightarrow \Phi(\alpha(v), \alpha(w)) = \Phi(v, w) \forall v, w \in V$
   Es genügt sogar, dass v,w, eine Basis B von V durchläuft:
   $\left({}^B\alpha^B\right)^{tr}_B \Phi^B \cdot \left({}^B\alpha^B\right) =_B \Phi^B$
   (Beachte B ON-Basis)

2. $O(V, \Phi)$ ist eine Gruppe bez. der Komposition, d.h. eine Untergruppe von $GL(V)$

3. Ist $B \in V^n$ eine ON-Basis von V, so ist $O(V, \Phi) \to O(n, \mathbf{R}) : \alpha \mapsto^B \alpha^B$ ein Isomorphismus von Gruppen.

4. Bei der Operation von $O(V,\Phi)$ auf V ist die Länge eine trennende Invariante (d.h. Bahnen sind Sphären mit Mittelpunkt 0)
5. Sei Einheitssphäre $S^{n-1} := \{v \in V | \Phi(v,v) = 1\}$
   Bei der Operation von $O(V,\Phi)$ auf $S^{n-1} \times S^{n-1} : O(V,\Phi) \times (S^{n-1} \times S^{n-1}) \to S^{n-1} \times S^{n-1} : (\gamma,(v,w)) \mapsto (\gamma(v),\gamma(w))$
   ist der Winkel eine trennende Invariante.

40 4.28 Lemma

Sei $DimV = 2, B \in V^2$ eine ON-Basis, $\alpha \in End(V)$ normal mit irred. MinPol
Dann gilt: ${}^B\alpha^B \in < I_2; i := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} > \leq \mathbf{R}^{2\times 2}$ (und umgekehrt).
Genauer: Ist $(x-a)^2 + b^2$ das Minimalpolynom, so ist ${}^B\alpha^B = aI_2 + bi$
ist $x - a$ das Minimalpolynom, so ist ${}^B\alpha^B = aI_2$. Mit anderen Worten:
Jede Normale Abb $\neq 0$ mit irred. Minpol lässt sich eindeutig als positives vielfaches einer Orthogonalen Drehung schreiben. (Polarzerlegung komplexer Zahlen)

41 4.29 Lemma

Ist $\pi \in End(V)$ eine normale Projektion, also $\pi^{ad} \circ \pi = \pi \circ \pi^{ad}$ und $\pi^2 = \pi$
$\Rightarrow \pi$selbstadjungiert.
Beweis: π Proj. $\Rightarrow V = Kern(\pi) \oplus Bild(\pi)$
Zeige diese Zerlegung ist orthogonal.
Klar: $\pi^{ad} \circ \pi = \pi \circ \pi^{ad}$ ist selbstadj. Projektion.
Fertig, falls wir zeigen $Kern(\pi) = Kern(\pi \circ \pi^{ad})$
$Bild(\pi) = Bild(\pi \circ \pi^{ad})$
Klar: $kern(\pi) \subseteq Kern(\pi \circ \pi^{ad})$.
$v \in V, \pi(v) = 0 \Rightarrow \pi^{ad}(\pi(v)) = 0$
. Andererseits: $Rg(\pi) = Rg((\pi^{ad} \circ \pi)$
$\Rightarrow Kern(\pi)) = Kern((\pi^{ad} \circ \pi)$
$Bild\pi \subseteq Bild((\pi \circ \pi^{ad})$ wie oben (Dimension). q.e.d

42 4.30

Satz Sei $\alpha \in End(V)$ normal. Dann ist das Minpol von $\alpha\mu_\alpha(x)$ vielfachheitenfrei.
Ist $\mu_\alpha(x) = \prod_i (x - c_j) \prod_l (\underbrace{(x-a_l)^2 + b_l}_{QuadratischeErgänzung})$die Zerlegung von $\mu_\alpha(x)$ in irreduzible Faktoren $\Rightarrow$ ex. eine ON-Basis $B \in V^n$ von V, so dass ${}^B\alpha^B$ Blockdiagonalgestalt hat mit Diagonalblöcken $c_j \in \mathbf{R} \equiv \mathbf{R}^{1\times 1}$ und $a_l I_l + b_l i$ mit $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, wobei jeder Block mit einer wohlbestimmten Vielfachheit > 0 vorkommt
Spezialfälle:

1. selbstadj: Irred. Teiler vom Grad 2 kommen nicht vor.
2. schiefsymmetrisch: alle $c_j = 0$ und alle $a_l = 0$.
3. orthogonal: alle $c_j^2 = 1$ und alle $a_l^2 + b_l^2 = 1$(sin u.cos Blöcke)

43 k4.30 Satz Polarzerlegung

Sei $\beta \in GL(V)$. Dann gibt es eindeutig bestimmmmte $\gamma \in O(V, \Phi)$ und $\alpha \in End(V)$ selbstadj. und positiv definit mit $\beta = \alpha \circ \gamma$ (Folgerung aus Spektralsatz, allgemeine lin. Abbildung).
Beweis: (mit Matrizen)
$B \in GL(n, \mathbf{R})$
Eindeutigkeitsbeweis: Sei $B = Ag = A'g'$
$A, A' \subset \mathbf{R}^{n \times n}_{sym}$, positiv definit $g, g' \in O(n, \mathbf{R})$.
$\Rightarrow a^2 = Agg^{tr}A^{tr} = Bb^{tr} = (A')^2$
$\Rightarrow A = A' \Rightarrow g = g'$
Existenz:A sei die eind. positiv definite Wurzel aus $BB^{tr}.(A^2 = BB^{tr}), A \in \mathbf{R}^{n \times n}_{sym}$, pos.def
Beh: $g := A^{-1}B$ orthogonal:
$gg^{tr} = A^{-1}BB^{tr}\underbrace{A^{-1}}_{A^{tr}=A}{}_{=a^{-1}A^2A^{-1}=I_n,}$,q.e.d.
Kochrezept:

1. berechne A, positiv definit, symmetrisch mit $A^2 = AA^{tr} = C$
   Berechne das MinPol von C sowie ON-Basen der ER.
   $\rightarrow O = (v_1' \; v_2' \dots v_n'), v_{1n} =$ ON-Basen der ER
   $C = O^{tr} \cdot Diag(\lambda_1 \cdots_n) \cdot O$
   $A := O^{tr} \cdot Diag(\sqrt(\lambda_1) \cdots \sqrt(\lambda_n)) \cdot O.$
   $a^2 = O^{tr} \cdot Diag(\sqrt(\lambda_1) \cdots \sqrt(\lambda_n)) \cdot \underbrace{O \cdot O^{tr}}_{Id} \cdot Diag(\sqrt(\lambda_1) \cdots \sqrt(\lambda_n)) \cdot O$
   $= O^{tr} \cdot Diag(\lambda_1 \cdots_n) \cdot O$
2. $g \in O(n, \mathbf{R})$ berechnen:
   $Ag = B \Leftrightarrow g = A^{-1}B$
   $A^{-1} = \underbrace{O^{-1}}_{O^{tr}} \cdot Diag(\frac{1}{\sqrt(\lambda_1)} \cdots \frac{1}{\sqrt(\lambda_n)}) \cdot \underbrace{O^{-tr}}_{O}$

44 5.1. Def. Linearform

: Sei V ein K-VR Eine *Linearform* (lineares Funktional, Kovektor) auf oder von V ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow K$ von V nach K.
Der *Dualraum* $V*$ von V ist der VR aller Linearformen von V.

45 5.2 Beispiel

1. Sei $V = K^{n \times 1}$. der Spaltenraum von K n-dimensional.
   Dann kann man $V*$ mit $K^{1 \times n}$ Zeilenraum identifizieren,

denn jedes $\phi \in V*$ kann durch seine Matrix bez. der Standardbasis von $K^{n\times 1}$ und der Standardbasis (1) von K, also eine Zeile $A \in K^{1\times n}, \bar{A} = \phi - | \in K$

2. Ist $V \leq K^M$ (M Menge) so liefert jedes $m \in M$ eine Linearform: $V \to K : f \mapsto f(m)$

3. Ist $V \leq \mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ VR integrierbarer Funktionen, so ist $V \to R : f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ein Element von $V*$.

4. $\alpha : V \to W lin, B \in V^n, C \in W^m$ Basen von W und W.
   Früher: $\underbrace{Hom(V,W)}_{von Babh.} \to W^n : \alpha \mapsto \alpha \circ B = \underbrace{(\alpha(B_1), \ldots \alpha(B_n))}_{Spalten\ der\ Matrix}$
   $Jetzt:$
   $\underbrace{(V^*)^m}_{von Cabh.} \to Hom(V,W) : (\delta_1, \ldots, \delta_m) \mapsto \delta$
   $\delta(v) = \underbrace{\delta_1(v)C_1 + \cdots + \delta_m(v)C_m}_{Zeilen\ der\ Matrix}$

5. $V = \mathbf{C}\ \mathbf{R} - VR$
   RE: $\mathbf{C} \to \mathbf{R} : a + ib \mapsto a$ Linearform

6. (V, Φ) Eukl.VR, Für jedes $v_0 \in V$
   ist $\Phi(v_0, \ ) : V \to \mathbf{R} : w \mapsto \Phi(v_0, w)$ linear,
   also $\Phi(v_o, \ ) \in V^*$

46 5.3 Satz

V ein e.e. K-VR.

1. Es gilt $Dim(V^*) = Dim(V)$

2. Sei $B \in V^n$ eine Basis von V $\Rightarrow \exists B^* \in (V^*)^n$ definert durch $B_i^* \in V^*$ mit $B_i^*(B_j) = \delta_{ij}$, so dass B^* eine Basis von V^* ist, genannt die *Dualbasis* von V^* zu B.

Für alle $\check{i}nV$ gilt:
$v = B_1^*(v)B_1 + \cdots + B_n^*(v)B_n$

47 5.4 Satz

Seien $B, C \in V^n$ Basen von V
$\Rightarrow {}^{C^*} Id_{V^*}^{B^*} = ({}^B Id_V^C)^{tr}$
d.h. ${}^{B^*} Id_{V^*}^{C^*} = (({}^B Id_V^C)^{tr})^{-1}$

48 5.5 Satz

1. Ist $U \leq V$ so ist der *Amihilator* (oder so ähnlich)
   $U^\perp := \{\phi \in V^* | \phi(u) = 0 \ \forall u \in U\}$ ein Teilraum von V^*

2. Ist V e.e., so gilt:
   $T(V) := \{U | U \leq V\} \to T(V^*)$
   $U \mapsto U^\perp$
   ist eine *Galloiskorrespondenz*, d.h eine bijektive Abbildung mit
   $U \subseteq T \Leftrightarrow U^\perp \supseteq T^\perp$
   weiterhin gilt: $Dim\ U + Dim\ U^\perp = Dim\ V$ besser $U^* \cong V^*/_{U^\perp}$.