Zur Organisation der Vorlesung und Übungen
Lineare Algebra I (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

1. Übungen

Jeden Donnerstag wird zu Beginn der Vorlesung ein Übungsblatt ausgegeben, dessen schriftliche Bearbeitung spätestens am Freitag bis 14.00 Uhr (eine Woche später) im Übungskasten des Lehrstuhls D für Mathematik (Sammelbau, Templergraben 64, 2.Etage) abgegeben werden muß. Diese Übungsaufgaben dienen der Aneignung von Methoden und Stoff der Vorlesung und sind eine wesentliche Vorbereitung auf die Klausur und spätere Prüfungen.

Die Übungen finden in Gruppen jeweils Mittwochs von 17.30 bis 19.00 Uhr statt. Dort werden u. a. die Hausaufgaben besprochen und die Bearbeitungen korrigiert zurückgegeben. In der Übungsstunde am 20.10.99 werden Präsenzaufgaben und Beispiele behandelt.

Wer an den Übungen teilnehmen möchte (das sollte jede(r)!), kann sich am Donnerstag, dem 14.10.99, während der Vorlesung in eine der vorbereiteten Listen eintragen. Die endgültige Einteilung in die Übungsgruppen wird am Montag, dem 18.10.99, vor der Vorlesung ausgehängt.

2. Klausuren

Im Rahmen der Vorlesung findet eine Klausur in zwei Teilen statt. Die Termine sind

(1) Klausur, 1. Teil am Freitag, dem 17.12.1999, um 18.00 Uhr,

(2) Klausur, 2. Teil am Freitag, dem 11.2.2000, um 18.00 Uhr,

In den Semesterferien wird es eine Ersatz-Scheinklausur geben.

Für Studierende der Informatik findet in der vorlesungsfreien Zeit eine Vordiplomklausur statt.

Einzelheiten zu diesen Klausuren werden jeweils rechtzeitig bekanntgegeben.

3. Übungsschein

Um einen Übungsschein zu erhalten, müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

(1) 50 % der Übungsaufgaben müssen sinnvoll bearbeitet sein,

(2) die Scheinklausur muß bestanden werden.

4. Diskussionsstunden

Im Anschluß an die Vorlesungstermine am Montag und Donnerstag ist jeweils eine halbe Stunde lang Zeit, Fragen zur Vorlesung und zu den Übungen zu stellen.

5. Weitere Fragen zur Organisation

Mit eventuellen weiteren Fragen zur Organisation von Vorlesung und Übungen können Sie sich im Lehrstuhl D für Mathematik an Frank Lübeck (Raum 202) oder Max Neunhöffer (Raum 229) wenden.

Email-Adressen:

`luebeck@math.rwth-aachen.de`

`neunhoef@math.rwth-aachen.de`

6. Übungsaufgaben im Web

Die Übungszettel können unter der WWW-Adresse

`http://www.math.rwth-aachen.de/~Frank.Luebeck/LAI/`

als DVI und Postscript-Dateien heruntergeladen werden.

7. Literatur zur Vorlesung

Artmann, B.: *Lineare Algebra.* Birkhäuser 1986, ^{3}1991.

Beutelspacher, A.: *Lineare Algebra. Eine Einführung in die Wissenschaft der Vektoren, Abbildungen und Matrizen.* Vieweg 1994.

Brieskorn, E.: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie.* Band I, Vieweg 1983. Band II, Vieweg 1985. Band III, Vieweg 1994.

Fischer, G.: *Lineare Algebra / Analytische Geometrie.* 2 Bände, rororo Vieweg 1978.

Greub, W. H.: *Lineare Algebra.* Springer 1967.

Halmos, P. R.: *Finite-Dimensional Vector Spaces.* Springer 1974.

Heinold, J., Riedmüller, B.: *Lineare Algebra und Analytische Geometrie.* 2 Bände, Carl Hanser ^{2}1975 bzw. 1973.

Jänich, K.: *Lineare Algebra.* Springer Hochschultext 1981.

Klingenberg, W.: *Lineare Algebra und Geometrie.* Springer ^{2}1989, ^{3}1992.

Koecher, M.: *Lineare Algebra und analytische Geometrie.* Springer ^{2}1985, ^{3}1992.

Kowalsky, H.-J.: *Lineare Algebra.* Walter de Gruyter ^{6}1972.

Lang, S.: *Introduction to Linear Algebra.* Addison-Wesley 1970, ^{2}1988.

Lang, S.: *Linear Algebra.* Addison-Wesley 1966, ^{3}1989.

Lingenberg, R.: *Linare Algebra.* BI-Hochschultaschenbuch 1969.

Lorenz, F.: *Lineare Algebra I, II.* 2 Bände, BI-Hochschultaschenbücher ^{2}1988/89.

Satake, I.: *Linear Algebra.* Marcel Dekker 1975.

Stammbach, U.: *Lineare Algebra.* Teubner 1980.

Storch, U., Wiebe, H.: *Lehrbuch der Mathematik, Band II: Lineare Algebra.* BI Wissenschaftsverlag 1990.

Strang, G.: *Linear Algebra and its Applications.* Academic Press ^{3}1988.

8. Aufgabensammlungen

Artmann. B., Peterhänsel W., Sachs E.: *Beispiele und Aufgaben zur linearen Algebra.* BI-Hochschultaschenbücher, Band 783, 1978.

Heinold, J., Riedmüller, B., Fischer, H.: *Aufgaben und Lösungen zur Linearen Algebra und Analytischen Geometrie.* 2 Bände, Carl Hanser 1970/71.

Lipschutz, S.: *Theory and Problems of Linear Algebra.* McGraw-Hill, Schaum's outline series.

0. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Die Präsenzaufgaben werden am Mittwoch, dem 20.10.99, in der Übungsstunde erarbeitet.

Die Hausaufgaben sind zu Hause zu bearbeiten und am Freitag, dem 22.10.99, bis 14.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls D für Mathematik, zweite Etage im Sammelbau der Fachbereiche 1 und 8, Templergraben 64, abzugeben.

Schreiben Sie auf Ihre Lösungen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters und den Hörsaal Ihrer Übungsgruppe! Sollte Ihre Lösung mehrere Blätter umfassen, heften Sie diese bitte zusammen. Das Aufgabenblatt braucht nicht mit abgegeben zu werden.

Präsenzaufgaben

Aufgabe P1.
Wir definieren auf der Menge $\mathbb{C} := \{(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$ von Paaren reeller Zahlen die folgenden beiden arithmetischen Operationen:

$$(a,b) + (a',b') := (a+a', b+b') \qquad \text{und} \qquad (a,b)\cdot(a',b') := (a\cdot a' - b\cdot b', a\cdot b' + b\cdot a')$$

Zeigen Sie, dass $\mathbb{C}$ mit diesen Verknüpfungen ein Körper ist.

Wir schreiben im Folgenden auch $a + bi$ für das Paar (a,b).

Aufgabe P2.
Komplexe Zahlen beschreiben Punkte in der reellen Ebene. Eine Position in der Ebene läßt sich auch durch Polarkoordinaten angeben: Durch die Entfernung r vom Ursprung und einen Winkel ϑ, der die Richtung vom Ursprung angibt. Genauer soll (r,ϑ) dem Punkt $r\cdot\cos(\vartheta) + r\cdot\sin(\vartheta)\cdot i$ entsprechen.

(a) Aus welchen Mengen müssen r und ϑ stammen, damit diese Entsprechung bijektiv ist?

(b) Zeigen Sie, dass die Multiplikation für komplexe Zahlen in Polarkoordinaten durch diese Formel beschrieben wird:

$$(r,\vartheta)\cdot(r',\vartheta') = (r\cdot r', \vartheta+\vartheta')$$

Bemerkung: Die Additionstheoreme der Winkelfunktionen dürfen ohne Beweis verwendet werden.

(c) Finden Sie eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ mit $a^2 = i$.

Aufgabe P3.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\zeta_n := \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\zeta_n^k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}$, und es ist $\zeta_n^n = 1$.

(b) Für $n \geq 2$ gilt $1 + \zeta_n + \zeta_n^2 + \ldots + \zeta_n^{n-1} = 0$.

1. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Die Hausaufgaben sind zu Hause zu bearbeiten und am Freitag, dem 22.10.99, bis 14.00 Uhr im Übungskasten des Lehrstuhls D für Mathematik, zweite Etage im Sammelbau der Fachbereiche 1 und 8, Templergraben 64, abzugeben.

Schreiben Sie auf Ihre Lösungen Ihren Namen, Ihre Matrikelnummer sowie den Namen Ihres Übungsgruppenleiters und den Hörsaal Ihrer Übungsgruppe! Sollte Ihre Lösung mehrer Blätter umfassen, heften Sie diese bitte zusammen. Das Aufgabenblatt braucht nicht mit abgegeben zu werden.

Aufgabe 1. (Injektivität, Surjektivität)

Es sei M eine Menge. Wir bezeichnen mit $M^{\{2\}} := \{\{a,b\} | a,b \in M, a \neq b\}$ die Menge der zweielementigen Teilmengen und setzen:

$$f : \mathbb{Z}^{\{2\}} \to \mathbb{Z}, \quad \{a,b\} \mapsto 2a^2 + b$$

Ist das eine Funktion? Wenn ja, ist sie injektiv oder surjektiv?

Aufgabe 2. (Lineare Gleichungssysteme)

Geben Sie die Lösungsmengen der folgenden drei linearen Gleichungssysteme an. Für die Unbestimmten x und y sollen rationale Zahlen zugelassen sein. In welchen Fällen existieren ganzzahlige Lösungen?

(a) $\begin{array}{rcl} 2x + 4y &=& 17 \\ 5x - 3y &=& -3 \end{array}$ (b) $\begin{array}{rcl} -\frac{3}{7}x + \frac{5}{6}y &=& 10 \\ \frac{9}{22}x - \frac{35}{44}y &=& 11 \end{array}$ (c) $\begin{array}{r} 1381794x + 667029y = 66963 \\ 758632x + 366212y = 36764 \end{array}$

Aufgabe 3. (Abbildungen)

Es seien M und N Mengen und $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Beweisen Sie:

(a) f ist injektiv genau dann, wenn eine Abbildung $g\colon N \to M$ existiert mit der Eigenschaft $g \circ f = \mathrm{id}_M$.

(b) f ist surjektiv genau dann, wenn eine Abbildung $g\colon N \to M$ existiert mit der Eigenschaft $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

(c) f ist bijektiv genau dann, wenn eine Abbildung $g\colon N \to M$ existiert mit der Eigenschaft $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$.

Aufgabe 4. (Äquivalenzrelationen)

Untersuchen Sie, welche der folgenden Relationen reflexiv, symmetrisch, transitiv sind. Welche der Relationen sind Äquivalenzrelationen?

$R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4 \text{ teilt } a+b\}$, $R_4 = \{(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid a \neq b\}$,

$R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4 \text{ teilt } a-b\}$, $R_5 = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid ab \geq a-b\}$,

$R_3 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a^2 \text{ teilt } b\}$, $R_6 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid ab \geq a+b\}$.

2. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 5.
Finden Sie alle Lösungen $x, y \in \mathbb{C}$ des linearen Gleichungssystems

$$(1+3i)x + 2y = -1, \qquad 3x - iy = 2 - i.$$

Aufgabe 6.
Es sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper, und es seien $a, b \in K$. Zeigen Sie: Es gilt $a^2 = b^2$ genau dann, wenn $a = b$ oder $a = -b$ ist.

Aufgabe 7.
Bestimmen Sie sämtliche Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit 2 Elementen:

$$\begin{array}{cccccccc}
x_1 & & +x_3 & & +x_5 & +x_6 & = 0 \\
 & x_2 & & +x_4 & +x_5 & & = 1 \\
x_1 & & & +x_4 & +x_5 & +x_6 & = 1 \\
 & x_2 & +x_3 & & +x_5 & & = 0 \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & +x_6 & = 1
\end{array}$$

Aufgabe 8. (Reelle Zahlen)

Betrachten Sie die folgenden beiden Teilmengen der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{Z}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\},$$
$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

(a) Zeigen Sie, daß die Addition und Multiplikation von Elementen aus $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ bzw. $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ wieder Elemente der jeweiligen Menge liefern (d. h., die Einschränkung der Addition und Multiplikation von $\mathbb{R}$ auf diese Teilmengen liefert Verknüpfungen).

(b) Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ mit den unter (a) definierten Verknüpfungen ein kommutativer Ring mit Eins und $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ sogar ein Körper ist.

Hinweis: Sie dürfen benutzen, daß $\mathbb{R}$ ein Körper ist.

Abgabe: Freitag, den 29.10., bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

3. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 9. (Konstruktion der rationalen Zahlen)

Auf der Menge $M := \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ definieren wir die Relation

$$R := \{\, ((a,b),(c,d)) \in M \times M \mid ad = bc \,\}.$$

Zeigen Sie, dass R eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklasse von $(a,b) \in M$ bezeichnen wir mit $[(a,b)]_R$ und die Menge der Äquivalenzklassen mit $\mathbb{Q}$. Wir definieren folgende Verknüpfungen:

$$+ : \ \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \ ([(a,b)]_R, [(c,d)]_R) \mapsto [(ad+bc, bd)]_R$$
$$* : \ \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \ ([(a,b)]_R, [(c,d)]_R) \mapsto [(ac, bd)]_R$$

Beweisen Sie, dass diese Verknüpfungen wohldefiniert sind.

Zeigen Sie weiter, dass $\mathbb{Q}$ mit den angegebenen Verknüpfungen einen Körper bildet, und überzeugen Sie sich, dass in diesem Körper alle Rechenregeln gelten, die Sie unter dem Namen *Bruchrechnung* bereits in der Schule gelernt haben. Der Körper $\mathbb{Q}$ ist also genau der Körper der rationalen Zahlen.

Aufgabe 10.

Fassen Sie die folgenden beiden quadratischen Gleichungen jeweils über $\mathbb{F}_{11}$ und über $\mathbb{C}$ auf:

$$(a) \quad X^2 + 2X + 2 = 0 \qquad (b) \quad X^2 + 3X - 10 = 0$$

Bestimmen Sie in allen vier Fällen sämtliche Lösungen.

Welche Elemente von $\mathbb{F}_{11}$ sind Quadrate?

Aufgabe 11.

Bringen Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^{4\times 5}$ durch elementare Zeilenumformungen auf Stufenform.

Aufgabe 12.

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ sei gegeben durch

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{, falls } i \le j, \\ j & \text{, falls } i > j. \end{cases}$$

Es sei $(b_1, \ldots b_n) \in \mathbb{Q}^n$ beliebig. Bestimmen Sie eine Lösung $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$ des Gleichungssystems $a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$, mit $1 \le i \le n$, in Abhängigkeit von b. Ist x eindeutig bestimmt?

Abgabe: Freitag, den 05.11.1999, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

4. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 13. (Injektivität und Surjektivität)
Untersuchen Sie die Abbildungen

$$f : \mathbb{F}_5 \to \mathbb{F}_5, x \mapsto x^3 \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{F}_7 \to \mathbb{F}_7, x \mapsto x^3$$

auf Injektivität und Surjektivität.

Aufgabe 14. (Lineares Gleichungssystem mit Parameter)
Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ccccccc} r\cdot x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & r\cdot y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & r\cdot z & = & 1 \end{array}$$

Aufgabe 15. (Matrizen)

Über dem Körper $\mathbb{Q}$ seien die Matrizen

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

gegeben. Berechnen Sie alle Matrixprodukte A_iA_j mit $1 \leq i, j \leq 4$, soweit sie definiert sind.

Aufgabe 16. (Matrizen)

Sei R ein Ring mit Eins und $A = [a_{ij}] \in R^{n\times n}$ mit

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = i+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Berechnen Sie $A^i = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{i \text{ Faktoren}}$ für $1 \leq i \leq n$.

Abgabe: Freitag, den 12.11.1999, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

5. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 17.

Es sei K ein Körper mit $1 \neq -1$ in K. Bestimmen Sie alle Linearkombinationen $(x_1, \ldots, x_6) \in K^6$ der Vektoren

$$(1,1,1,1,0,0), \quad (1,-1,0,0,1,1) \quad \text{und} \quad (0,0,1,-1,1,-1) \in K^6$$

bei denen alle $x_i \in \{0, 1, -1\}$ sind.

Aufgabe 18.
Gegeben sei der Vektorraum $V := \mathbb{F}_3^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{F}_3\}$.

(a) Wieviele Vektoren liegen in V?

(b) Wieviele Teilräume gibt es in V, die von einem Vektor erzeugt sind, also von der Form $\langle x \rangle$ für ein $x \in V$ sind?

Aufgabe 19.
Es sei V ein Vektorraum, und es seien A, B und C Teilräume von V.

(a) Zeigen Sie: Genau dann ist $A \cup B$ ein Teilraum von V, wenn $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ gilt.

(b) Zeigen Sie: Ist $C \subseteq A$, so gilt $A \cap (B + C) = (A \cap B) + C$.

(c) Gelten allgemein die Beziehungen $A \cap (B+C) = (A \cap B) + (A \cap C)$ und $A + (B \cap C) = (A+B) \cap (A+C)$?

Aufgabe 20.
Es sei $M \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ eine endliche, nicht-leere Menge. Ein Element $x = (x_1, x_2) \in M$ heißt *innerer Punkt* von M, wenn

$$N(x) := \{(x_1 - 1, x_2), (x_1 + 1, x_2), (x_1, x_2 - 1), (x_1, x_2 + 1)\} \subseteq M,$$

und sonst ein *Randpunkt* von M. Eine Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ heißt *harmonisch*, wenn

$$f(x) = \frac{1}{4} \sum_{y \in N(x)} f(y)$$

für alle inneren Punkte x von M gilt. Zeigen Sie:

(a) Die Menge $H := \{f : M \to \mathbb{R} \mid f \text{ harmonisch}\}$ ist ein Teilraum des Vektorraums $\mathbb{R}^M$ aller reellwertigen Funktionen auf M.

(b) Jede harmonische Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$ ist durch die Werte auf den Randpunkten von M bereits eindeutig bestimmt. (Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall, dass $f(x) = 0$ für alle Randpunkte $x \in M$ gilt, und untersuchen Sie, wo f sein Maximum annehmen kann.)

(c) Zu beliebig vorgegebenen Werten für die Randpunkte von M gibt es stets eine harmonische Abbildung $f : M \to \mathbb{R}$, die auf den Randpunkten die vorgegebenen Werte annimmt.

Abgabe: Freitag, den 19.11.1999, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

Musterlösung zur Aufgabe 19 im WS 99/00

(a) „$\Longleftarrow$“: Ist $A \subseteq B$, dann ist $A \cup B = B$ offenbar auch ein Teilraum von V. $B \subseteq A$ geht analog.

„$\Longrightarrow$“: Es sei $A \cup B$ ein Teilraum von V und $A \not\subseteq B$. Zu zeigen: $B \subseteq A$.

Sei also $a \in A \setminus B$ (nach Voraussetzung nicht leer!) und $b \in B$ beliebig. Dann ist $a+b$ mit a und b in $A \cup B$. Da aber $a+b$ nicht in B ist (sonst wäre auch $a = a+b-b \in B$), liegt $a+b \in A$ und damit auch $b = a+b-a \in A$. Da b beliebig war, folgt $B \subseteq A$.

(b) Wir zeigen „$\subseteq$“ und „$\supseteq$“:

„$\subseteq$“: Sei $b+c \in A$ mit $b \in B$ und $c \in C \subseteq A$. Dann ist auch $b = b+c-c$ mit c und $b+c$ in A. Also ist $b+c \in (A \cap B) + C$.

„$\supseteq$“: Betrachte $b+c$ mit $b \in A \cap B$ und $c \in C \subseteq A$. Dann ist $b+c \in A$, da sowohl b als auch c in A sind. Also ist $b+c \in A \cap (B+C)$.

(c) Es sei

$$V := \mathbb{R}^2, \qquad A := \langle (1,1) \rangle \qquad B := \langle (1,0) \rangle \qquad \text{und} \qquad C := \langle (0,1) \rangle$$

Dann ist $V = A + B = A + C = B + C$ und $0 = A \cap B = A \cap C = B \cap C$. Damit lassen sich beide Behauptungen widerlegen:

$$A = A \cap (B + C) \neq (A \cap B) + (A \cap C) = 0$$

und

$$A = A + (B \cap C) \neq (A + B) \cap (A + C) = V.$$

Musterlösung zur Aufgabe 20 im WS 99/00

(a) Die Bedingung an eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$, harmonisch zu sein, ist linear. Deswegen ist mit zwei harmonischen Funktionen f und g auch $\lambda \cdot f + g$ für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ wieder harmonisch:

$$\begin{aligned}
&(\lambda \cdot f + g)(x) && \text{(für einen inneren Punkt } x\text{)}\\
&= \lambda \cdot f(x) + g(x) && \text{(nach Definition von } \lambda \cdot f + g\text{)}\\
&= \lambda \cdot \left(\frac{1}{4} \sum_{y \in N(x)} f(y)\right) + \left(\frac{1}{4} \sum_{y \in N(x)} g(y)\right) && \text{(weil } f \text{ und } g \text{ harmonisch sind)}\\
&= \frac{1}{4} \sum_{y \in N(x)} (\lambda \cdot f(y) + g(y)) &&\\
&= \frac{1}{4} \sum_{y \in N(x)} (\lambda \cdot f + g)(y) && \text{(wieder nach Definition von } \lambda \cdot f + g\text{)}
\end{aligned}$$

Da die Funktion, die konstant gleich 0 ist, harmonisch ist, und mit obiger Rechnung folgt, dass sowohl die Summe zweier als auch das Vielfache und Negative einer harmonischen Funktion ($\lambda = -1$) wieder harmonisch ist, ist die Menge H der harmonischen Funktionen ein Teilvektorraum von $\mathbb{R}^M$.

(b) Es sei f eine harmonische Funktion, die auf allen Randpunkten den Wert 0 hat. Da M endlich ist, ist auch die Wertemenge $\{f(x) | x \in M\}$ endlich, enthält also ein maximales Element g. Wenn nun f an einer Stelle $x_0 \in M$ diesen maximalen Wert g annimmt, dann hat f auch an allen Nachbarpunkten $y \in N(x_0)$ den Wert g, da das arithmetische Mittel

$$\frac{1}{4} \sum_{y \in N(x_0)} f(y)$$

der Werte an den Nachbarpunkten sonst ja echt kleiner als g wäre. Dies kann aber nicht sein, da f harmonisch ist. Also enthält die Menge der Punkte, an denen f den Wert g hat, einen Randpunkt, und g ist damit gleich 0 (um dies zu sehen, kann man zum Beispiel von einem solchen Punkt immer weiter nach links laufen, bis man an einem Randpunkt ist).

Genauso schließt man für das Minimum von f, und damit ist bewiesen, dass f konstant gleich 0 ist.

Nehmen nun zwei harmonische Funktionen f und g auf dem Rand von M dieselben Werte an, dann verschwindet ihre Differenz auf dem Rand, ist also nach obiger Überlegung als harmonische Funktion komplett gleich 0. Damit ist $f = g$.

(c) Schreibt man die Funktionswerte einer Funktion auf den Randpunkten von M vor, dann muss man, um f komplett zu beschreiben, noch die Werte an den inneren Punkten von M angeben. Die Anzahl der inneren Punkte sei mit n bezeichnet. Zur Festlegung von f sind also noch n reelle Zahlen zu bestimmen. Die Bedingung, harmonisch zu sein, ergibt für jeden inneren Punkt eine lineare Gleichung in diesen n Unbekannten. Die Werte auf dem Rand gehen in dieses Gleichungssystem in die rechte Seite ein. Insgesamt ergibt das ein lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten und n Gleichungen. Alle Koeffizienten vor Unbekannten dieser Gleichungen sind entweder gleich 0, gleich 1 oder gleich $\frac{1}{4}$. Das Problem aus Teil (b) beschäftigte sich mit dem homogenen solchen Gleichungssystem und wir haben gezeigt, dass dieses nur die triviale Lösung hat.

Zur Lösung eines solchen Gleichungssystems bringt man die entsprechende Matrix zunächst auf Stufenform. Aus Teil (b) schließen wir, dass diese Stufenform die Einheitsmatrix ist, und zwar unabhängig davon, ob wir das homogene, oder ein inhomogenes System betrachten (die Matrix ist ja immer gleich!). Also gibt es auch für jede Festsetzung der Werte auf dem Rand genau eine harmonische Funktion, die diese vorgegebenen Werte auf dem Rand annimmt.

6. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 21. (Basisergänzung)

Es sei K ein Körper und $V := K^4$.

(a) Sei $X := \{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (1,0,1,1), (0,0,0,1), (1,0,1,1)\}$. Welche Bedingungen muß K erfüllen, damit X ein Erzeugendensystem für V ist?

(b) Sei $Y := \{(1,0,0,0), (1,1,1,0)\}$. Zeigen Sie: Y ist linear unabhängig.

(c) Geben Sie eine Teilmenge $X' \subseteq X$ an, so dass $Y \cup X'$ eine Basis von V ist.

Aufgabe 22. (Lineare Unabhängigkeit)

Untersuchen Sie jeweils die Menge $\{f_i | i \in \mathbb{N}\}$ auf lineare Unabhängigkeit:

(a) für den Fall

$$f_i \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \quad \text{mit} \quad f_i(n) = \begin{cases} n & \text{für } n \leq i \\ 0 & \text{für } n > i \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

(b) für den Fall

$$f_i \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad \text{mit} \quad f_i(x) = \prod_{j=1}^{i} (x - j) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Aufgabe 23. (Lineare Unabhängigkeit)

Geben Sie eine unendliche Teilmenge Y des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}^2$ an, so dass jede zweielementige Teilmenge von Y linear unabhängig ist.

Aufgabe 24. (Basis)

Es sei $f_i : \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3, x \mapsto x^i$ für $(0 \leq i \leq 2)$. Zeigen Sie, dass $\{f_0, f_1, f_2\}$ eine Basis von $\mathbb{F}_3^{\mathbb{F}_3}$ $(= \mathrm{Abb}(\mathbb{F}_3, \mathbb{F}_3))$ ist.

Abgabe: Freitag, den 26.11.1999, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

7. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 25. (Dimension)

(a) Es sei $V := \mathbb{F}_3^5$ und

$$U := \langle (1,1,2,1,0), (1,1,2,1,1), (2,2,2,2,1), (2,2,0,2,1), (1,1,0,1,0) \rangle$$

Geben Sie eine Basis für U an. Was ist $\dim U$?

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $f_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}_0}$ definiert durch

$$f_n(i) := 1 + n \cdot i \qquad (i \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$$

Was ist $\dim \langle f_n | n \in \mathbb{N}_0 \rangle$?

Aufgabe 26.
Es sei K ein Körper. Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei $p_i \in K^K = \mathrm{Abb}(K,K)$ definiert durch $p_i(x) = x^i$ für $x \in K$. Bestimmen Sie jeweils die Dimension des von $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ erzeugten Teilraumes $P_3(K)$ für die Fälle $K = \mathbb{F}_2$, $K = \mathbb{F}_3$ bzw. $K = \mathbb{Q}$.

Aufgabe 27. (Basen)

(a) Es sei $V := \mathbb{F}_2^2$. Geben Sie alle Basen von V an.

(b) Es sei $V := \mathbb{F}_2^3$. Wie viele Basen von V gibt es, die $\{e_1, e_2\}$ enthalten, wobei $e_1 := (1,0,0)$ und $e_2 := (0,1,0)$ ist? Wie viele Basen von V gibt es, die e_1 enthalten?

Aufgabe 28. (Lineare Abbildungen)
Sei $V := K^{2\times 2}$ und $1 + 1 \neq 0$ im Körper K. Man zeige:

$$\mathcal{B} := \left(E_2, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) =: (b_1, b_2, b_3, b_4)$$

ist Basisfolge von V.

Nach Satz 1 (III, §1) gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : V \to K^3$ mit

$$\begin{aligned} \varphi(b_1) &= (1,1,0) \\ \varphi(b_2) &= (0,1,0) \\ \varphi(b_3) &= (0,0,0) \\ \varphi(b_4) &= (0,0,1) \end{aligned}$$

Was ist

$$\varphi\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) \qquad \text{für } a_{ij} \in K?$$

Abgabe: Freitag, den 3.12.1999, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

8. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 29. (Lineare Abbildungen)
Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten.

(a) $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 : (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1, x_1 - x_2, x_1) \\ \varphi_2 : (x_1, x_2) & \mapsto & (x_1, 0, x_1 x_2) \end{array}$$

(b) Sei $V = P_3(\mathbb{R}) := \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}},\ x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 |\ a_i \in \mathbb{R}$ für $i = 0, 1, 2, 3\}$.
$\psi_1, \psi_2 : V \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ mit:

$$\begin{array}{rcl} \psi_1(f)(x) & = & f(x+1) \\ \psi_2(f)(x) & = & x f'(x) \end{array}$$

(Hier soll f' die Ableitung von f sein.)

Aufgabe 30. (Zyklischer Code)
Es sei $\varphi : \mathbb{F}_2^7 \longrightarrow \mathbb{F}_2^7$ mit $\varphi((x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)) = (x_7, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$. Zeigen Sie, dass φ linear ist.

Sei $v = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0) \in \mathbb{F}_2^7$ und $U = \langle \varphi^i(v) |\ i = 0, 1, 2, \ldots \rangle$, wobei $\varphi^0(v) = v$ und $\varphi^i(v) = \varphi(\varphi^{i-1}(v))$ für $i > 0$. Geben Sie eine Basis von U an.

Für $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)$ und $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$ aus $\mathbb{F}_2^7$ sei

$$d(x, y) = |\{i |\ 1 \le i \le 7,\ x_i \ne y_i\}|$$

der *Abstand* von x und y. Bestimmen Sie $\mathrm{Min}\{d(x, y) |\ x, y \in U,\ x \ne y\}$.

Aufgabe 31.
Sei $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in V = \mathbb{R}^{2\times 2}$ und $\varphi : V \longrightarrow V$ definiert durch $\varphi(X) = AXA$ für alle $X \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist.

(b) Geben Sie je eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an.

(c) Ergänzen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ zu einer Basis von V.

Aufgabe 32.
Sei $n \in \mathbb{N}$ und V ein n-dimensionaler Vektorraum. Zeigen Sie, dass es genau dann eine lineare Abbildung $\varphi : V \longrightarrow V$ mit $\mathrm{Kern}(\varphi) = \mathrm{Bild}(\varphi)$ gibt, wenn n gerade ist.

Anmerkung: Die Aufgaben 31. und 32. sind Klausuraufgaben aus dem WS94/95.

Abgabe: Freitag, den 10.12.1999, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

9. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 33.

Es seien die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^{4\times 5}$ und die Vektoren $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{F}_3^4$ gegeben. Wieviele Lösungen $x \in \mathbb{F}_3^5$ hat das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ jeweils für $b = b_1$ bzw. $b = b_2$?

Aufgabe 34.

(a) Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Im K-Vektorraum $V = K^{n\times 1}$ seien zwei Teilräume $U = \langle u_1, \ldots, u_r \rangle$ und $W = \langle w_1, \ldots, w_t \rangle$ gegeben. Weiter sei $m = r + t$ und

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & \ldots & u_r & w_1 & \ldots & w_t \\ u_1 & \ldots & u_r & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \in K^{2n\times m}.$$

Zeigen Sie: Bringt man A durch elementare Spaltenumformungen auf die Form

$$A' = \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_l & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \star & \ldots & \star & y_1 & \ldots & y_{m-l} \end{pmatrix},$$

wobei die Folge $(v_1, \ldots, v_l)$ linear unabhängig ist, so ist $(v_1, \ldots, v_l)$ eine Basis von $U + W$ und die Folge $(y_1, \ldots, y_{m-l})$ ein Erzeugendensystem und, falls $\dim U = r$ und $\dim W = t$, sogar eine Basis von $U \cap W$. (Dieser Algorithmus zur Berechnung des Durchschnitts zweier Teilräume stammt von Hans Zassenhaus und heißt deshalb *Zassenhaus-Algorithmus*.)

Anleitung: Betrachten Sie den Spaltenraum $T = \mathrm{SP}(A)$ und die Abbildung $\pi : T \to K^{n\times 1}$ mit $\pi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = x$. Zeigen Sie, daß π linear, $\mathrm{Bild}\,\pi = U + W$ und $\mathrm{Kern}\,\pi = \left\{ \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ y \end{pmatrix} \mid y \in U \cap W \right\}$ ist.

(b) Im Vektorraum $V = \mathbb{R}^{4\times 1}$ seien die beiden Teilräume

$$U = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

gegeben. Bestimmen Sie mit Hilfe des in Teil (a) bewiesenen Zassenhaus-Algorithmus Basen für $U \cap W$ und $U + W$.

Bitte wenden →

Aufgabe 35.
Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n < \infty$. Weiter sei $\varphi : V \to V$ linear mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$. Man zeige:

(a) Es gilt $\text{Kern } \varphi \cap \text{Bild } \varphi = \{\underline{0}\}$.

(b) Es gibt eine Basisfolge $\mathcal{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ mit

$$
{}_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}
$$

Gilt die Umkehrung auch?

Aufgabe 36.
Es sei

$$
V := P_4(\mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a_0, \ldots, a_4 \in \mathbb{R} \text{ und } f(x) = \sum_{i=0}^{4} a_i x^i \ \forall x \in \mathbb{R} \right\}
$$

und $\varphi : V \to V$ sei definiert durch

$$
\varphi(f)(x) = f''(x) + x \cdot f'(x) - f(x+1).
$$

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist.

(b) Berechnen Sie die Matrix ${}_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$ bezüglich einer Basisfolge $\mathcal{B}$ von V.

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\text{Kern } \varphi$.

(d) Sei $g \in V$ mit $g(x) = 2x^3 + 1$. Berechnen Sie $\varphi^{-1}(\{g\})$.

Abgabe: Freitag, den 7.1.2000, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

10. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 37.

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ invertierbar ist, und berechnen Sie ihr Inverses.

(b) Berechnen Sie mittels elementarer Zeilenumformungen eine Matrix $X \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 8 \\ -5 & 7 & 10 \\ 8 & 8 & -4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 38.

Es sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ heißt *untere Dreiecksmatrix*, wenn $a_{ij} = 0$ für alle $1 \leq i < j \leq n$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass das Produkt von zwei unteren Dreiecksmatrizen aus $K^{n\times n}$ wieder eine untere Dreiecksmatrix ist.

(b) Zeigen Sie, dass eine untere Dreicksmatrix $A = (a_{ij})$ genau dann invertierbar ist, wenn alle Diagonalelemente $a_{ii} \neq 0$ sind.

(c) Zeigen Sie, dass

$$T_n(K) := \{A = (a_{ij}) \in K^{n\times n} \mid a_{ij} = 0, \text{ falls } i < j, \text{ und } a_{ii} \neq 0 \text{ für alle } i\}$$

mit der üblichen Matrixmultiplikation eine Gruppe ist. Bestimmen Sie für den Fall, dass K ein endlicher Körper mit q Elementen ist, die Anzahl der Elemente von $T_n(K)$.

Aufgabe 39.

Es seien $\sin\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die üblichen Winkelfunktionen, V der von $\sin^2$, $\cos^2$ und $\sin\cdot\cos$ (punktweise erklärtes Produkt von Abbildungen) erzeugte Teilraum von $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\varphi, \psi\colon V \to V$ definiert durch $\varphi(f)(x) = f'(x)$ bzw. $\psi(f)(x) = f(x + \pi/2)$ für alle $f \in V$ und $x \in \mathbb{R}$. (Überprüfen Sie, dass φ und ψ tatsächlich lineare Abbildungen von V in sich sind.)

(a) Zeigen Sie, dass $B := (\sin^2, \cos^2, \sin\cdot\cos)$ linear unabhängig, also eine Basis von V ist.

(b) Berechnen Sie ${}_B[\varphi]_B$, ${}_B[\psi]_B$, ${}_B[\varphi\circ\psi]_B$, ${}_B[\psi\circ\varphi]_B$, $(\psi\circ\varphi)(3\sin^2 + \cos^2)$ und $(\varphi\circ\psi)(\sin\cdot\cos)$.

Aufgabe 40.

Es seien Permutationen $\sigma, \tau \in S_9$ definiert durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 2 & 9 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 1 & 2 & 9 & 8 & 6 & 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Darstellungen als Produkte von Zykeln mit disjunkten Ziffernmengen für σ, τ, $\sigma\circ\tau$, $\tau\circ\sigma$, $\sigma^{-1}\circ\tau\circ\sigma$ und $\tau^{-1}\circ\sigma\circ\tau$ (Multiplikation jeweils von rechts nach links). Können Sie aus den Ergebnissen für $\sigma^{-1}\circ\tau\circ\sigma$ und $\tau^{-1}\circ\sigma\circ\tau$ eine allgemeine Regel ableiten?

Abgabe: Freitag, den 14.1.2000, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

11. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 41. (Determinanten)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen aus $\mathbb{R}^{4\times 4}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 3}$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \pi \\ -2 & -3 & 7 & 0 \\ 6 & \frac{1}{5} & \frac{1}{3} & \pi^2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2t^2 & -3 & -t \\ t & t & t^2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} t^3 & 7 & t \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & \frac{-2}{t^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Für welche Werte des Parameters $t \in \mathbb{R}$ bzw. $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sind B bzw. C invertierbar?

Aufgabe 42. (Determinanten)

Es sei K ein Körper. Berechnen Sie für $n \geq 2$ und $x, a_0, \ldots, a_{n-1} \in K$ die Determinante der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ -1 & x & 0 & 0 & \cdots & -a_1 \\ 0 & -1 & x & 0 & \cdots & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & -1 & x & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in K^{n\times n}.$$

Aufgabe 43.

Für welche $m \in \mathbb{N}$ gilt die folgende Aussage?

Sind $A, B, C, D \in \mathbb{Q}^{m\times m}$, so ist $\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$.

Aufgabe 44.

Es seien $p, q \in \mathbb{Q}[X]$ mit $p = X^5 + 3X^4 + 6X^3 + 6X^2 + 5X + 3$ und $q = X^2 + X + 1$.

(a) Dividieren Sie p mit Rest durch q.

(b) Berechnen Sie $q(A)$ und $p(A)$ für $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$.

Abgabe: Freitag, den 21.1.2000, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

12. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 45.

Es sei K ein Körper und $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in K^{4\times 4}$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A und die zugehörigen Eigenräume.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $\operatorname{char} K = 2$ (d. h., in K gilt $1+1=0$) und $\operatorname{char} K \neq 2$.

Aufgabe 46.

Es sei $A = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Diagonalisieren Sie A.

Aufgabe 47.

Es sei K ein Körper, und es seien $A, B \in K^{n\times n}$ zwei Matrizen, von denen mindestens eine invertierbar ist. Zeigen Sie, dass die charakteristischen Polynome von AB und BA gleich sind.

Kann man auf die Voraussetzung, dass eine der Matrizen invertierbar ist, verzichten?

Aufgabe 48.

Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n$, $\varphi \in \operatorname{End} V$ und $f \in K[X]$.

Man zeige: Ist $t \in K$ ein Eigenwert von φ, so ist $f(t)$ ein Eigenwert von $f(\varphi)$.

Abgabe: Freitag, den 28.1.2000, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

Lösung zur Aufgabe 47

Es sei K ein Körper und A und B Matrizen aus $K^{n\times n}$. Dann sind die charakteristischen Polynome von AB und von BA gleich.

Beweis: Wenn eine der beiden Matrizen invertierbar ist (o.E. B), dann folgt die Behauptung aus dieser Rechnung (E_n die Einheitsmatrix, x eine Unbestimmte):

$$\chi_{AB} = \det(x\cdot E_n - AB) = \det(B(x\cdot E_n - AB)B^{-1}) = \det(x\cdot E_n - BA) = \chi_{BA}$$

In der Vorlesung kam folgender Satz vor:
Satz: Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $\varphi \in \mathrm{End}(V)$. Sei weiter $f \in K[x]$ ein Polynom mit $f(\varphi) = 0$ und $f = (x-t)^m \cdot f_0$ ($t \in K$) mit einem Polynom f_0 mit $f_0(t) \neq 0$. Dann ist

$$V = \mathrm{Kern}(\varphi - t\cdot \mathrm{id})^m \oplus \mathrm{Bild}(\varphi - t\cdot \mathrm{id})^m$$

Also gibt es eine Basisfolge $\mathcal{B} = (b_1,\dots,b_k,b_{k+1},\dots,b_n)$ mit

$$_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},$$

wobei A_1 eine $k\times k$-Matrix mit charakteristischem Polynom $(x-t)^k$ und t kein Eigenwert von A_2 ist. Ist speziell $f = \chi_\varphi$, dann ist $k = m$, $\chi_{A_1} = (x-t)^m$ und $\chi_{A_2} = f_0$.

Wir wenden nun diesen Satz an auf die Matrix AB mit $f = \chi_{AB}$ und $t = 0$, also $f = x^m \cdot f_0$, wobei f_0 nicht durch x teilbar ist. Sei $\mathcal{B} = (b_1,\dots,b_n)$ die Basisfolge aus dem Satz. AB ist auf dem Erzeugnis der Vektoren $(b_{m+1},\dots,b_n)$ injektiv (die Matrix A_2 hat 0 nicht als Eigenwert), also ist die Folge $(Bb_{m+1},\dots,Bb_n)$ linear unabhängig. Die Matrix BA verhält sich nun auf diesen Vektoren genau wie AB auf $(b_{m+1},\dots,b_n)$:

$$(BA)Bb_i = B(AB)b_i = B\sum_{j=m+1}^{n} a_{ji}b_j = \sum_{j=m+1}^{n} a_{ji}Bb_j,$$

wobei (a_{ji}) die Matrix $_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$ ist. BA ist also (nach einem Basiswechsel) von der Form:

$$\begin{bmatrix} * & 0 \\ * & A_2 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

mit demselben A_2 wie oben. Deswegen kann BA den Eigenwert 0 höchstens m mal enthalten. Aus Symmetriegründen (gleiche Argumentation mit vertauschten Rollen) haben also BA und AB den Faktor x gleich oft im charakteristischen Polynom. Das charakteristische Polynom der Matrix A_2 ist aber gleich f_0, also dem anderen Faktor des charakteristischen Polynoms von AB. Andererseits sieht man an $(*)$, dass das charakteristische Polynom von A_2 auch ein Teiler des charakteristischen Polynoms von BA ist, woraus die Behauptung folgt.
Zusatzübung: Die Aussage stimmt (leicht modifiziert) auch für Matrizen $A \in K^{n\times n'}$ und $B \in K^{n'\times n}$, wie man leicht durch Ergänzen der Matrizen mit Nullen zu quadratischen sieht.

13. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 49.

Es sei K ein Körper und $A \in K^{n\times n}$. Zeigen Sie: Ist A invertierbar, so gibt es ein Polynom $f \in K[X]$ vom Grad $< n$ mit $f(A) = A^{-1}$.

Aufgabe 50.

Berechnen Sie die Jordan-Normalform von $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}_2^{5\times 5}$, und bestimmen Sie eine invertierbare Matrix $P \in \mathbb{F}_2^{5\times 5}$, so dass $P^{-1}AP$ in Jordan-Normalform ist.

Aufgabe 51.

Berechnen Sie die Jordansche Normalform $J(A)$ von

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}.$$

Aufgabe 52.

Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $V = K^{n\times n}$.

(a) Zeigen Sie: Ist $A \in V$ und λ_A die durch $\lambda_A \colon X \mapsto \operatorname{Spur} AX$ definierte Abbildung von V nach K, so ist λ_A linear, d. h., es ist $\lambda_A \in V^*$.

(b) Zeigen Sie: $\{\lambda_A \mid A \in V\} = V^*$.

(c) Es sei $U = \{X \in V \mid X_{ij} = 0 \text{ für } i > j\}$ die Menge der oberen Dreiecksmatrizen in V. Berechnen Sie den Annihilator U°.

(d) Zeigen Sie, daß $\{\lambda \in V^* \mid \lambda(XY) = \lambda(YX) \text{ für alle } X, Y \in V\}$ ein Teilraum von V^* ist, und geben Sie eine Basis dafür an.

(e) Zeigen Sie, daß $\langle XY - YX \mid X, Y \in V\rangle = \{Z \in V \mid \operatorname{Spur} Z = 0\}$ ist.

Abgabe: Freitag, den 4.2.2000, bis 14.00 Uhr im Übungskasten am Lehrstuhl.

14. Übung zur Vorlesung „Lineare Algebra I“ (WS 99/00)

Prof. Dr. H. Pahlings

Aufgabe 53.
V und W seien endlich-dimensionale K-Vektorräume, und $\varphi\colon V \to W$ sei linear. Wir definieren

$$\varphi^T : W^* \to V^*, \quad \lambda \mapsto \lambda \circ \varphi$$

(wobei V^* und W^* die Dualräume von V bzw. W sind). Zeigen Sie:

(a) φ^T ist linear.

(b) φ ist surjektiv (bzw. injektiv) genau dann, wenn φ^T injektiv (bzw. surjektiv) ist.

(c) Sind B und C Basen von V bzw. W und B^* und C^* die dazu dualen Basen von V^* bzw. W^*, dann ist

$$_{B^*}\left[\varphi^T\right]_{C^*} = {}_C\left[\varphi\right]_B^T.$$

Aufgabe 54.

(a) Es sei Φ eine Bilinearform auf $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ mit $[\Phi]_S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, wobei S die Standardbasis von V ist. Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V für Φ.

(b) Beschreiben Sie $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 1} \mid x_1x_2 + x_2x_3 = 1 \right\}$ geometrisch (in einem geeigneten Koordinatensystem).

Aufgabe 55.
Es sei $V = \mathbb{R}^{3\times 1}$ und B eine Basisfolge von V. Eine Bilinearform Φ auf V sei gegeben durch die Matrix $[\Phi]_B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) Berechnen Sie das Radikal von V bezüglich Φ.

(b) Ist Φ ausgeartet? (Begründung.)

(c) Berechnen Sie eine Orthogonalbasis von V bezüglich Φ.

(d) Ist Φ positiv definit? (Begründung.)

Aufgabe 56.
Es sei $V \leq \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der auf $\mathbb{R}$ integrierbaren Funktionen und $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Phi(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx \quad \text{für} \quad f, g \in V,$$

und es sei $p \in V$ mit $p(x) = 2x^4 + x^5$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie eine bezüglich Φ beste Approximation von p durch eine Polynomfunktion vom Grad kleiner gleich 3.

Hinweis: Benutzen Sie die Legendre-Polynome.

Aufgabe 57.

Es sei $V = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ der Raum der reellen Polynomfunktionen vom Grad kleiner oder gleich 2 und $\lambda_i \in V^*$ definiert durch

$$\lambda_i(f) = \int_0^i f(x)\,dx \quad (1 \leq i \leq 3)$$

(a) Man zeige, dass $\mathcal{B} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ eine Basisfolge von V^* ist.

(b) Es sei $\varphi \in \operatorname{End} V$ definiert durch $\varphi(f) = f'$ und $\varphi^T \in \operatorname{End} V^*$ wie in Aufgabe 53. Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}[\varphi^T]_{\mathcal{B}}$.

(c) Zu $U = \langle p_2 + p_0, p_1 + p_0 \rangle$ (mit $p_i(x) = x^i$ für $x \in \mathbb{R}$) berechne man eine Basis des Annihilators U^0.

Bearbeitungen der Aufgaben sollen **nicht** abgegeben werden. Sie werden in der ersten Übungsstunde zur Linearen Algebra II im Sommersemester 2000 besprochen.

Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 10.
Geben Sie die Lösungsmenge des folgenden linearen Gleichungssystems über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_2$ an:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & x_5 & = & 1 \end{array}$$

Wieviele Lösungen gibt es? (4 Punkte)

Aufgabe 11.
Es sei K ein Körper. Für $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei $p_i \in \operatorname{Abb}(K, K)$ durch $p_i(x) = x^i$ definiert (wobei $p_0(0) := 1$).

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{M} := \{p_0+p_1, p_0+p_1+p_2\}$ linear unabhängig in $\operatorname{Abb}(K, K)$ ist. (2 Punkte)

(b) Ergänzen Sie $\mathcal{M}$ zu einer Basis von $P_3(K) = \langle\{p_0, p_1, p_2, p_3\}\rangle$. (2 Punkte)

Aufgabe 12.

(a) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\operatorname{Kern}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & x & x \\ y & y & y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$\operatorname{Bild}(\varphi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} ?$$

(2 Punkte)

(b) Gibt es eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit

$$\operatorname{Kern}(\psi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ y & y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$\operatorname{Bild}(\psi) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} ?$$

(3 Punkte)

Geben Sie jeweils entweder eine solche Abbildung an oder beweisen Sie, dass es keine gibt.

Bitte wenden →

Aufgabe 13.

(a) Ist die Abbildung $f : \mathbb{F}_3 \to \mathbb{F}_3$, $x \mapsto x^2 + x$ surjektiv? (2 Punkte)

(b) Ist die Abbildung $f : \mathbb{F}_3^{2\times 3} \to \mathbb{F}_3^{2\times 3}$, $X \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X$ surjektiv? (3 Punkte)

Aufgabe 14.

Sei K ein Körper, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in V = K^{2\times 2}$ und $\varphi : V \longrightarrow V$ definiert durch $\varphi(X) = AX - XA$ für alle $X \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)

(b) Geben Sie je eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ und $\mathrm{Bild}(\varphi)$ an. (3 Punkte)

(c) Ergänzen Sie eine Basis von $\mathrm{Kern}(\varphi)$ zu einer Basis von V. (2 Punkte)

Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.
Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 3 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, W ein K-Vektorraum und V_1 und V_2 Teilräume von W. Dann gilt:

$W = \{k \cdot w \mid k \in K \text{ und } w \in W\}$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$W = V_1 + V_2$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$W \times K = \{w \cdot k \mid k \in K \text{ und } w \in W\}$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$V_1 \cap V_2$ ist Teilraum von W	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$W + V_1 = W + V_2$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein

Aufgabe 2. Es sei K ein Körper, V und W K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\mathrm{Kern}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\mathrm{Bild}(\varphi) = \{w \in W \mid \text{es existiert ein } v \in V \text{ mit } w = \varphi(v)\}$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
Für $M \subseteq W$ ist $\varphi^{-1}(M) = \{v \in V \mid \text{für alle } w \in M \text{ ist } \varphi(v) = w\}$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\varphi(v \cdot w) = \varphi(v) \cdot \varphi(w)$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\{(v_1, v_2) \in V \times V \mid \varphi(v_1 - v_2) = 0\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf V	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein

Aufgabe 3. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\{(x, y, x - y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^3$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^2$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\emptyset$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^2$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\langle\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}\rangle$ ist Teilraum in $\mathbb{R}^2$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\{\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist linear}\}$ ist ein Teilraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein

Aufgabe 4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\{(1, 0, 1), (1, 2), (0, 1, 0)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\{(1, 0, 1), (1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\{(1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^2$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\{(1, 1, 1), (1, 2, 3)\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^3$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\{(1, 2, 3), (0, 2, 0)\}$ ist Basis des Teilraums $\langle(1, 1, 1), (1, 0, 1)\rangle$ von $\mathbb{R}^3$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Bitte wenden →

Aufgabe 5. K sei ein Körper, V ein K-Vektorraum und $X \subseteq V$ eine Teilmenge von V. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Ist X Basis von V, dann ist X endlich	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Ist X Basis von V, dann ist X auch Erzeugendensystem von V	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
Ist X linear abhängig, dann ist X kein Erzeugendensystem von V	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Ist X linear unabhängig, dann existiert kein $v \in X$ mit $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
Wenn ein $v \in V \setminus \langle X \rangle$ existiert, dann ist $X \setminus \{v\}$ keine Basis von V	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein

---

Aufgabe 6. Es sei K ein Körper und alle K^n ($n \in \mathbb{N}$) seien als K-Vektorräume aufgefasst. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

$\varphi : K^2 \to K^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_2, x_2 + x_1, x_1)$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\varphi : K^2 \to K, (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 1) \cdot (x_2 + 1)$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\varphi : K \to K, x \mapsto 1$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\varphi : K \to K^2, x \mapsto (x, x + x)$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\varphi : K \to K, x \mapsto 0$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein

---

Aufgabe 7. Es sei K ein Körper und V und W K-Vektorräume. $\varphi : V \to W$ und $\psi : V \to W$ seien zwei lineare Abbildungen. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\mathrm{Kern}(\varphi + \psi) \supseteq \mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Kern}(\psi)$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\mathrm{Bild}(\varphi + \psi) \subseteq \mathrm{Bild}(\varphi) + \mathrm{Bild}(\psi)$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\mathrm{Kern}(\varphi + \psi) = \mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Kern}(\psi)$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\mathrm{Bild}(\varphi - \psi) \supseteq \mathrm{Bild}(\varphi) + \mathrm{Bild}(\psi)$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\mathrm{Kern}(\varphi + \psi) = \mathrm{Kern}(\varphi) + \mathrm{Kern}(\psi)$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

---

Aufgabe 8. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2000} \to \mathbb{R}^{1999}$ ist surjektiv.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \to \mathbb{R}^{2000}$.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \to \mathbb{R}^{2000}$ ist injektiv.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{2000} \to \mathbb{R}^{1999}$.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{1999} \to \mathbb{R}^{2000}$.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

---

Aufgabe 9. Welche Aussagen sind richtig? Ein lineares Gleichungssystem über einem Körper

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

— heißt homogen, wenn $b_1 = 0$ ist.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
— ist lösbar, wenn $m = n$ ist.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
— hat einen Lösungsraum der Dimension $n - \mathrm{Rg}\,[a_{ij}]$, falls $b_1 = \cdots = b_m = 0$ ist.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
— kann unlösbar sein, wenn $b_1 \neq 0$ ist.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
— hat immer die Lösung $x_1 = \cdots = x_n = 0$.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Semesterklausur zur Linearen Algebra I, Teil B

Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.
Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 2 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Aufgabe 1. Es seien K ein Körper und $A, A', T \in K^{n\times n}$ (nicht notwendig invertierbar) mit $AT = TA'$. Dann gilt:

$\det A = \det A'$	☐ Ja	☐ Nein
$\det A \cdot \det T = \det A' \cdot \det T$	☐ Ja	☐ Nein
$\det(A + A') = \det A + \det A'$	☐ Ja	☐ Nein
$\det A = \det A'$, wenn AT invertierbar ist	☐ Ja	☐ Nein
$\det(TA') = \det(TA)$	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit reellen Einträgen ($x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 147 & 7 & 0 \\ \pi & \tan(x) & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

☐ ☐ ☐ ☐ ☐

Aufgabe 3. Es seien K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten X über K. Es seien $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$.

$\mathrm{Grad}(f+g) = \max(\mathrm{Grad}(f), \mathrm{Grad}(g))$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Grad}(fg) = \mathrm{Grad}(f) + \mathrm{Grad}(g)$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Grad}(f+g) = \mathrm{Grad}(f-g)$	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt $q, r \in K[X]$ mit $f = q \cdot g + r$ mit $\mathrm{Grad}(rq) < \mathrm{Grad}(g)$.	☐ Ja	☐ Nein
Ist g ein Teiler von f, dann ist jede Nullstelle von f auch eine von g.	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe 4. Es seien K ein Körper und $A \in K^{k\times l}$, $B \in K^{l\times m}$ und $C \in K^{m\times n}$. Dann gilt:

$\mathrm{Rang}(AB) \leq \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Rang}(AB) \geq \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Rang}(ABC) = \mathrm{Rang}(AB) + \mathrm{Rang}(BC) - \mathrm{Rang}(B)$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Rang}(ABC) \leq \min\{k, l, m, n\}$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Rang}(ABC) > 0$ wenn, $ABC \neq 0$	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe 5. Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl und S_n die symmetrische Gruppe auf $\{1, 2, \ldots, n\}$. Es seien σ und τ Permutationen aus S_n. Dann gilt:

$\mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\tau \circ \sigma)$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{sgn}(\tau \circ \tau) = +1$	☐ Ja	☐ Nein
$(1, 2, 3) \circ (2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4)$	☐ Ja	☐ Nein
Jede Permutation ist ein Produkt von Dreierzykeln.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt ein $\tau \in S_n$ mit $\tau^{-1} \circ (1, 2)(3, 4) \circ \tau = (1, 2, 3, 4)$	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe 6. Sei K ein Körper, $M \in K^{n\times n}$, χ_M das charakteristische Polynom von M, $t \in K$ und $(X - t)^2$ ein Teiler von χ_M. Dann gilt:

t ist Eigenwert von M.	☐ Ja	☐ Nein
M hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert t.	☐ Ja	☐ Nein
$\chi_M(M)$ bildet jeden Eigenvektor von M auf 0 ab.	☐ Ja	☐ Nein
Der Rang von M ist gleich n, wenn X kein Teiler von χ_M ist.	☐ Ja	☐ Nein
Das Minimalpolynom von M ist durch $(X - t)$ teilbar.	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe 7. Sei $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 1999\}$ und $B := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 2000\}$.

Es gibt eine surjektive Abbildung $\varphi : A \to B$.	☐ Ja	☐ Nein
Jede Abbildung $\varphi : B \to A$ ist surjektiv.	☐ Ja	☐ Nein
Die Abbildung $\varphi : A \times B \to B, (a, b) \mapsto b$ ist surjektiv.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt eine injektive Abbildung $\varphi : A \to B$.	☐ Ja	☐ Nein
Jede Abbildung $\varphi : B \to A$ ist injektiv.	☐ Ja	☐ Nein

Aufgabe 8. Sind die folgenden Aussagen richtig?

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.	☐ Ja	☐ Nein
Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n verschiedene Eigenwerte hat.	☐ Ja	☐ Nein
Jede $n \times n$-Matrix ist diagonalisierbar.	☐ Ja	☐ Nein
Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie 0 nicht als Eigenwert hat.	☐ Ja	☐ Nein
Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes einer $n \times n$-Matrix ist immer kleiner oder gleich der geometrischen Vielfachheit.	☐ Ja	☐ Nein

Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 9.
Sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{für} \quad i = j \\ 1 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

Man berechne $\det(A)$. (6 Punkte)

Aufgabe 10.
Seien $V := \mathbb{R}^{3\times 1}$ und

$$\mathcal{B} := \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \quad \text{sowie} \quad \varphi : V \to V, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basisfolge von V ist. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$. (4 Punkte)

Aufgabe 11.
Sei $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\varphi, \psi \in \operatorname{End} V$ definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= A^T \qquad \text{für } A \in V \qquad \text{(Transponierte zu A)} \\ \psi(A) &= A^T + 3A \qquad \text{für } A \in V \end{aligned}$$

(a) Man beweise, dass φ und ψ diagonalisierbar sind. Man bestimme die Eigenwerte von φ und von ψ. (4 Punkte)

(b) Für $n = 2$ gebe man explizit eine Basis von V an, die aus Eigenvektoren von ψ besteht. (4 Punkte)

Aufgabe 12.
Sei $A \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$ die folgende Matrix ($\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$):

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A. (4 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Dimensionen sämtlicher Eigenräume von A. (2 Punkte)

(d) Geben Sie für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Vielfachheit an. (1 Punkt)

Aufgabe 13.
Berechnen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

(8 Punkte)

Semesterklausur zur Linearen Algebra I, Teil B

Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.
Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 2 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Aufgabe 1. Es seien K ein Körper und $A, A', T \in K^{n\times n}$ (nicht notwendig invertierbar) mit $AT = TA'$. Dann gilt:

$\det A = \det A'$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\det A \cdot \det T = \det A' \cdot \det T$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\det(A + A') = \det A + \det A'$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\det A = \det A'$, wenn AT invertierbar ist	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\det(TA') = \det(TA)$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein

Aufgabe 2. Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit reellen Einträgen ($x \in \mathbb{R}$):

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(x) & -\sin(x) \\ \sin(x) & \cos(x) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 147 & 7 & 0 \\ \pi & \tan(x) & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 & 0 \\ 7 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3. Es seien K ein Körper und $K[X]$ der Polynomring in einer Unbestimmten X über K. Es seien $f, g \in K[X] \setminus \{0\}$.

$\mathrm{Grad}(f+g) = \max(\mathrm{Grad}(f), \mathrm{Grad}(g))$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\mathrm{Grad}(fg) = \mathrm{Grad}(f) + \mathrm{Grad}(g)$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\mathrm{Grad}(f+g) = \mathrm{Grad}(f-g)$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Es gibt $q, r \in K[X]$ mit $f = q \cdot g + r$ mit $\mathrm{Grad}(rq) < \mathrm{Grad}(g)$.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Ist g ein Teiler von f, dann ist jede Nullstelle von f auch eine von g.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Aufgabe 4. Es seien K ein Körper und $A \in K^{k \times l}$, $B \in K^{l \times m}$ und $C \in K^{m \times n}$. Dann gilt:

$\mathrm{Rang}(AB) \leq \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\mathrm{Rang}(AB) \geq \min(\mathrm{Rang}(A), \mathrm{Rang}(B))$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\mathrm{Rang}(ABC) = \mathrm{Rang}(AB) + \mathrm{Rang}(BC) - \mathrm{Rang}(B)$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\mathrm{Rang}(ABC) \leq \min\{k, l, m, n\}$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\mathrm{Rang}(ABC) > 0$ wenn, $ABC \neq 0$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein

Aufgabe 5. Sei $n \geq 4$ eine natürliche Zahl und S_n die symmetrische Gruppe auf $\{1, 2, \ldots, n\}$. Es seien σ und τ Permutationen aus S_n. Dann gilt:

$\mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \mathrm{sgn}(\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma \circ \tau) = \mathrm{sgn}(\tau \circ \sigma)$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\mathrm{sgn}(\tau \circ \tau) = +1$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$(1, 2, 3) \circ (2, 3, 4) = (1, 2, 3, 4)$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Jede Permutation ist ein Produkt von Dreierzykeln.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Es gibt ein $\tau \in S_n$ mit $\tau^{-1} \circ (1, 2)(3, 4) \circ \tau = (1, 2, 3, 4)$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Aufgabe 6. Sei K ein Körper, $M \in K^{n \times n}$, χ_M das charakteristische Polynom von M, $t \in K$ und $(X - t)^2$ ein Teiler von χ_M. Dann gilt:

t ist Eigenwert von M.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
M hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert t.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\chi_M(M)$ bildet jeden Eigenvektor von M auf 0 ab.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
Der Rang von M ist gleich n, wenn X kein Teiler von χ_M ist.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
Das Minimalpolynom von M ist durch $(X - t)$ teilbar.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein

Aufgabe 7. Sei $A := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 1999\}$ und $B := \{n \in \mathbb{N} \mid 1 \leq n \leq 2000\}$.

Es gibt eine surjektive Abbildung $\varphi : A \to B$.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Jede Abbildung $\varphi : B \to A$ ist surjektiv.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Die Abbildung $\varphi : A \times B \to B, (a, b) \mapsto b$ ist surjektiv.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
Es gibt eine injektive Abbildung $\varphi : A \to B$.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
Jede Abbildung $\varphi : B \to A$ ist injektiv.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Aufgabe 8. Sind die folgenden Aussagen richtig?

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann diagonalisierbar, wenn sie n verschiedene Eigenwerte hat.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Jede $n \times n$-Matrix ist diagonalisierbar.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Eine $n \times n$-Matrix ist genau dann invertierbar, wenn sie 0 nicht als Eigenwert hat.	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes einer $n \times n$-Matrix ist immer kleiner oder gleich der geometrischen Vielfachheit.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 9.
Sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_{ij} = \begin{cases} i & \text{für} \quad i = j \\ 1 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

Man berechne $\det(A)$. (6 Punkte)

Aufgabe 10.
Seien $V := \mathbb{R}^{3\times 1}$ und

$$\mathcal{B} := \left(\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \right) \quad \text{sowie} \quad \varphi : V \to V, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ eine Basisfolge von V ist. (3 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie ${}_{\mathcal{B}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$. (4 Punkte)

Aufgabe 11.
Sei $V = \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\varphi, \psi \in \operatorname{End} V$ definiert durch

$$\begin{aligned} \varphi(A) &= A^T \qquad \text{für } A \in V \qquad \text{(Transponierte zu A)} \\ \psi(A) &= A^T + 3A \qquad \text{für } A \in V \end{aligned}$$

(a) Man beweise, dass φ und ψ diagonalisierbar sind. Man bestimme die Eigenwerte von φ und von ψ. (4 Punkte)

(b) Für $n = 2$ gebe man explizit eine Basis von V an, die aus Eigenvektoren von ψ besteht. (4 Punkte)

Aufgabe 12.
Sei $A \in \mathbb{F}_5^{3\times 3}$ die folgende Matrix ($\mathbb{F}_5 = \{0,1,2,3,4\}$):

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom von A. (4 Punkte)

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte von A. (2 Punkte)

(c) Bestimmen Sie die Dimensionen sämtlicher Eigenräume von A. (2 Punkte)

(d) Geben Sie für jeden Eigenwert die geometrische und die algebraische Vielfachheit an. (1 Punkt)

Aufgabe 13.
Berechnen Sie die Jordansche Normalform der folgenden Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 18 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -12 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$$

(8 Punkte)

3.4.2000

Nachholklausur zur Linearen Algebra I

WS99/00

Ankreuzteil

Dieses Blatt muss abgegeben werden. Kreuzen Sie bei jeder Frage entweder „Ja“ oder „Nein“ oder nichts an.
Auswertung: Jedes richtige Kreuz gibt einen Pluspunkt, jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Jede Aufgabe gibt immer mindestens 0 Punkte, Minuspunkte wirken also nicht über Aufgaben hinweg.
Die Zahl der Punkte aus dem Ankreuzteil wird durch 2 geteilt und zur Zahl der Punkte aus dem anderen Teil addiert, um die Gesamtpunktzahl der Klausur zu errechnen.
Sie brauchen Ihre Kreuze nicht zu begründen!

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{Q}$ der Körper der rationalen Zahlen und V der $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{Q}^{2\times 2}$. Sind die folgenden Teilmengen Teilräume?

$\left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \middle\vert\, x, y \in \mathbb{Q} \right\}$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\left\{ \begin{bmatrix} x & 1 \\ 0 & x \end{bmatrix} \middle\vert\, x \in \mathbb{Q} \right\}$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x^2 \end{bmatrix} \middle\vert\, x \in \mathbb{Q} \right\}$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\{A \in V \mid \text{Spur } A = 0\}$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\{A \in V \mid \det A = 0\}$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

---

Aufgabe 2. Es sei K ein Körper, V und W K-Vektorräume und $\varphi : V \to W$ eine K-lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$\text{Kern}(\varphi) = \{w \in W \mid \text{es gibt } v \in V \text{ mit } \varphi(v) \neq w\}$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
Für $M \subseteq W$ ist $\overset{-1}{\varphi}(M) = \{v \in V \mid \varphi(v) \in M\}$ ein Teilraum von V	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\text{Kern}(\varphi) \subseteq \text{Kern}(\varphi^2)$, falls $V = W$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\{(v_1, v_2) \in V \times V \mid \varphi(v_1 - v_2) = 0\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf V	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\text{Bild}(\varphi) = \{w \in W \mid \text{es existiert ein } v \in V \text{ mit } w = \varphi(v)\}$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein

---

Aufgabe 3. Es seien $A, A', S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (nicht notwendig invertierbar) mit $AS = SA'$. Dann gilt:

$\det A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N} \implies \det A = 0$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\det(A \cdot A^T) \geq 0$	$\boxed{\square}$ Ja	$\square$ Nein
$\det(A + A') = \det A + \det A'$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\det A = \det A'$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein
$\det(sA) = s \det(A)$ für alle $s \in \mathbb{R}$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$ Nein

Aufgabe 4. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\{[1,0,1],[1,1,1]\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^{1\times 3}$.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein
$\{[1,1,1],[1,1,0],[2,2,1]\}$ ist Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^{1\times 3}$.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein
$\{[1,0],[1,-1]\}$ ist linear unabhängig in $\mathbb{R}^{1\times 2}$.	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
$\{[0,0,1],[0,1,0],[1,1,1]\}$ ist Basis von $\mathbb{R}^{1\times 3}$.	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
$\{[1,1,1],[1,1,0]\}$ ist Basis des Teilraums $\langle[1,2,0],[2,2,1]\rangle$ von $\mathbb{R}^{1\times 3}$.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein

---

Aufgabe 5. Es seien $\varphi : V \to W$ und $\psi : W \to U$ lineare Abbildungen zwischen den K-Vektorräumen V, W und U. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Wenn φ und ψ injektiv sind, dann ist auch $\psi\circ\varphi$ injektiv.	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
Wenn φ und ψ surjektiv sind, dann ist auch $\psi\circ\varphi$ surjektiv.	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
Wenn φ surjektiv und ψ injektiv ist, dann ist auch $\psi\circ\varphi$ injektiv.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein
Wenn $\psi\circ\varphi$ surjektiv ist, dann ist auch ψ surjektiv.	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
Wenn $\psi\circ\varphi$ injektiv ist, dann ist auch ψ injektiv.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein

---

Aufgabe 6. S sei ein lineares Gleichungssystem mit 5 Gleichungen und 3 Unbekannten über dem Körper $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen ist wahr?

Jedes solche S hat eine Lösung.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein
Es gibt ein solches S, das eindeutig lösbar ist.	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
Es gibt ein solches S, das genau 2 Lösungen hat.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein
Es gibt ein solches S, das unendlich viele Lösungen hat.	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
Jedes solche S hat unendlich viele Lösungen.	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein

---

Aufgabe 7. Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $c \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Dann gilt:

Ist $A^m = 0$ für ein $m\in\mathbb{N}$, so ist $\operatorname{Rang}(A) < n$	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
$\operatorname{Rang}(A+B) \geq \min(\operatorname{Rang}(A), \operatorname{Rang}(B))$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein
$\operatorname{Rang}(c\cdot c^T) = 1$, falls $c \neq 0$	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
$\operatorname{Rang}(c^T\cdot c) = 1$, falls $c \neq 0$	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
$\operatorname{Rang}(AB) = \operatorname{Rang}(BA)$	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein

---

Aufgabe 8. Welche der folgenden Matrizen aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sind diagonalisierbar?

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	____________	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein
$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$	____________	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	____________	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$	____________	$\boxed{\square}$Ja	$\square$ Nein
$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$	____________	$\square$ Ja	$\boxed{\square}$Nein

Aufgaben mit Begründung

In diesem Teil müssen Sie alle Aussagen begründen. Natürlich dürfen Sie Aussagen aus der Vorlesung ohne Beweis benutzen.

Aufgabe 9.
Sei $V := \mathbb{R}^{1\times 2}$ und $\varphi : V \to V$ die Abbildung, die durch $\varphi([x,y]) = [3x-7y, x-2y]$ gegeben ist. Seien weiter $\mathcal{B}_1 := ([1,2],[2,1])$ und $\mathcal{B}_2 := ([0,1],[-1,0])$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)

(b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ Basisfolgen von V sind. (2 Punkte)

(c) Berechnen Sie ${}_{B_1}[\mathrm{id}_V]_{B_2}$ und ${}_{B_2}[\varphi]_{B_1}$. (2 Punkte)

(d) Wie erhält man ${}_{B_1}[\varphi]_{B_1}$ und ${}_{B_2}[\varphi]_{B_2}$ direkt aus den Ergebnissen aus (c)? (2 Punkte)

Aufgabe 10.
Sei $A = [a_{ij}] \in \mathbb{Q}^{n\times n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und

$$a_{ij} = i \cdot j \qquad \text{für } 1 \leq i,j \leq n$$

Man berechne Rang(A) und det(A). (6 Punkte)

Aufgabe 11.
Sei K ein Körper, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in V = K^{2\times 2}$ und $\varphi :\ V \longrightarrow V$ definiert durch $\varphi(X) = AX - XA$ für alle $X \in V$.

(a) Zeigen Sie, dass φ linear ist. (2 Punkte)

(b) Geben Sie je eine Basis von Kern(φ) und Bild(φ) an. (3 Punkte)

(c) Ergänzen Sie eine Basis von Kern(φ) zu einer Basis von V. (3 Punkte)

Aufgabe 12.
Es sei K ein Körper, in dem $1 \neq -1$ gilt. Weiter sei $\varphi : K^{1\times n} \to K^{1\times n}$ die lineare Abbildung, die Vektoren „spiegelt“, es gelte also $\varphi([x_1, x_2, \dots, x_n]) = [x_n, x_{n-1}, \dots, x_1]$.

(a) Man berechne das Minimalpolynom von φ. (2 Punkte)

(b) Ist φ diagonalisierbar? (2 Punkte)

(c) Was sind die Eigenwerte von φ? (2 Punkte)

(d) Geben Sie zu jedem Eigenwert eine Basis des zugehörigen Eigenraums an. (2 Punkte)

Aufgabe 13.
Es sei $A \in \mathbb{F}_2^{4\times 4}$ die folgende Matrix:

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(a) Zeigen Sie: 1 ist Eigenwert von A. (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie den Eigenraum von A zum Eigenwert 1. (3 Punkte)

(c) Berechnen Sie die Jordansche Normalform von A. (4 Punkte)

Test

T1) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gilt:

$V = \{v + w \mid v \in V \text{ und } w \in V\}$	☐ Ja	☐ Nein
$V \times V = \{v + w \mid v \in V \text{ und } w \in V\}$	☐ Ja	☐ Nein
$K \times V = \{s \cdot v \mid s \in K \text{ und } v \in V\}$	☐ Ja	☐ Nein

T2) Seien K, V wie in T1), U ein Teilraum von V und $u, v \in V$. Dann gilt:

$u, v \in U \implies u + v \in U$	☐ Ja	☐ Nein
$u, v \notin U \implies u + v \notin U$	☐ Ja	☐ Nein
$u \in U,\, v \notin U \implies u + v \notin U$	☐ Ja	☐ Nein
$s \in K,\, u \notin U \implies s \cdot u \notin U$	☐ Ja	☐ Nein
$u \in U,\, v \notin U \implies u + v \in U$	☐ Ja	☐ Nein

T3) Sind die folgenden Teilmengen auch Teilräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$?

$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(x,1,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(0,0,0)\}$	☐ Ja	☐ Nein
$\emptyset$	☐ Ja	☐ Nein

T4) Sei V ein Vektorraum.

Ist U Teilraum von V, so ist stets $V \setminus U$ auch Teilraum.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt einen Teilraum U von V, so dass $V \setminus U$ auch Teilraum ist.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt keinen Teilraum U von V, so dass $V \setminus U$ auch Teilraum ist.	☐ Ja	☐ Nein

T5) Sei V ein Vektoraum. $X \subseteq V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn

– für jedes $v \in X$ gilt $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$.	☐ Ja	☐ Nein
– $0 \in \langle X \rangle$.	☐ Ja	☐ Nein
– es ein $v \in V$ gibt mit $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$.	☐ Ja	☐ Nein

T6) Sind die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$\{(1,1,1), (0,1,1)\}$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(1,1,1), (0,1,1), (1,0,0)\}$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(1,1,1), (0,0,0)\}$	☐ Ja	☐ Nein
$\emptyset$	☐ Ja	☐ Nein
$\{(0,0,0)\}$	☐ Ja	☐ Nein

T7) Sei V ein Vektorraum und $X \subseteq Y \subseteq V$. Dann gilt:

X linear unabhängig $\implies$ Y linear unabhängig	☐ Ja	☐ Nein
X linear abhängig $\implies$ Y linear abhängig	☐ Ja	☐ Nein
X ist Erzeugendensystem von V $\implies$ Y ist Erzeugendensystem von V	☐ Ja	☐ Nein
Y ist Erzeugendensystem von V $\implies$ X ist Erzeugendensystem von V	☐ Ja	☐ Nein

Auswertung: Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.

Test

T1) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gilt:

$V = \{v + w \mid v \in V \text{ und } w \in V\}$	☒ Ja	☐ Nein
$V \times V = \{v + w \mid v \in V \text{ und } w \in V\}$	☐ Ja	☒ Nein
$K \times V = \{s \cdot v \mid s \in K \text{ und } v \in V\}$	☐ Ja	☒ Nein

T2) Seien K, V wie in T1), U ein Teilraum von V und $u, v \in V$. Dann gilt:

$u, v \in U \implies u + v \in U$	☒ Ja	☐ Nein
$u, v \notin U \implies u + v \notin U$	☐ Ja	☒ Nein
$u \in U,\, v \notin U \implies u + v \notin U$	☒ Ja	☐ Nein
$s \in K,\, u \notin U \implies s \cdot u \notin U$	☐ Ja	☒ Nein
$u \in U,\, v \notin U \implies u + v \in U$	☐ Ja	☒ Nein

T3) Sind die folgenden Teilmengen auch Teilräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$?

$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$	☐ Ja	☒ Nein
$\{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$	☒ Ja	☐ Nein
$\{(x,1,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$	☐ Ja	☒ Nein
$\{(0,0,0)\}$	☒ Ja	☐ Nein
$\emptyset$	☐ Ja	☒ Nein

T4) Sei V ein Vektorraum.

Ist U Teilraum von V, so ist stets $V \setminus U$ auch Teilraum.	☐ Ja	☒ Nein
Es gibt einen Teilraum U von V, so dass $V \setminus U$ auch Teilraum ist.	☐ Ja	☒ Nein
Es gibt keinen Teilraum U von V, so dass $V \setminus U$ auch Teilraum ist.	☒ Ja	☐ Nein

T5) Sei V ein Vektoraum. $X \subseteq V$ ist genau dann linear unabhängig, wenn

– für jedes $v \in X$ gilt $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$.	☐ Ja	☒ Nein
– $0 \in \langle X \rangle$.	☐ Ja	☒ Nein
– es ein $v \in V$ gibt mit $v \in \langle X \setminus \{v\} \rangle$.	☐ Ja	☒ Nein

T6) Sind die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

$\{(1,1,1), (0,1,1)\}$	☒ Ja	☐ Nein
$\{(1,1,1), (0,1,1), (1,0,0)\}$	☐ Ja	☒ Nein
$\{(1,1,1), (0,0,0)\}$	☐ Ja	☒ Nein
$\emptyset$	☒ Ja	☐ Nein
$\{(0,0,0)\}$	☐ Ja	☒ Nein

T7) Sei V ein Vektorraum und $X \subseteq Y \subseteq V$. Dann gilt:

X linear unabhängig $\implies$ Y linear unabhängig	☐ Ja	☒ Nein
X linear abhängig $\implies$ Y linear abhängig	☒ Ja	☐ Nein
X ist Erzeugendensystem von V $\implies$ Y ist Erzeugendensystem von V	☒ Ja	☐ Nein
Y ist Erzeugendensystem von V $\implies$ X ist Erzeugendensystem von V	☐ Ja	☒ Nein

Auswertung: Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.

Test

Es sei K ein Körper und U, V und W K-Vektorräume.

T1) Ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear, so gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$\varphi(0) = 0$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi(1) = 1$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi(a \cdot b) = a \cdot \varphi(b)$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$	☐ Ja	☐ Nein
Bild $\varphi = \mathbb{R}$	☐ Ja	☐ Nein

T2) Ist $\varphi : V \to W$ linear, so ist:

Kern $\varphi = \{\varphi(v) \mid v = \underline{0}\}$	☐ Ja	☐ Nein
Kern $\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = \underline{0}\}$	☐ Ja	☐ Nein
φ surjektiv $\iff$ φ injektiv	☐ Ja	☐ Nein
φ injektiv $\iff$ Kern $\varphi = \{\underline{0}\}$	☐ Ja	☐ Nein

T3) Sind $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen, so gilt:

Kern$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern φ	☐ Ja	☐ Nein
Kern$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern ψ	☐ Ja	☐ Nein
Kern$(\psi \circ \varphi) \supseteq$ Kern φ	☐ Ja	☐ Nein
Bild$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild ψ	☐ Ja	☐ Nein
Bild$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild φ	☐ Ja	☐ Nein
Bild$(\psi \circ \varphi) \supseteq$ Bild ψ	☐ Ja	☐ Nein

T4) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume)

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, x_1)$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2, x \mapsto x^2$	☐ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$	☐ Ja	☐ Nein

T5) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist surjektiv.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.	☐ Ja	☐ Nein
Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist injektiv.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.	☐ Ja	☐ Nein
Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.	☐ Ja	☐ Nein

T6) Es sei $\varphi : V \to W$ linear und $\mathcal{B}$ Basis von V. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Ist φ injektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ eine Basis von W.	☐ Ja	☐ Nein
Ist φ surjektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ Erzeugendensystem von W.	☐ Ja	☐ Nein
Ist $V \cong W$, so ist φ ein Isomorphismus.	☐ Ja	☐ Nein
Ist φ ein Isomorphismus, so ist $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ für jedes n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ eine Basis von W.	☐ Ja	☐ Nein

T7) Welche Aussagen sind richtig? Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

ist lösbar, wenn $n \geq m$.	☐ Ja	☐ Nein
ist eindeutig lösbar, wenn Rg $[a_{ij}] = 0$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
ist für $m > n$ nie eindeutig lösbar.	☐ Ja	☐ Nein
hat einen Lösungsraum der Dimension Rg $[a_{ij}]$.	☐ Ja	☐ Nein
hat einen Lösungsraum der Dimension $n - m$, falls $b_1 = \cdots = b_m = 0$ ist.	☐ Ja	☐ Nein
ist eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung hat.	☐ Ja	☐ Nein

Auswertung: Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.

Test

Es sei K ein Körper und U, V und W K-Vektorräume.

T1) Ist $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\mathbb{R}$-linear, so gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}$:

$\varphi(0) = 0$	☒ Ja	☐ Nein
$\varphi(1) = 1$	☐ Ja	☒ Nein
$\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$	☐ Ja	☒ Nein
$\varphi(a \cdot b) = a \cdot \varphi(b)$	☒ Ja	☐ Nein
$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b)$	☒ Ja	☐ Nein
Bild $\varphi = \mathbb{R}$	☐ Ja	☒ Nein

T2) Ist $\varphi : V \to W$ linear, so ist:

Kern $\varphi = \{\varphi(v) \mid v = \underline{0}\}$	☐ Ja	☒ Nein
Kern $\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = \underline{0}\}$	☒ Ja	☐ Nein
φ surjektiv $\Longleftrightarrow$ φ injektiv	☐ Ja	☒ Nein
φ injektiv $\Longleftrightarrow$ Kern $\varphi = \{\underline{0}\}$	☒ Ja	☐ Nein

T3) Sind $\varphi : U \to V$ und $\psi : V \to W$ lineare Abbildungen, so gilt:

Kern$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern φ	☐ Ja	☒ Nein
Kern$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Kern ψ	☐ Ja	☒ Nein
Kern$(\psi \circ \varphi) \supseteq$ Kern φ	☒ Ja	☐ Nein
Bild$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild ψ	☒ Ja	☐ Nein
Bild$(\psi \circ \varphi) \subseteq$ Bild φ	☐ Ja	☒ Nein
Bild$(\psi \circ \varphi) \supseteq$ Bild ψ	☐ Ja	☒ Nein

T4) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorräume)

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$	☐ Ja	☒ Nein
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (x_1, x_2) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, x_1)$	☒ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, x \mapsto (x, 2x)$	☒ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{F}_2 \to \mathbb{F}_2, x \mapsto x^2$	☒ Ja	☐ Nein
$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 x_2$	☐ Ja	☒ Nein

T5) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ist surjektiv.	☐ Ja	☒ Nein
Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.	☐ Ja	☒ Nein
Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$.	☒ Ja	☐ Nein
Jede $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist injektiv.	☐ Ja	☒ Nein
Es gibt eine surjektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.	☐ Ja	☒ Nein
Es gibt eine injektive, $\mathbb{R}$-lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.	☒ Ja	☐ Nein

T6) Es sei $\varphi : V \to W$ linear und $\mathcal{B}$ Basis von V. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

Ist φ injektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ eine Basis von W.	☐ Ja	☒ Nein
Ist φ surjektiv, so ist $\varphi(\mathcal{B})$ Erzeugendensystem von W.	☒ Ja	☐ Nein
Ist $V \cong W$, so ist φ ein Isomorphismus.	☐ Ja	☒ Nein
Ist φ ein Isomorphismus, so ist $\{\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n)\}$ für jedes n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ eine Basis von W.	☐ Ja	☒ Nein

T7) Welche Aussagen sind richtig? Ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

ist lösbar, wenn $n \geq m$.	☐ Ja	☒ Nein
ist eindeutig lösbar, wenn Rg $[a_{ij}] = 0$ ist.	☐ Ja	☒ Nein
ist für $m > n$ nie eindeutig lösbar.	☐ Ja	☒ Nein
hat einen Lösungsraum der Dimension Rg $[a_{ij}]$.	☐ Ja	☒ Nein
hat einen Lösungsraum der Dimension $n - m$, falls $b_1 = \cdots = b_m = 0$ ist.	☐ Ja	☒ Nein
ist eindeutig lösbar, wenn das zugehörige homogene System nur die triviale Lösung hat.	☐ Ja	☒ Nein

Auswertung: Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.

Test 3

In allen Aufgaben sei K ein Körper.

T1) Seien $A, A' \in K^{n\times n}$. Wenn A' aus A durch elementare Zeilenumformungen entsteht, dann gilt

$\det(A') = \det(A)$	☐ Ja	☐ Nein
$\det(A') = \pm\det(A)$	☐ Ja	☐ Nein
$\det(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \det(A') = 0$	☐ Ja	☐ Nein

T2) Für $A, B \in K^{n\times n}$ und $s \in K$ gilt:

$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$	☐ Ja	☐ Nein
$\det(s\cdot A) = s \cdot \det(A)$	☐ Ja	☐ Nein
$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$	☐ Ja	☐ Nein

T3) (Ergebnis eintragen). Für $s \in K$ ist $\det\left(\begin{bmatrix} s & s & s \\ s & s & s \\ s & s & s \end{bmatrix}\right) \quad =$ ☐

T4) Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $\det(A) = 0$ und $b \in K^{n\times 1}$. Dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$

– nur lösbar für $b = \underline{0}$.	☐ Ja	☐ Nein
– für jedes b lösbar, aber nicht eindeutig.	☐ Ja	☐ Nein
– für manche b lösbar, aber für kein b eindeutig lösbar.	☐ Ja	☐ Nein

T5) Ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten über $\mathbb{F}_2$

– ist stets lösbar.	☐ Ja	☐ Nein
– ist nie eindeutig lösbar.	☐ Ja	☐ Nein
– kann genau 4 Lösungen haben.	☐ Ja	☐ Nein
– kann genau 2 Lösungen haben.	☐ Ja	☐ Nein

T6) Sei $B \in K^{3\times 2}$, $C \in K^{2\times 3}$ und $A = BC$. Dann gilt:

$\det(A) = \det(B)\cdot\det(C)$	☐ Ja	☐ Nein
$\det(A)$ ist nicht definiert	☐ Ja	☐ Nein
$\det(A) = 0$	☐ Ja	☐ Nein

T7) Seien $f, g \in K[X]$ Polynome und sei f vom Grad $n > 0$. Dann gilt:

$fg = 0 \quad \Rightarrow \quad g = 0$	☐ Ja	☐ Nein
für $A \in K^{2\times 2}$ mit $f\cdot g(A) = 0$ ist $g(A) = 0$	☐ Ja	☐ Nein
$\mathrm{Grad}(f\cdot g) = \mathrm{Grad}(f)\cdot\mathrm{Grad}(g)$, falls $g \neq 0$	☐ Ja	☐ Nein
$K[X] \ni X - a \neq 0$ für jedes $a \in K$	☐ Ja	☐ Nein

T8) Sei $A \in \mathbb{Q}^{10\times 10}$ mit $A^6 = E_{10}$.

Dann ist $\det(A) = 1$.	☐ Ja	☐ Nein

Der Rang von A ist ☐

Auswertung: Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.

Test 3 im WS99/00

In allen Aufgaben sei K ein Körper.

T1) Seien $A, A' \in K^{n\times n}$. Wenn A' aus A durch elementare Zeilenumformungen entsteht, dann gilt

$\det(A') = \det(A)$	☐ Ja	☒ Nein
$\det(A') = \pm\det(A)$	☐ Ja	☒ Nein
$\det(A) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \det(A') = 0$	☒ Ja	☐ Nein

T2) Für $A, B \in K^{n\times n}$ und $s \in K$ gilt:

$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$	☐ Ja	☒ Nein
$\det(s\cdot A) = s\cdot\det(A)$	☐ Ja	☒ Nein
$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$	☒ Ja	☐ Nein

T3) (Ergebnis eintragen). Für $s \in K$ ist $\det\left(\begin{bmatrix} s & s & s \\ s & s & s \\ s & s & s \end{bmatrix}\right) =$ $\boxed{0}$

T4) Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $\det(A) = 0$ und $b \in K^{n\times 1}$. Dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$

– nur lösbar für $b = \underline{0}$.	☐ Ja	☒ Nein
– für jedes b lösbar, aber nicht eindeutig.	☐ Ja	☒ Nein
– für manche b lösbar, aber für kein b eindeutig lösbar.	☒ Ja	☐ Nein

T5) Ein lineares Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten über $\mathbb{F}_2$

– ist stets lösbar.	☐ Ja	☒ Nein
– ist nie eindeutig lösbar.	☒ Ja	☐ Nein
– kann genau 4 Lösungen haben.	☒ Ja	☐ Nein
– kann genau 2 Lösungen haben.	☐ Ja	☒ Nein

T6) Sei $B \in K^{3\times 2}$, $C \in K^{2\times 3}$ und $A = BC$. Dann gilt:

$\det(A) = \det(B)\cdot\det(C)$	☐ Ja	☒ Nein
$\det(A)$ ist nicht definiert	☐ Ja	☒ Nein
$\det(A) = 0$	☒ Ja	☐ Nein

T7) Seien $f, g \in K[X]$ Polynome und sei f vom Grad $n > 0$. Dann gilt:

$fg = 0 \quad\Rightarrow\quad g = 0$	☒ Ja	☐ Nein
für $A \in K^{2\times 2}$ mit $f\cdot g(A) = 0$ ist $g(A) = 0$	☐ Ja	☒ Nein
$\mathrm{Grad}(f\cdot g) = \mathrm{Grad}(f)\cdot\mathrm{Grad}(g)$, falls $g \neq 0$	☐ Ja	☒ Nein
$K[X] \ni X - a \neq 0$ für jedes $a \in K$	☒ Ja	☐ Nein

T8) Sei $A \in \mathbb{Q}^{10\times 10}$ mit $A^6 = E_{10}$.

Dann ist $\det(A) = 1$.	☐ Ja	☒ Nein

Der Rang von A ist $\boxed{10}$

Auswertung: Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.

Test 4 im WS99/00

In allen Aufgaben sei K ein Körper.

T1) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}_{11} = \{0, 1, \ldots, 10\}$ ($x \in \mathbb{F}_{11}$):

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

T2) Es seien V und W K-Vektorräume mit $\dim V = 3$, $\dim W = 2$ und $\varphi : V \to W$ ein Epimorphismus. Sind die folgenden Aussagen wahr?

${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{2\times 3}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{B}'$ von W	☐ Ja	☐ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{3\times 2}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{B}'$ von W	☐ Ja	☐ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$	☐ Ja	☐ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$	☐ Ja	☐ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$	☐ Ja	☐ Nein

T3) Sei $\varphi \in \operatorname{End} V$ mit charakteristischem Polynom $\chi_\varphi = (X-1)^5$ und Minimalpolynom $\mu_\varphi = (X-1)^3$; ferner sei $\dim \operatorname{Kern}(\varphi - \mathrm{id}_V) = 2$. Dann ist die Jordansche Normalform von φ (eines ankreuzen!):

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

T4) Sei V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \operatorname{End} V$ und $\dim V = n < \infty$. Sind die folgenden Aussagen wahr?

$0 \in K$ kann Eigenwert von φ sein.	☐ Ja	☐ Nein
$\underline{0} \in V$ kann Eigenvektor von φ sein.	☐ Ja	☐ Nein
φ kann $n+1$ Eigenwerte haben.	☐ Ja	☐ Nein
φ kann $n+1$ Eigenvektoren haben.	☐ Ja	☐ Nein
φ hat immer einen Eigenwert.	☐ Ja	☐ Nein
Ist 0 Eigenwert, so ist φ die Nullabbildung.	☐ Ja	☐ Nein
Die Summe von Eigenvektoren von φ ist auch Eigenvektor.	☐ Ja	☐ Nein
Jedes Vielfache eines Eigenvektors ist Eigenvektor.	☐ Ja	☐ Nein

T5) A und A' seien $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K. Sind die folgenden Aussagen wahr?

$\chi_A = \chi_{A'} \Longrightarrow A$ und A' sind ähnlich	☐ Ja	☐ Nein
$\mu_A = \mu_{A'} \Longrightarrow A$ und A' sind ähnlich	☐ Ja	☐ Nein
$\operatorname{Rang} A = n \Longleftrightarrow \chi_A(0) \neq 0$	☐ Ja	☐ Nein
$\operatorname{Rang} A = n \Longleftrightarrow \mu_A(0) \neq 0$	☐ Ja	☐ Nein
$\operatorname{Rang} A = 0 \Longleftrightarrow \chi_A = X^n$	☐ Ja	☐ Nein

Auswertung: Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.

Test 4 im WS99/00

In allen Aufgaben sei K ein Körper.

T1) Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{F}_{11} = \{0, 1, \ldots, 10\}$ ($x \in \mathbb{F}_{11}$):

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x+3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 9 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & 9 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{7}$ $\boxed{-2}$ $\boxed{6}$ $\boxed{-44}$ $\boxed{-16}$

T2) Es seien V und W K-Vektorräume mit $\dim V = 3$, $\dim W = 2$ und $\varphi : V \to W$ ein Epimorphismus. Sind die folgenden Aussagen wahr?

${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{2\times 3}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{B}'$ von W	☒ Ja	☐ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} \in K^{3\times 2}$ für Basisfolgen $\mathcal{B}$ von V und $\mathcal{B}'$ von W	☐ Ja	☒ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$	☒ Ja	☐ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$	☐ Ja	☒ Nein
${}_{\mathcal{B}'}[\varphi]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ für geeignete Basisfolgen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$	☐ Ja	☒ Nein

T3) Sei $\varphi \in \operatorname{End} V$ mit charakteristischem Polynom $\chi_\varphi = (X-1)^5$ und Minimalpolynom $\mu_\varphi = (X-1)^3$; ferner sei $\dim \operatorname{Kern}(\varphi - \mathrm{id}_V) = 2$. Dann ist die Jordansche Normalform von φ (eines ankreuzen!):

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 0 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & 1 & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

☐ ☒ ☐ ☐

T4) Sei V ein K-Vektorraum, $\varphi \in \operatorname{End} V$ und $\dim V = n < \infty$. Sind die folgenden Aussagen wahr?

$0 \in K$ kann Eigenwert von φ sein.	☒ Ja	☐ Nein
$\underline{0} \in V$ kann Eigenvektor von φ sein.	☐ Ja	☒ Nein
φ kann $n+1$ Eigenwerte haben.	☐ Ja	☒ Nein
φ kann $n+1$ Eigenvektoren haben.	☒ Ja	☐ Nein
φ hat immer einen Eigenwert.	☐ Ja	☒ Nein
Ist 0 Eigenwert, so ist φ die Nullabbildung.	☐ Ja	☒ Nein
Die Summe von Eigenvektoren von φ ist auch Eigenvektor.	☐ Ja	☒ Nein
Jedes Vielfache eines Eigenvektors ist Eigenvektor.	☐ Ja	☒ Nein

T5) A und A' seien $n \times n$-Matrizen mit Einträgen in K. Sind die folgenden Aussagen wahr?

$\chi_A = \chi_{A'} \Longrightarrow A$ und A' sind ähnlich	☐ Ja	☒ Nein
$\mu_A = \mu_{A'} \Longrightarrow A$ und A' sind ähnlich	☐ Ja	☒ Nein
$\operatorname{Rang} A = n \Longleftrightarrow \chi_A(0) \neq 0$	☒ Ja	☐ Nein
$\operatorname{Rang} A = n \Longleftrightarrow \mu_A(0) \neq 0$	☒ Ja	☐ Nein
$\operatorname{Rang} A = 0 \Longleftrightarrow \chi_A = X^n$	☐ Ja	☒ Nein

Auswertung: Richtige Antwort 1 Punkt, keine Antwort 0 Punkte, falsche Antwort -1 Punkt.