Skript

Lineare Algebra I

bei Prof. Plesken

WS 1991/92, 1995/96

2. überarbeitete Auflage

Markus Ottensmann
Achim Blumensath

16. April 1996

Inhaltsverzeichnis

I Mengen, Abbildungen, algebraische Strukturen **1**
- I.1 Definition Mengen . . . 1
- I.2 Definition Relation . . . 1
- I.3 Definition Partition . . . 2
- I.4 Bemerkung (Äquivalenzrelation - Partition) . . . 2
- I.5 Definition Abbildung . . . 3
- I.6 Definition bijektiv, Bild, Urbild . . . 3
- I.7 Definition endlich . . . 4
- I.8 Bemerkung (Komposition) . . . 4
- I.9 Satz . . . 5
- I.10 Definition Verknüpfung . . . 5
- Anwendung auf Zahlbereiche . . . 6
- I.11 Zahlbereichserweiterung . . . 6
- I.12 Zahlbereichsvergröberung . . . 7
- I.13 Definition Körper . . . 7

II Vektorräume **9**
- a) Grundlagen . . . 9
- II.1 Defintion Vektorraum . . . 9
- II.2 Bemerkung . . . 9
- II.3 Definition Teilraum . . . 10
- II.4 Bemerkung . . . 11
- II.5 Definition lineares Gleichungssystem . . . 11
- II.6 Satz (Menge der Lösungen eines GLSH) . . . 11
- II.7 Satz (Vektorraum der linearen Gleichungen) . . . 12
- b) Teilräume und Mengen . . . 13
- II.8 Satz (Schnittmenge von Teilräumen) . . . 13
- II.9 Definition Erzeugnis . . . 14
- II.10 Satz (Vektorraum eines Erzeugnisses) . . . 14
- II.11 Definition Erzeugendensystem . . . 16

III Lineare Unabhängigkeit, Basen **17**
- III.1 Definition linear unabhängig . . . 17
- III.2 Satz (n-Tupel eines Vektors) . . . 17
- III.3 Definition Basis . . . 18
- III.4 Folgerung . . . 18
- III.5 Definition Koordinatenabbildung . . . 19
- III.6 Defintion Isomorphismus . . . 19
- III.7 Satz (Existenz einer Basis) . . . 19
- III.8 Folgerung . . . 20
- III.9 Satz (Steinitzscher Austauschsatz) . . . 20
- III.10 Folgerung (Anzahl von Basisvektoren) . . . 21

III.11 Definition Dimension . . . 21
III.12 Folgerung: Basisergänzungssatz . . . 22
III.13 Satz (Äquivalente Aussagen zu Basis) . . . 22
III.14 Folgerung . . . 23
III.15 Satz von Graßmann . . . 24

IV lineare Gleichungsssysteme **26**
IV.1 Bemerkung (Elementare Schritte) . . . 26
IV.2 Bemerkung (Umwandlung eines Erzeugendensystems zu einer Basis) . . . 26
IV.3 Bemerkung (elementare Schritte und Basen) . . . 27
IV.4 Satz (Überführung zweier Basen ineinander) . . . 27
IV.5 Algorithmus: Konstruktion einer Basis . . . 27
IV.6 Folgerung (Gaußsches Eliminationsverfahren) . . . 30
IV.7 Bemerkung (Definition Äquivalenzrelation auf $\mathcal{V}$) . . . 31
IV.8 Satz (Lösungsmenge eines Gleichungssystems) . . . 31
IV.9 Bemerkung (Matrix des Gleichungssystems) . . . 31
IV.10 Satz (Lösbarkeit eines GLS) . . . 31
IV.11 Definition Matrix . . . 32
IV.12 Satz (Dimension eines GLSH) . . . 34
IV.13 Satz (Faktorraum) . . . 34
IV.14 Satz (Dimension des Faktorraums) . . . 35
IV.15 Definition Spaltenraum . . . 36
IV.16 Satz (Spaltenraum - Lösungsraum) . . . 36
IV.17 Bemerkung (Isomorphismus von φ^{-1}) . . . 37
IV.18 Folgerung (Spaltenrang = Zeilenrang) . . . 37

V Lineare Abbildungen **39**
V.1 Definition linear . . . 39
V.2 Definition Kern, Bild . . . 39
V.3 Bemerkung (Kern/Bild) . . . 39
V.4 Homomorphiesatz . . . 42
V.5 Isomorphiesatz . . . 43
V.6 Folgerung aus dem Isomorphiesatz . . . 44
V.7 Anwendung des Homomorpiesatzes . . . 45
V.8 Satz . . . 45
V.9 Folgerung . . . 46
V.10 Folgerung (Zassenhaus-Algorithmus) . . . 46
V.11 Satz (lineare Abb. zwischen Vektorräumen) . . . 46
V.12 Definition Matrix einer Abbildung . . . 48
V.13 Erinnerung zum Isomorphismus . . . 48
V.14 Satz (Matrix einer linearen Abbildung) . . . 49
V.15 Bemerkung (Vektorraum der Abbildungen) . . . 50
V.16 Satz (Isomorphismus zwischen Matrix und Abbildung) . . . 50
V.17 Definition Matrixprodukt . . . 52
V.18 Satz (Komposition linearer Abbildungen) . . . 52
V.19 Bemerkung (Grundlage zum Assoziativgesetz) . . . 53
V.20 Folgerung (Assoziativität der Matrizenmultiplikation) . . . 54
V.21 Definition invertierbar . . . 54
V.22 Vorbemerkung . . . 54
V.23 Satz (bijektive Abbildungen auf endlich erzeugte Vektorräume) . . . 55
V.24 Satz (Inverserve Matrix) . . . 55
V.25 Bemerkung (Inverse der Identitätsabbildung) . . . 56
V.26 Basistransformationssatz . . . 56
V.27 Folgerung . . . 56

Rechnerische Bestimmung der inversen Matrix . . . 56
V.28 Definition Transponierte Matrix . . . 58
V.29 Bemerkung (Transponieren eines Matrixproduktes) . . . 58
V.30 Bemerkung (Spaltenkonvention) . . . 59
V.30.1 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme . . . 60
V.30.2 Interpretation der elementaren Umformungen . . . 61
V.31 Satz . . . 62
V.32 Bemerkung (Der kommutative Ring der Polynome) . . . 65
V.33 Definition Grad, $pK[X]$ . . . 66
V.34 Bemerkung (Grad) . . . 66
V.35 Satz . . . 66
V.36 Satz (Restklasse der Polynome) . . . 67
V.37 Definition Polynomfunktion . . . 68
V.38 Satz (Abbildung von $K[X]$ in die Polynomfunktionen) . . . 68
V.39 Lemma (Nullstellen einer Polynomfunktion) . . . 70

VI Der Dualraum **71**
VI.1 Definition Dualraum . . . 71
VI.2 Satz . . . 71
VI.3 Definition Duale Basis . . . 73
VI.4 Satz (Basis des Dualraums) . . . 73
VI.5 Satz (Koordinatenspalte/-zeile) . . . 73
VI.6 Satz (Basistransformation) . . . 74
Zur Dualität von Teilräumen . . . 75
VI.7 Definition Annulator . . . 75
VI.8 Bemerkung (zum Annulator) . . . 75
VI.9 Dualitätssatz . . . 75
Anwendung auf GLSH . . . 77
Transponieren von linearen Abbildungen . . . 77
VI.10 Definition transponierte Abbildung . . . 77
VI.11 Satz (Matrix und die transponierte Matrix) . . . 78
VI.12 Satz (Kern, Bild der transpoinierten Abbildung) . . . 79
VI.13 Folgerung . . . 79

VII Bilinearformen **81**
VII.1 Definition Bilinearform . . . 81
VII.2 Bemerkung (Linearität in den Komponenten) . . . 81
VII.3 Satz (Bilinearform einer Matrix) . . . 82
VII.4 Definition Grammatrix . . . 84
VII.5 Satz (Isomorphismus zwischen BiFo($\mathcal{V}$) und Grammatrix) . . . 84
VII.6 Satz (Transformationsgesetz) . . . 85
VII.7 Definition symmetrische Bilinearform, Skalarprodukt . . . 85
VII.8 Bemerkung (Matrix des Skalarproduktes) . . . 85
VII.9 Definition orthogonal, Radikal, nicht ausgeartet . . . 86
VII.10 Bemerkung . . . 86
VII.11 Satz (Skalarprodukt - Dualraum) . . . 86
VII.12 Folgerung (Rang der Grammatrix und Radikal) . . . 87
VII.13 Satz (Skalarprodukt auf Restklassenraum) . . . 88
VII.14 Bemerkung (Einschränkung des Skalarproduktes auf Teilraum) . . . 88
VII.15 Bemerkung (Radikal des eingeschränkten Skalarproduktes) . . . 89
VII.16 Satz (Dimension des Senkrechtraumes) . . . 89
VII.17 Definition direkte Summe . . . 90
VII.17.1 Zusammenhang mit der äußeren direkten Summe . . . 90
VII.18 Satz (orthogonale direkte Summe) . . . 91

VII.19 Satz (reziproke Basis) . . . 92
VII.20 Satz (reziproke Basiswechselmatrix) . . . 92
VII.21 Definition Orthogonal– Orthonormalbasis . . . 93
VII.22 Satz (Existenz einer Orthogonalbasis) . . . 94
VII.23 Definition positiv/negativ definit . . . 94
VII.24 Bemerkung (definites Skalarprodukt) . . . 95
VII.25 Sylvesterscher Trägheitssatz . . . 96
Zusammenspiel nicht ausgeartetes Skalarprodukt & lineare Abbildungen . . . 97
VII.26 Definition adjungierte Abbildung . . . 97
VII.27 Bemerkung . . . 98
VII.28 Satz (Matrix der Adjungierten) . . . 98
VII.29 Definition normale, symmetrische, orthogonale Abbildung . . . 99
VII.30 Bemerkung (Eigenschaft symmetrischer und orthogonaler Abbildungen) . . . 99
Euklidische Vektorräume . . . 99
VII.31 Definition euklidischer Vektorraum . . . 99
VII.32 Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren . . . 99
VII.33 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung . . . 100
VII.34 Definition Länge, Winkel, Abstand . . . 101
VII.35 Dreiecksungleichung . . . 101
VII.36 Satz von Pythagoras . . . 102
VII.37 Definition Orthogonalprojektion . . . 102
VII.38 Satz (Eigenschaft der Orthogonalprojektion) . . . 102
VII.39 Bemerkung (Projection) . . . 103
VII.40 Definition Spiegelung . . . 104
VII.41 Bemerkung (orthogonale Abbildungen und Spiegelungen) . . . 106
VII.42 Definition orthogonale Matrix . . . 107
VII.43 Satz (Matrix einer orthogonalen Abbildung) . . . 107

VIII Determinanten **109**
Vorbemerkung über die symmetrische Gruppe . . . 109
VIII.1 Definition symmetrische Gruppe . . . 109
VIII.2 Bemerkung (über S_n) . . . 109
VIII.3 Definition Zykel . . . 110
VIII.4 Lemma (Disjunkte Zykelschreibweise für Permutationen) . . . 110
VIII.5 Bemerkung (Produkt von Transpositionen) . . . 110
VIII.6 Definition Signum-Funktion . . . 111
VIII.7 Satz (Eigenschaften der Signum-Funktion) . . . 111
VIII.8 Definition Untergruppe, Rechtsrestklasse, Vertretersystem . . . 112
VIII.9 Satz (Bijektion zwischen Rechtsrestklassen) . . . 113
Determinanten . . . 113
VIII.10 Definition Determinante, alternierend . . . 113
VIII.11 Satz (Eigenschaften einer Determinanten) . . . 114
VIII.12 Satz (Eindeutigkeit einer Determinante) . . . 115
VIII.13 Satz (Existenz der Determinante) . . . 116
VIII.14 Folgerung (Teilraum der Linearformen) . . . 116
VIII.15 Laplacescher Entwicklungssatz . . . 116
VIII.16 Bemerkung . . . 117
VIII.17 Satz (Determinante und lineare Unabhängigkeit) . . . 117
VIII.18 Definition Determinante einer Matrix . . . 118
VIII.19 Satz (Determinante der Transponierten) . . . 118
VIII.20 Folgerung (Entwicklung nach der k-ten Spalte) . . . 119
VIII.21 Satz . . . 119
VIII.22 Cramersche Regel . . . 120
VIII.23 Determinantenmultiplikationssatz . . . 120

VIII.24 Folgerung (generelle lineare Gruppe) . . . 120
VIII.25 Definition Gruppenhomomorphismus . . . 121
VIII.26 Defintion Determinante einer Abbildung . . . 121
VIII.27 Satz (Eigenschaften der Determinante) . . . 121
VIII.28 Bemerkung (Invarianten) . . . 121
Interpretetion der Determinante im Falle reeller Vektorräume . . . 122
VIII.29 Definition Parallelepiped, Volumen . . . 122
VIII.30 Bemerkung (orientierte Volumenverzerrung) . . . 122
VIII.31 Definition Drehung . . . 123
VIII.32 Satz (Drehachse) . . . 123

IX Eigenwerte und Eigenvektoren 125
IX.1 Definition Eigenwert, –vektor, –raum . . . 125
IX.2 Bemerkung . . . 125
IX.3 Definition Charakteristisches Polynom, Hauptminor . . . 125
IX.4 Satz (charakteristisches Polynom & Eigenwerte) . . . 126
IX.5 Satz (linear unabhängige Eigenvektoren) . . . 128
IX.6 Definition Eigenvektorbasis . . . 129
IX.7 Satz (Existenz einer Eigenvektorbasis) . . . 129
IX.8 Satz (Hamilton – Cayley) . . . 130
IX.9 Folgerung (Invertierbare Abbildung nach Hamilton – Cayley) . . . 131
IX.10 Definition algebraisch abgeschlossen . . . 131
IX.11 Satz (Fächerbasis) . . . 131
Zwischenexkurs über Polynomringe und Körper . . . 132
IX.12 Definition Ringhomomorphismus, Ideal . . . 133
IX.13 Homomorphiesatz für Ringe . . . 133
IX.14 Definition Körper der komplexen Zahlen . . . 134
IX.15 Bemerkung („Hauptsatz der Algebra“) . . . 134
IX.16 Definition größter gemeinsamer Teiler, teilerfremd . . . 135
IX.17 Der Euklidische Algorithmus . . . 135
IX.18 Definition irreduzibel . . . 136
IX.19 Folgerung (Körper des Restklassenringes) . . . 136
IX.20 Lemma (ggT und algebraisch abgeschlossene Körper) . . . 136
IX.21 Satz (Polynom als Produkt irreduzibler Polynome) . . . 137
Anwendung auf Matrizen linearer Abbildungen . . . 138
IX.22 Satz (Teilräume nach charakteristischem Polynom) . . . 138
IX.23 Folgerung . . . 139
IX.24 Folgerung . . . 140
IX.25 Lemma (Kette von Teilräumen) . . . 141
IX.26 Definition Jordanblock, Blockdiagonalmatrix . . . 142
IX.27 Satz (Jordan-Normalform, lokaler Teil) . . . 142
IX.28 Allgemeine Jordan-Normalform . . . 144
a) Anwendung auf homogene lineare Differentialgleichungen . . . 144
IX.29 Definition $\mathcal{C}^i(\mathbb{R},\mathbb{R})$ . . . 144
IX.30 Definition lineare Differentialgleichung . . . 144
IX.31 Bemerkung . . . 144
IX.32 Lemma (Dimension des Kerns) . . . 146
IX.33 Definition Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktionen . . . 146
IX.34 Satz (Lösungsraum) . . . 146
IX.35 Bemerkung (inhomogene Differentialgleichungen) . . . 148
IX.36 Definition komplexe Konjugation . . . 148
IX.37 Bemerkung . . . 148
IX.38 Satz (Lösungsräume nach $p(x)$) . . . 148
IX.39 Definition homogene lineare Differentialgleichungssysteme . . . 149

b) Anwendung auf lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten 149
IX.40 Definition lineare Rekursion 149
IX.41 Lemma (Dimension der Lösungsmenge) 149
IX.42 Satz (Teilräume nach dem zugeordneten Polynom) 150
IX.43 Bemerkung 151
Rechnerische Bestimmung des charakteristischen Polynoms 152
IX.44 Definition Minimalpolynom 152
IX.45 Bemerkung 152
IX.46 Satz (Minimalpolynom) 152
IX.47 Algorithmus (Berechnung von $p_\varphi(x)$) 153

Kapitel I

Mengen, Abbildungen, algebraische Strukturen

I.1 Definition Mengen

M, N, M_i, A seien Mengen, wobei $i \in I$. I ist eine (Index-)Menge.

1. M heißt *Teilmenge* von A, in Zeichen : $M \subseteq A$, falls aus $x \in M$ immer $x \in A$ folgt. $(x \in M \Rightarrow x \in A)$
2. Für $M, N \subseteq A$ heißt $M \cap N := \{x \in A | x \in M \text{ und } x \in N\}$ der *Schnitt* (Durchschnittsmenge von M und N). Für $M_i \subseteq A$, für alle $i \in I$: $\bigcap\limits_{i \in I} M_i := \big\{x \in A | x \in M_i \text{ für alle } i \in I\big\}$ heißt der Schnitt der M_i.
3. Für $M, N \subseteq A$ heißt $M \cup N := \{x \in A | x \in M \text{ oder } x \in N\}$ die *Vereinigung* von M und N. Entsprechend für $M_i \subseteq A$ für alle $i \in I$ ist $\bigcup\limits_{i \in I} M_i := \big\{x \in A | \text{existiert ein } i \in I \text{ mit } x \in M_i\big\}$ die Vereinigung der M_i.
4. Für $M, N \subseteq A$ heißt $M \setminus N := M - N = \{x \in A | x \in M \text{ und } x \notin N\}$ die *Differenzmenge* von M ohne N.
5. $\mathrm{Pot}(A) := \big\{X | X \subseteq A\big\}$ heißt die *Potenzmenge* von A.
6. $M \times N := \big\{(m, n) | m \in M \text{ und } n \in N\big\}$ heißt das *cartesische Produkt* von M und N oder die *Paarmenge* von M und N. Dabei gelten: $(m, n) = (m', n') \Leftrightarrow m = m'$ und $n = n'$ für $m, m' \in M$; $n, n' \in N$.

I.2 Definition Relation

Sei M eine Menge

1. Eine Teilmenge R von $M \times M$ $(R \subseteq M \times M)$ heißt *Relation* (Schreibweise $(a, b) \in R \Leftrightarrow: aRb$ [a steht in Relation zu b]).
2. Eine Relation $R \subseteq M \times M$ heißt
   (a) *reflexiv*, falls: $(a, a) \in R$ für alle $a \in M$ $\qquad (aRa)$
   (b) *symmetrisch*, falls: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$ $\qquad (aRb \Rightarrow bRa)$
   (c) *transitiv*, falls: $(a, b) \in R$ und $(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$ $\qquad (aRb \text{ und } bRc \Rightarrow aRc)$
3. Eine Relation, die *reflexiv, symmetrisch und transitiv* ist, heißt *Äquivalenzrelation*

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ = Menge der natürlichen Zahlen
2. H = Menge der Hörer dieser Vorlesung
3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \big\{(a,b) | a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\big\}$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & & \vdots & & \\
3 & * & * & \underset{(3,3)}{*} & \\
2 & \underset{(1,2)}{*} & * & * & \cdots \\
1 & * & \underset{(2,1)}{*} & * & \\
\hline
 & 1 & 2 & 3 &
\end{array}$$

Beispiel I.1: Mengen

1. Sei $M = \mathbb{N}$ und $R =$ „ $<$ “ $(a < b \;\Leftrightarrow\; b - a \in \mathbb{N})$
ist nicht reflexiv nicht symmetrisch aber transitiv.
2. Sei $M = \mathbb{N}$ und $R =$ „ $\leq$ “
ist reflexiv nicht symmetrisch aber transitiv.
3. Sei M eine beliebige Menge und $R =$ „=“ ist eine Äquivalenzrelation.
4. $\mathbb{Z}' = \big\{(x + b = a) | a, b \in \mathbb{N}\big\}$ $R = \sim$ mit $(x + a = b) \sim (x + a' = b') \Leftrightarrow a + b' = b + a'$
ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel I.2: Relationen

I.3 Definition Partition

M sei eine Menge. Eine *Partition* oder *Zerlegung* oder *Klasseneinteilung* von M ist eine Menge P von Teilmengen von M. ($P \subseteq \mathrm{Pot}(M)$) mit

1. $M = \bigcup C,$ $C \in P$, d. h. für jedes $m \in M$ existiert ein $C \in P$ mit $m \in C$
2. seien $C, C' \in P \Rightarrow C = C'$ oder $C \cap C' = \emptyset$, d. h. für jedes $m \in M$ existiert höchstens ein $C \in P$ mit $m \in C$.

I.4 Bemerkung (Äquivalenzrelation - Partition)

1. Sei R eine Äquivalenzrelation auf die Menge M und für $x \in M$ sei $C_x = \{y \in M | yRx\}$. Dann ist $P = \{C_x | x \in M\}$ eine Partition.
2. Sei $P \subseteq \mathrm{Pot}(M)$ eine Partition von M. Definiere
$$R = \big\{(a,b) \in M \times M | \text{es existiert ein } C \in P \text{ mit } a \in C \text{ und } b \in C\big\}.$$
Dann ist R eine Äquivalenzrelation.

Beweis

1. $x \in C_x$, (R reflexiv) $\Rightarrow M = \bigcup\limits_{x \in M} C_x$. Also Punkt 1 von I.3.
Seien $C_x, C_y \in P$ mit $C_x \cap C_y \neq \emptyset$.

Behauptung: $C_x = C_y$
Beweis: Es existiert ein $a \in C_x \cap C_y$. Zeige $C_a = C_x$

$$\left.\begin{array}{r} b \in C_x \Rightarrow bRx \\ a \in C_x \cap C_y \Rightarrow aRx \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(symm.)}} bRx \text{ und } xRa \Rightarrow_{\text{(trans.)}} b \sim a$$

d. h. $b \in C_a$ (gezeigt $C_x \subseteq C_a$)
umgekehrt:

$$\left.\begin{array}{c} b \in C_a \Rightarrow bRa \\ aRx \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(trans)}} b \sim x$$

d. h. $b \in C_x$ (gezeigt $C_a \subseteq C_x$)
Also: $C_x = C_a$. x durch y ersetzen $\Rightarrow C_y = C_a$. Also $C_x = C_y$ d. h. Punkt 2 von I.3

2. Zu beweisen ist, daß R eine Äquivalenzrelation ist.
   (a) Da ein $C \in P$ existiert mit $a \in C$ gilt: $(a, a) \in R \Rightarrow R$ ist relexiv.
   (b) Sei $a, b \in C$ daher gilt: $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R \Rightarrow R$ ist symmetrisch.
   (c) $a, b \in C,\ b, c \in C\ \Rightarrow\ a, c \in C\ \Rightarrow R$ ist transitiv.

q.e.d.

I.5 Definition Abbildung

Seien M, N Mengen. φ heißt *Abbildung* (Funktion) von M nach N (Abkürzung: $\varphi : M \to N$), falls jedem Element $m \in M$ genau ein Element $m\varphi \in N$ (manchmal auch mit $\varphi(m)$ bezeichnet) zugeordnet wird.
$\Big($ Man kann Abbildung auch ähnlich wie Relation als Teilmenge $[\varphi]$ von $M \times N$ einführen mit:

1. Für jedes $m \in M$ existiert ein $n \in N$ mit $(m, n) \in [\varphi]$.
2. $(m, n_1), (m, n_2) \in [\varphi] \Rightarrow n_1 = n_2$

Zusammenhang : $[\varphi] = \big\{(m, m\varphi) | m \in M\big\}\Big)$

1. $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : a \mapsto a^2 \qquad (a\varphi = a^2$ für alle $a \in \mathbb{N})$.
2. Sei H die Menge der Hörer und S die Menge der Sitze, dann ist $\varphi : H \to S : h \mapsto Sitz(h)$ eine Abbildung, falls alle sitzen.
3. $\mathbb{Z}' := \big\{(x+b = a) | a, b \in \mathbb{N}_2\big\}$ (x ist eine „unbestimmte“) $\varphi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{Z}' : (a, b) \mapsto x+a = b$ ist eine Abbildung.

Beispiel I.3: Abbildungen

I.6 Definition bijektiv, Bild, Urbild

Sei $\varphi : M \to N$ eine Abbildung.

1. φ heißt
   (a) *injektiv*, falls für alle $m, m' \in M$ gilt: $m\varphi = m'\varphi \Rightarrow m = m'$.

(b) *surjektiv* (auf N), falls für jedes $n \in N$ ein $m \in M$ existiert mit $m\varphi = n$.

(c) *bijektiv*, falls φ injektiv und surjektiv ist. In diesem Fall heißt $\varphi^{-1} : N \to M$ mit $n\varphi^{-1} = m$ genau dann, wenn $m\varphi = n$, die zu φ *inverse Abbildung*.

2. $M\varphi = \{m\varphi | m \in M\}$ $(\subseteq N)$ heißt das *Bild* von φ.

3. Für $X \subseteq N$ heißt $X\varphi^{-1} := \{m \in M | m\varphi \in X\}$ das *Urbild* von X unter φ.

1. $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : a \mapsto a^2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv und nicht bijektiv.
2. $\varphi : H \to S : h \mapsto Sitz(h)$ ist injektiv, wenn auf jedem Stuhl nur eine Person sitzt.
3. $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}' : (a, b) \mapsto (x + b = a)$ ist bijektiv.

Beispiel I.4: bijektive Abbildungen

I.7 Definition endlich

Eine Menge M heißt *endlich*, falls ein $n \in \mathbb{N}$ und dazu eine bijektive Abbildung: $\varphi : M \to \{1, 2, \dots, n\}$ existiert. (n heißt dann die Anzahl $|M|$ der Elemente von M.)
Daß diese Anzahl wohldefiniert ist, sieht man so:

$$M \begin{array}{l} \overset{\varphi}{\nearrow} \{1, \dots, n\} \\ \underset{\psi}{\searrow} \{1, \dots, m\} \end{array} \varphi,\ \psi \text{ seien Bijektionen. Zu zeigen ist nun, daß } n = m.$$

$$\begin{aligned} \alpha = \varphi^{-1}\psi : \{1, \dots, n\} &\to \{1, \dots, m\} \\ i &\mapsto (i\varphi^{-1})\psi \end{aligned}$$

α ist bijektiv, da φ und ψ bijektiv sind.

$$\left.\begin{array}{r} 1\alpha, \dots, n\alpha \text{ sind } n \textit{ versch.} \text{ Elem. von } \{1, \dots, m\}, \\ \text{also } n \leq m \\ 1\alpha^{-1}, \dots, m\alpha^{-1} \text{ sind } m \textit{ versch.} \text{ Elem. von } \{1, \dots, n\}, \\ \text{also } m \leq n \end{array}\right\} \Rightarrow n = m$$

I.8 Bemerkung (Komposition)

Seien $\varphi : M \to N$ und $\psi : N \to O$ Abbildungen, dann ist

$$\varphi\psi : M \to O : m \mapsto (m\varphi)\psi$$

auch eine Abbildung (genannt die *Komposition* oder Hintereinanderausführung) von φ und ψ. Manchmal wird eine andere Schreibweise benutzt:

$$\psi \circ \varphi : M \to O : m \mapsto \psi\big(\varphi(m)\big)$$

I.9 Satz

Sei $\varphi : M \mapsto N$ eine Abbildung.

1. $\tilde{\varphi} \subseteq M \times M$ definiert durch $\tilde{\varphi} := \{(m, m') \in M \times M | m\varphi = m'\varphi\}$ ist eine Äquivalenzrelation auf M mit den Äquivalenzklassen $\{n\}\varphi^{-1}$, wobei $n = m\varphi$ für ein $m \in M$. Also ist die zugehörige Partition $P_\varphi = \{\{n\}\varphi^{-1} | n \in M\varphi\}$.
2. $\nu : M \to P_\varphi : m \mapsto \{m\varphi\}\varphi^{-1}$ ist eine surjektive Abbildung.
3. $\bar{\varphi} : P_\varphi \to N : \{n\}\varphi^{-1} \mapsto n$ ist eine injektive Abbildung.
4. $\varphi = \nu\bar{\varphi}$ d. h.:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\nu"'] & & N \\ & P_\varphi \arrow[ur, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis

1. Überprüfen, ob $\tilde{\varphi}$ eine Äquivalenzrelation ist, d.h prüfen nach Reflexivität, Symmetrie und Transitivität:
   (a) $m\varphi = m\varphi$, also $(m, m) \in \tilde{\varphi}$ für alle $m \in M$ (also reflexiv).
   (b) $m\varphi = m'\varphi \Rightarrow m'\varphi = m\varphi = (m, m') \in \tilde{\varphi}$ für alle $m, m' \in M$ (also symmetrisch).
   (c) $m\varphi = m'\varphi, m'\varphi = m''\varphi \Rightarrow m\varphi = m''\varphi$ für alle $m, m', m'' \in M$ (also transitiv).
2. Folgt aus der Definition von P_φ.
3. Zu zeigen ist, daß $\bar{\varphi}$ wohldefiniert ist, d. h. falls $\{n\}\varphi^{-1} = \{n'\}\varphi^{-1}$, dann ist $n = n'$. Dies ist hier klar. Daher ist $\bar{\varphi}$ wohldefiniert, d. h. $\bar{\varphi}$ ist eine Abbildung.

   Nun muß noch gezeigt werden, daß $\bar{\varphi}$ injektiv ist. Also $A, B \in P_\varphi$ mit $A\bar{\varphi} = B\bar{\varphi}$.
   Sei $A = \{n\}\varphi^{-1}$ und $B = \{n'\}\varphi^{-1}$ für $n, n' \in M\varphi \Rightarrow A\bar{\varphi} = n, B\bar{\varphi} = n'$, also $n = n'$.
4. Folgt ebenfalls aus der Definition.

q.e.d.

I.10 Definition Verknüpfung

Sei M eine Menge:
Eine Abbildung $\Box : M \times M \to M : (m, n) \mapsto m\Box n$ heißt (2-stellige-) *Verknüpfung* (auf M). Eine Menge M mit einer oder mehreren Verknüpfungen heißt *algebraische Struktur*.

- $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \mapsto m + n$ ist eine Verknüpfung,
- $\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} : (m, n) \mapsto m \cdot n$ ist auch eine Verknüpfung
- d. h. $(\mathbb{N}, +), (\mathbb{N}, \cdot), (\mathbb{N}, +, \cdot)$ sind algebraische Strukturen.

Beispiel I.5: Verknüpfung, algebraische Strukturen

Anwendung auf Zahlbereiche

Sei $\mathbb{Z}' := \big\{(x+b=a)|a,b \in \mathbb{N}\big\}$. Für die Gleichung $(x+3=5) \in \mathbb{Z}'$ existiert eine Lösung in $\mathbb{N}$: Lösung $= 2$. Aber für die Gleichungen $(x+5=3)$ und $(x+7=5)$ existiert keine Lösung in $\mathbb{N}$, aber intuitiv kann man sagen, daß die Gleichungen die gleiche Lösung haben.
Um auf eine Lösung zu kommen wendet man hier das Prinzip *„Erzwinge Lösbarkeit“* an.
1.Anwendung des Prinzips: Zahlbereichserweiterung.

I.11 Zahlbereichserweiterung

Konstruktion von $\mathbb{Z}$ aus $\mathbb{N}$

1. Sei $\sim$ eine Äqivalenzrelation auf $\mathbb{Z}'$ ($\mathbb{Z}$ ist die Menge der Äquivalenzklassen), wobei
$$(x+b=a) \sim (x+b'=a') :\Leftrightarrow a+b'=a'+b$$
2. auf $\mathbb{Z}'$ definiere man
   - die Addition durch: $(x+b=a)+(x+b'=a') := (x+(b+b')=a+a')$
   - und eine Multiplikation: $(x+b=a)\cdot(x+b'=a') := (x+(a\cdot b'+b\cdot a')=a\cdot a'+b\cdot b')$

   Diese beiden Verknüpfungen sind verträglich mit $\sim$, d.h. Summen und Produkte äquivalenter Elemente sind äquivalent.
   Daher sind $C_{(x+b=a)}+C_{(x+b'=a')} := C_{(x+(b+b')=(a+a'))}$
   und $C_{(x+b=a)}\cdot C_{(x+b'=a')} := C_{(x+(a\cdot b'+b\cdot a')=a\cdot a'+b\cdot b')}$
   wohldefinierte Verknüpfungen von $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}'/\sim$
3. $\varepsilon : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : n \mapsto C_{(x+1=n+1)}$ ist eine injektive Abbildung, für die gilt:
   $\underbrace{(m+n)}_{\text{in } \mathbb{N}}\varepsilon = \underbrace{m\varepsilon+n\varepsilon}_{\text{in } \mathbb{Z}}, \qquad (m\cdot n)\varepsilon = m\varepsilon\cdot n\varepsilon$
4. $0 := C_{(x+1=1)}$ hat die Eigenschaft $0+a=a+0=a$ für alle $a \in \mathbb{Z}$
5. $C_{(x+a=b)}$ löst die Gleichung $x+a=b$ (genauer: $x+a\varepsilon=b\varepsilon$).

Beweis

2. Es muß gezeigt werden, daß die Addition („+“) und die Multiplikation („$\cdot$“) wohldefiniert auf $\mathbb{Z}$ sind (Wohldefiniert bedeutet hier „Unabhängigkeit von der Repräsentantenwahl“.)
   z. B. Addition ist wohldefiniert:
$$C_{(x+b=a)} = C_{(x+b_1=a_1)} \tag{I.1}$$
$$C_{(x+b'=a')} = C_{(x+b_1'=a_1')} \tag{I.2}$$
Zu zeigen ist:
$$C_{(x+(b+b')=(a+a'))} = C_{(x+(b_1+b_1')=(a_1+a_1'))} \tag{I.3}$$
Nach der Definition von $\sim$ heißt :
$$(I.3):\ a+a'+b_1+b_1' = b+b'+a_1+a_1' \tag{I.4}$$
$$\left.\begin{array}{lcl} (I.1):\ a+b_1 & = & b+a_1 \\ (I.2):\ a'+b_1' & = & b'+a_1' \end{array}\right\} + \ \Rightarrow \text{Gleichnug (I.4).}$$
3. Zeige: ε ist injektiv:
   $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} : n \mapsto C_{(x+1=n+1)}$
   $(x+1=n+1) \sim (x+1=m+1) \Rightarrow n=m \qquad n,m \in \mathbb{N}$
   ist ebenso verträglich mit $+$ und $\cdot$.

5. $C_{(x+b=a)}$ löst $x + b\varepsilon = a\varepsilon$ sollte aus der Definition folgen. Zu zeigen ist:

$$\underbrace{C_{(x+b=a)} + C_{(x+1=b+1)}}_{C_{(x+b+1=a+b+1)}} = C_{(x+1=a+1)}$$

d. h.: $(x + b + 1 = a + b + 1) \sim (x + 1 = a + 1)$

q.e.d.

I.12 Zahlbereichsvergröberung

Konstruktion von $\mathbb{F}_2$

1. $\underset{2}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$, definiert durch $a \underset{2}{\sim} b :\Leftrightarrow a$ und b lassen bei der Division durch 2 denselben Rest (0 oder 1). Kurz: $(2|a-b)$ (2 teilt $a-b$).
   $\mathbb{F}_2 := \mathbb{N}/\underset{2}{\sim}$ = Menge der Äquivalenzklassen.

2. $\left.\begin{array}{r} C_a + C_b := C_{a+b} \\ C_a \cdot C_b := C_{a \cdot b} \end{array}\right\}$ definiert die $\left\{\begin{array}{c} \text{Addition} \\ \text{Multiplikation} \end{array}\right.$

3. Sei $a + x = b$ $(a, b \in \mathbb{N})$
   $C_a + C_b = C_{a+b}$ löst die Gleichung $C_a + x = C_b$.

Beweis

1. Zu zeigen ist, daß $\underset{2}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation ist:
   (a) $(2|a-a)$ aus $a = a$ folgt die Reflexivität.
   (b) $(2|a-b) \Rightarrow (2|b-a) \Longrightarrow$ Symmetrie.
   (c) $(2|a-b)$, $(2|b-c) \Rightarrow (2|a-c) \Longrightarrow$ Transitivität.

2. Zu zeigen ist die Unabhängigkeit von Vertretern:

$$C_a = C_{a'},\ C_b = C_{b'} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} C_{a+b} = C_{a'+b'} \\ C_{a \cdot b} = C_{a' \cdot b'} \end{array}\right.$$

q.e.d.

Die Gleichung $3 \cdot x = 5$ ist nicht in $\mathbb{Z}$ lösbar, aber in $\mathbb{F}_2 :\ C_3 \cdot x = C_5$.
Aber die Lösung in $\mathbb{F}_2$ hat nicht mehr die gleiche Aussagekraft wie die Gleichung.

I.13 Definition Körper

Sei K eine Menge.

- (0) Sei $+ := K \times K \to K$ eine Verknüpfung.
- (1) $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in K$ (Assoziativgesetz).
- (2) Es existiert genau ein $0 \in K$ mit $a + 0 = 0 + a = a$ für alle $a \in K$.
- (3) Zu jedem $a \in K$ existiert genau ein $-a \in K$ mit $(-a) + a = a + (-a) = 0$.
- (4) $a + b = b + a$ gilt für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz).
- (0') Sei $\cdot := K \times K \to K$ eine weitere Verknüpfung.

- (1') $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in K$ (Assoziativgesetz).
- (2') Es existiert genau ein $1 \in K$, $1 \neq 0$ mit $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für alle $a \in K$.
- (3') Zu jedem $a \in K$, $a \neq 0$ existiert genau ein $a^{-1} \in K$ mit $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$.
- (4') $a \cdot b = b \cdot a$ gilt für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz).
- (a) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ (Distributivgesetz)
- (a') $c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$ für alle $a, b, c \in K$

Wenn alle Bedingungen erfüllt sind, dann heißt $(K, +, \cdot)$ Körper.
$(K, +)$ heißt

- Halbgruppe, falls (0) und (1) erfüllt sind,
- Monoid (Halbgruppe mit 1), falls (0)...(2) erfüllt sind,
- Gruppe, falls (0)...(3) erfüllt sind,
- und kommutative Gruppe, falls (0)...(4) erfüllt sind.

$(K, +, \cdot)$ heißt

- Ring, falls (0)...(4), (0'),(1') und (a),(a') erfüllt sind,
- Ring mit 1, falls (0)...(4), (0')...(2') und (a),(a') erfüllt sind,
- kommutativer Ring, falls (0)...(4), (0')...(1'),(4') und (a),(a') erfüllt sind,
- Divisions-Ring, falls (0)...(4), (0')...(3') und (a),(a') erfüllt sind.

- $(\mathbb{N}, +)$ ist eine Halbgruppe,
- $(\mathbb{N} \cup \{0\}, +)$ ist ein Monoid,
- $(\mathbb{Z}, +)$ ist eine (abelsche) kommutative Gruppe,
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring,
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper,
- $(\mathbb{F}_2, +, \cdot)$ ist ein Körper,
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

Beispiel I.6: Körper

Kapitel II

Vektorräume

a) Grundlagen

II.1 Defintion Vektorraum

Sei K ein Körper. Eine Menge $\mathcal{V} \neq \emptyset$ heißt *Vektorraum* über K, oder K*-Vektorraum*, falls

1. eine Verknüpfung $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ definiert ist, so daß $(\mathcal{V}, +)$ eine kommutative Gruppe ist, d. h.
   - (VG_1) $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$ für alle $X, Y, Z \in \mathcal{V}$.
   - (VG_2) Es existiert genau ein $0 \in \mathcal{V}$ mit $X + 0 = 0 + X = X$ für alle $X \in \mathcal{V}$.
   - (VG_3) Zu jedem $X \in \mathcal{V}$ existiert ein $-X \in \mathcal{V}$ mit $X + (-X) = (-X) + X = 0$.
   - (VG_4) $X + Y = Y + X$ für alle $X, Y \in \mathcal{V}$.
2. eine Abbildung $\cdot : K \times \mathcal{V} \to \mathcal{V} : (a, X) \mapsto a \cdot X$ definiert ist mit
   - (VS_1) $(a \cdot b) \cdot X = a \cdot (b \cdot X)$ für alle $a, b \in K,\ X \in \mathcal{V}$.
   - (VS_2) $a \cdot (X + Y) = a \cdot X + a \cdot Y$ für alle $a \in K,\ X, Y \in \mathcal{V}$.
   - (VS_3) $(a + b)X = a \cdot X + b \cdot X$ für alle $a, b \in K,\ X \in \mathcal{V}$.
   - (VS_4) $1 \cdot X = X$ für alle $X \in \mathcal{V}$.

Die Elemente von $\mathcal{V}$ heißen Vektoren. Das Beispiel II.1 zeigt mehrere K-Vektorräume.

II.2 Bemerkung

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum. Dann gilt:

1. $0 \cdot X = 0 \qquad \forall\, X \in \mathcal{V}$
2. $-X = (-1) \cdot X \qquad \forall\, X \in \mathcal{V}$
3. $(-a) \cdot X = -aX \qquad \forall\, a \in K,\ X \in \mathcal{V}$

Beweis

1. $X + 0 \cdot X =_{[\text{nach VS}_4]} 1 \cdot X + 0 \cdot X =_{[\text{VS}_3]} (1+0) \cdot X =_{[\text{Körpereigenschaft}]} 1 \cdot X =_{[\text{VS}_4]} X$
   $\Rightarrow_{[\text{VG}_3]} 0 \cdot X = 0$.
2. $X + (-1)X = 1X + (-1)X = \big(1 + (-1)\big) \cdot X = 0 \cdot X = 0$
   $\Rightarrow (-1)X = -X$.

3. $aX + (-a)X = \big(a + (-a)\big) \cdot X = 0 \cdot X = 0$
$\Rightarrow (-a)X = -aX$.

q.e.d.

Sei K ein Körper.

1. $\mathcal{V} = K$ ist ein Vektorraum über K mit $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ und $\cdot : K \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ von $(K, +, \cdot)$ übernommen.

2. $\mathcal{V} = K^n := \big\{(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in K \text{ für } i = 1, 2, \dots, n\big\}$.
$\big((a_1, \dots, a_n) = (b_1, \dots, b_n) :\Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2 \cdots a_n = b_n\big)$ K^n ist ein K-Vektorraum mit
   - $(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) := (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \qquad \forall\, a_1 \dots a_n$ und $b_1 \dots b_n \in K^n$
   - $a \cdot (a_1, \dots, a_n) := (a \cdot a_1, \dots, a \cdot a_n) \qquad \forall\, a_1 \dots a_n \in K^n,\ a \in K$
   - 0-Vektor: $(0, \dots, 0)$
   - $-(a_1, \dots, a_n) = (-a_1, \dots, -a_n)$

3. Sei K ein Körper und I eine Menge (von Indizes) $\mathcal{V} = K^I := \{f \mid f : I \to K\}$ ist ein K-Vektorraum mit den folgenden Verknüpfungen:
   - $f + g : I \to K : i \mapsto if + ig \qquad \forall\, f, g \in K^I$
   - $a \cdot f : I \to K : i \mapsto (if) \cdot a \qquad \forall\, a \in K,\ f \in K^I$
   - 0-Vektor: $0 : I \to K : i \mapsto 0$
   - $-f : I \to K : i \mapsto -if$

   Beachte: K^n kann als $K^{\{1 \dots n\}}$ aufgefasst werden. $(a_1 \dots a_n)$ definert die Abbildung $\{1, \dots, n\} \to K : i \mapsto a_i$. $f : \{1, \dots, n\} \to K$ definiert das n-Tupel $\{1f, 2f, \dots, nf\}$, d. h. ein n-Tupel oder eine Folge der Länge n kann als Abbildung von $\{1, \dots, n\} \to K$ aufgefaßt werden.

4. Seien $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$ K-Vektorräume.
$\mathcal{W} := \mathcal{V}_1 \times \mathcal{V}_2 = \big\{(v_1, v_2) \mid v_1 \in \mathcal{V}_1,\ v_2 \in \mathcal{V}_2\big\}$ ist ein K-Vektorraum mit
   - $(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + w_1, v_2 + w_2)\ \ \forall v_1, w_1 \in \mathcal{V}_1\ \ v_2, w_2 \in \mathcal{V}_2$
   - und $a \cdot (v_1, v_2) = (a \cdot v_1, a \cdot v_2)\ \ \forall a \in K\ \ v_i \in \mathcal{V}_i\ \ (i = 1, 2)$

   Bezeichnung: $\mathcal{W} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ heißt die *(äußere) direkte Summe* von $\mathcal{V}_1$ und $\mathcal{V}_2$.

5. $\{0\}$ ist ein K-Vektorraum mit $0 + 0 = 0$ und $a \cdot 0 = 0\ \ \forall\, a \in K$. $\{0\}$ heißt der *triviale K-Vektorraum.*

Beispiel II.1: Vektorräume

II.3 Definition Teilraum

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum, $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ heißt $(K-)$ *Teilraum (Unterraum)* von $\mathcal{V}$, falls

1. $\mathcal{W} \neq \emptyset$
2. für beliebige $X, Y \in \mathcal{W},\ \ a, b \in K$ gilt: $a \cdot X + b \cdot Y \in \mathcal{W}$

Schreibweise: $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$.

II.4 Bemerkung

$\mathcal{V}$ sei K-Vektorraum, $\mathcal{W} \leq \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{W}$ ist K-Vektorraum.

Beweis

Die Verknüpfungen $\mathcal{W} \times \mathcal{W} \to \mathcal{W}$, $K \times \mathcal{W} \to \mathcal{W}$ werden durch Einschränkung der Verknüpfungen von $\mathcal{V}$ $(+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}, \quad \cdot : K \times \mathcal{V} \to \mathcal{V})$ definiert. Jetzt müssen nur noch die Vektorraumaxiome verifiziert werden.

q.e.d.

- $\mathcal{V}$ ist K-Vektorraum $\Rightarrow \{0\} \leq \mathcal{V}, \;\; \mathcal{V} \leq \mathcal{V}$
  $\{0\}$ und $\mathcal{V}$ heißen auch die trivialen Teilräume von $\mathcal{V}$.
- Sei $(a, b, c) \in K^3$

$$L := \big\{(x, y, z) | (x, y, z) \in K^3, ax + by + cz = 0\big\} \leq K^3$$

$L \neq \emptyset$, denn $(0, 0, 0) \in L$

$$\left.\begin{array}{r} (x, y, z) \in L \\ (x', y', z') \in L \\ e, f \in K \end{array}\right\} e(x, y, z) + f(x', y', z') \in L$$

denn:

$$\left.\begin{array}{r} ax + by + cz = 0 \;/ \cdot e \\ ax' + by' + cz' = 0 \;/ \cdot f \end{array}\right\} + \;:\; \cdots + \cdots = 0$$

Beispiel II.2: Teilräume

II.5 Definition lineares Gleichungssystem

Ein *lineares Gleichungssystem* (GLS) über dem Körper K mit m Gleichungen und n unbekannten (unbestimmten) $x_1, \ldots, x_n$ ist gegeben durch folgende Gleichungen:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & \vdots & & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Dabei sind $a_{ij}, b_i \in K$ für $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ fest vorgegeben. Das GLS heißt *homogen*, falls $b_1 = \cdots = b_m = 0$. (Ist $m = 1$, so sprechen wir von einer linearen Gleichung.) $(l_1, \ldots, l_n) \in K^n$ heißt *Lösung* des GLS, falls man durch Ersetzen der x_i durch l_i m richtige Gleichungen in K erhält.

II.6 Satz (Menge der Lösungen eines GLSH)

Die Menge L der Lösungen eines linearen homogenen Gleichungssystems (GLSH) mit n unbekannten bildet einen Teilraum von K^n.

Für $I = \{0\} \cup \mathbb{N}$ bezeichnet man K^I auch als Vektorraum der formalen Potenzreihen: $K\big[[x]\big]$

$$K\big[[x]\big] := \big\{f | f : I \to K : i \mapsto a_i\big\} = \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i | a_i \in K\right\}$$

Schreibweise: $f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i = f(x)$

Also: $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i : I \to K : i \mapsto a_i$ ist die Definition von $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$.

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i\right)$$

Der Teilraum $K[x]$ der Polynome in $K\big[[x]\big]$ ist definiert durch:

$$K[x] := \left\{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i | a_i \in K, \exists n \text{ mit } a_i = 0 \text{ für } i > n\right\}$$

Jetzt läßt sich nachrechnen, daß $K[x]$ ein Teilraum von $K\big[[x]\big]$ ist.

Beispiel II.3: Vektorraum der formalen Potenzreihen

Beweis

1. $\underbrace{(0, \ldots, 0)}_{n} \in L \Rightarrow L \neq \emptyset$

2. Sei $l = (l_1, \ldots, l_n) \in L$ und $l' = (l'_1, \ldots, l'_n) \in L, \quad a, b \in K$.
   Behauptung: $a \cdot l + b \cdot l' \in L$
   Beweis: für $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\left.\begin{aligned} a_{i1} l_1 + \cdots + a_{in} l_n = 0 \;\; | \;\; \cdot a \\ a_{i1} l'_1 + \cdots + a_{in} l'_n = 0 \;\; | \;\; \cdot b \end{aligned}\right\} +$$
$$\Rightarrow a_{i1}(a l_1 + b l'_1) + \cdots + a_{in}(a l_n + b l'_n) = 0$$

   d. h. $al + bl' \in L$

q.e.d.

II.7 Satz (Vektorraum der linearen Gleichungen)

1. Die Menge der über K linearen Gleichungen mit den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ bilden einen K-Vektorraum. Der Vektorraum wird mit $\mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n)$ oder $G(K; x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet.

2. Die Menge $\mathcal{H}(K; x_1, \ldots, x_n)$ $\big($oder $\mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n)\big)$ der homogenen K-linearen Gleichungen in $x_1, \ldots, x_n$ bilden einen Teilraum von $\mathcal{G}(K; x_1, \ldots, x_n)$ $(\mathcal{H} \leq \mathcal{G})$.

Beweis

1. Sei $G_1 = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b) \in \mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n)$
   $G_1' = (a_1'x_1 + a_2'x_2 + \cdots + a_n'x_n = b') \in \mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n)$

$$\begin{aligned} G_1 + G_1' &:= \big((a_1 + a_1')x_1 + \cdots + (a_n + a_n')x_n = b + b'\big) \\ &\in \mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n) \\ a \cdot G_1 &:= (aa_1x_1 + \cdots + aa_nx_n = ab) \;\; a \in K \\ &\in \mathcal{G}(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

   Nun kann man verifiziern, daß die Vektorraum-Axiome erfüllt sind.

2. $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x_1, \ldots, x_n) \neq \emptyset$, da $(0x_1, \ldots, 0x_n) \in \mathcal{H}$. Sei $G_1, G_1' \in \mathcal{H}$, d. h.
   $b = b' = 0 \Rightarrow aG_1 + aG_1' \in \mathcal{H}$, da $a \cdot b + a' \cdot b' = 0$.

q.e.d.

b) Teilräume und Mengen

II.8 Satz (Schnittmenge von Teilräumen)

Sei $T \neq \emptyset$ eine Menge von Teilräumen $\mathcal{W}$ von $\mathcal{V}$.

$$\Rightarrow \bigcap_{\mathcal{W} \in T} \mathcal{W} := \{W \in \mathcal{V} \mid W \in \mathcal{W} \quad \text{für alle} \quad \mathcal{W} \in T\} \leq \mathcal{V}$$

Beweis

1. $\bigcap_{\mathcal{W} \in T} \mathcal{W} \neq \emptyset$: für alle $\mathcal{W} \in T$ gilt $0 \in \mathcal{W}$ also $0 \in \bigcap_{\mathcal{W} \in T} \mathcal{W}$.

2. Seien $X, Y \in \bigcap_{\mathcal{W} \in T} \mathcal{W}$ und $a, b \in K$
   $\Rightarrow X, Y \in \mathcal{W}$ für alle $\mathcal{W} \in T$
   $\Rightarrow (\mathcal{W} \leq \mathcal{V})$ Also $a \cdot X + b \cdot Y \in \mathcal{W}$ für alle $\mathcal{W} \in T, \quad a, b \in K$
   $\Rightarrow$ (Def. von $\cap$) $\quad a \cdot X + b \cdot Y \in \bigcap_{\mathcal{W} \in T} \mathcal{W}$

q.e.d.

Siehe auch Beispiel II.4.

Gegeben GLSH mit m Gleichungen $\Rightarrow$ jede Gleichung hat Lösungsraum L_i.
Der Lösungsraum L der GLSH ist $L = \bigcap_{i=1}^{m} L_i$

Beispiel II.4: Lösungsraum eines GLSH

II.9 Definition Erzeugnis

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum und $M \subseteq \mathcal{V}$.

1. Das *Erzeugnis* (Vektorraumerzeugnis) $\langle M \rangle$ von M ist der Schnitt aller Teilräume von $\mathcal{V}$, die M enthalten: $\langle M \rangle := \bigcap\limits_{\substack{\mathcal{W} \leq \mathcal{V} \\ M \subseteq \mathcal{W}}} \mathcal{W}$

2. Eine Linearkombination von Elementen aus M ist ein Vektor $X \in \mathcal{V}$, für den ein $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in K$ und $X_1, \ldots, X_n \in M$ existieren, so daß $X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$. Ist $M = \emptyset$, so ist der Nullvektor die einzige Linearkombination (LK) von Vektoren aus M.

II.10 Satz (Vektorraum eines Erzeugnisses)

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum, $M \subseteq \mathcal{V}$.

1. $\langle M \rangle$ ist wohldefiniert und es gilt $\langle M \rangle \leq \mathcal{V}$.

2. $\langle M \rangle$ besteht aus den Linearkombinationen der Elemente von M.

Beweis

1. $T = \{\mathcal{W} \mid \mathcal{W} \leq \mathcal{V} \text{ und } M \subseteq \mathcal{W}\} \neq \emptyset$, da $\mathcal{V} \in T$, also ist $\langle M \rangle$ wohldefiniert. Aus II.8 folgt $\langle M \rangle \leq \mathcal{V}$.

2. Sei $Lk(M)$ = Menge der Linearkombinationen der Elemente von M.

   (a) **Behauptung:** $Lk(M) \leq \mathcal{V}$
   Beweis:

   i. $0 \in Lk(M)$, denn für $M = \emptyset$ gilt dies durch Definition und sonst existiert ein $X \in M$, so daß $0 \cdot X \in Lk(M)$; d. h. $Lk(M) \neq \emptyset$.

   ii. Sei $M \neq \emptyset$ und $X, Y \in Lk(M) \implies$ es existieren $x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_m \in M$ und $a_1, \ldots, a_n,\ \ b_1, \ldots, b_m, a, b \in K$ mit

   $$\begin{aligned} X &= a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \quad \text{und} \\ Y &= b_1y_1 + \cdots + b_my_m \\ \Rightarrow \qquad aX + bY &= (aa_1)x_1 + \cdots + (aa_n)x_n + \\ &\ (bb_1)y_1 + \cdots + (bb_m)y_m \quad \in Lk(M). \end{aligned}$$

   (b) **Behauptung:** $Lk(M) \in T$, also $\langle M \rangle \leq Lk(M)$
   Beweis: Es gilt: $M \subseteq Lk(M)$, da für beliebige $X \in M$ $X = 1 \cdot X \in Lk(M)$

   (c) **Behauptung:** Für jedes $\mathcal{W} \in T$ gilt: $Lk(M) \subseteq \mathcal{W}$. $\big($ d. h. $Lk(M) \leq \langle M \rangle\big)$
   Beweis: Sei $X \in Lk(M) \Rightarrow \exists X_1, \ldots, X_n \in M,\ a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $X = a_1X_1, \ldots, a_nX_n$.
   Sei nun $\mathcal{W} \in T \Rightarrow_{(M \subseteq \mathcal{W})} a_iX_i \in \mathcal{W}$ für $i = 1, \ldots, n \Rightarrow_{(\text{Summe})} \underbrace{\underbrace{a_1X_1 + a_2X_2}_{\in \mathcal{W}} + \cdots + a_nX_n}_{\in \mathcal{W}}$

   d. h. $Lk(M) \subseteq \mathcal{W}$.

Aus $2a. + 2b. + 2c. \implies Lk(M) = \langle M \rangle$.

q.e.d.

1.

$$
\begin{aligned}
K &= \mathbb{R} \qquad \mathcal{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\
M &= \{id_{\mathbb{R}}\} \qquad id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ : \ x \mapsto x \\
\langle M \rangle &:= \{a \cdot id_{\mathbb{R}} \mid a \in \mathbb{R}\} \\
& \quad a \cdot id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto a \cdot x.
\end{aligned}
$$

2. Sei $I \neq \emptyset$ und $\mathcal{V} = K^I = \{f \mid f : I \to K\}$. Für jedes $i \in I$ sei $\bar{\imath} \in K^I$ mit

$$\bar{\imath} : I \to K : \begin{cases} j \mapsto 1 & \text{, falls } j = i \\ j \mapsto 0 & \text{, falls } j \neq i \end{cases}$$

Behauptung: $\langle \bar{\imath} \mid i \in I \rangle = \{f \in K^I \mid if = 0 \text{ für alle bis auf endlich viele } i \in I\} =: F$.
Beweis: Sei $f \in F$ und $I_f = \{i \in I \mid if \neq 0\} = \{i_1, \ldots, i_k\}$. I_f ist endlich nach der Definition von f.

$$\Rightarrow f = \underbrace{(i_1 f)}_{\in K} \cdot \bar{i_1} + (i_2 f) \cdot \bar{i_2} + \cdots + (i_k f) \cdot \bar{i_k} \in \langle \bar{\imath} \mid i \in I \rangle$$

Also ist $F \subseteq \langle \bar{\imath} \mid i \in I \rangle$.
$F \supseteq \langle \bar{\imath} \mid i \in I \rangle$ ist erfüllt, da $if \neq 0$ nur für endlich viele.

q.e.d.

Beispiel II.5: Erzeugnis

II.11 Definition Erzeugendensystem

Sei $\mathcal{V}$ ein $K-Vektorraum$ und $M \subseteq \mathcal{V}$ Teilmenge. M heißt *Erzeugendensystem* von $\mathcal{V}$, falls $\mathcal{V} = \langle M \rangle$. Ist $M = \{x_1, \ldots, x_n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so schreibt man $\mathcal{V} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ und $\mathcal{V}$ heißt dann *endlich erzeugt*.

Kapitel III

Lineare Unabhängigkeit, Basen

III.1 Definition linear unabhängig

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum. Ein n-Tupel $(X_1, \dots, X_n)$ von Vektoren $X_i \in \mathcal{V}$ heißt *linear unabhängig*, falls für $a_1, \dots, a_n \in K$ gilt:

$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \cdots = a_n = 0$$

(d. h. der Nullvektor läßt sich *nur* auf die triviale Weise aus $X_1, \dots, X_n$ linear kombinieren.)
Weiter: $(X_1, \dots, X_n)$ heißt *linear abhängig*, falls für $a_1, \dots, a_n \in K$ gilt:

$$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n = 0 \text{ mit mindestens einem } a_i \neq 0$$

III.2 Satz (n-Tupel eines Vektors)

Seien die Vektoren $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{V}$ linear unabhängig. Dann existiert für jedes $X \in \langle X_1, \dots, X_n \rangle$ genau ein n-Tupel $(a_1, \dots, a_n) \in K^n$ von Zahlen $a_i \in K$ mit

$$X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$$

Beweis

- Die Existenz des n-Tupels folgt aus Satz II.8 :

$$Lk\big(\{X_1, \dots, X_n\}\big) = \langle X_1, \dots, X_n \rangle.$$

- Zu zeigen ist noch die Eindeutigkeit.
  Dazu sei $a_1, \dots, a_n \in K$ und $b_1, \dots, b_n \in K$ mit:

$$\begin{aligned}
&a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n = b_1 X_1 + \cdots + b_n X_n \\
\Rightarrow &(a_1 - b_1) X_1 + \cdots + (a_n - b_n) X_n = 0 \\
\Rightarrow_{\text{(lin.unabh.)}} &\; a_1 - b_1 = \cdots = a_n - b_n = 0 \\
\Rightarrow &a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n
\end{aligned}$$

q.e.d.

1. Der Nullvektor 0 ist linear abhängig. $\big((1 \cdot 0 = 0), 1 \neq 0\big)$
2. Sei $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} id_{\mathbb{R}} = P_1 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x \\ P_i &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^i \\ P_0 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 1 \end{aligned}$$

z. B. ist (P_1, P_2) linear unabhängig.
Beweis:
Sei $a, b \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{aligned} a \cdot P_1 + b \cdot P_2 &= 0 \qquad (\leftarrow \text{ Null-Abbildung: } \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto 0) \\ a \cdot x + b \cdot x^2 &= 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1(a \cdot P_1 + b \cdot P_2) &= 0 \qquad\qquad a \cdot 1 + b \cdot 1^2 = 0 \\ -1(a \cdot P_1 + b \cdot P_2) &= 0 \qquad\qquad a \cdot (-1) + b \cdot (-1)^2 = 0 \qquad \text{(III.1)} \\ (III.1) + (III.1) &\Rightarrow 2b = 0 \Leftrightarrow b = 0 \end{aligned}$$

Eingesetzt ergibt dies für a: $a = 0$.

q.e.d.

Beispiel III.1: lineare Unabhängigkeit

III.3 Definition Basis

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum. $(X_1, \ldots, X_n)$ mit $X_i \in \mathcal{V}$ heißt *Basis* von $\mathcal{V}$, falls gilt:

1. $\mathcal{V} = \langle X_1, \ldots, X_n \rangle$
2. $(X_1, \ldots, X_n)$ ist linear unabhängig.

d. h. eine Basis ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.
Zusatz: $\emptyset$ ist Basis von $\{0\}$.

III.4 Folgerung

Ist $\mathfrak{B} = (X_1, \ldots, X_n)$ Basis von $\mathcal{V}$ $(\neq \emptyset)$, so läßt sich jedes $X \in \mathcal{V}$ schreiben, als

$$X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \text{ mit } a_i \in K$$

$(a_1, \ldots, a_n)$ ist eindeutig durch X festgelegt. Genauer:

$$\kappa_{\mathfrak{B}} : \mathcal{V} \to K^n : X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$$

ist eine wohldefinierte bijektive Abbildung (wohldefiniert, da nach der Definition jedem X nur ein $(a_1, \ldots, a_n)$ zugeordnet wird).

Beweis

- Zeige $\kappa_{\mathfrak{B}}$ ist wohldefiniert:
  $\kappa_{\mathfrak{B}}$ ist wohldefiniert, denn jedes $X \in \mathcal{V}$ läßt sich als Linearkombination der X_i darstellen und die Koeffizienten a_i sind eindeutig durch X (und durch $\mathfrak{B}$) festgelegt.

- Zeige $\kappa_{\mathfrak{B}}$ ist injektiv:
  Seien $X, Y \in \mathcal{V}$ mit $X\kappa_{\mathfrak{B}} = Y\kappa_{\mathfrak{B}} = (a_1, \ldots, a_n)$

  $$\Rightarrow X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n = Y, \text{ d. h. } X = Y$$

  $\Rightarrow \kappa_{\mathfrak{B}}$ ist injektiv.

- Zeige $\kappa_{\mathfrak{B}}$ ist surjektiv:
  Sei $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ beliebig.
  $\Rightarrow$ es existiert ein $Y \in \mathcal{V}$ mit

  $$Y = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$$

  (sonst wäre $\mathcal{V}$ kein K-Vektorraum.) $\Rightarrow \kappa_{\mathfrak{B}}$ ist surjektiv.

q.e.d.

$\kappa_{\mathfrak{B}}$ überträgt das Rechnen: Seien $X, Y \in \mathcal{V}$, $a, b \in K$. Dann gilt:

$$(aX + bY)\kappa_{\mathfrak{B}} = a(X\kappa_{\mathfrak{B}}) + b(Y\kappa_{\mathfrak{B}})$$

III.5 Definition Koordinatenabbildung

$X\kappa_{\mathfrak{B}}$ heißen die *Koordinaten* von X bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$,
$\kappa_{\mathfrak{B}}$ heißt die *Koordinatenabbildung* (bezüglich $\mathfrak{B}$).

III.6 Defintion Isomorphismus

Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ K-Vektorräume. Eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ heißt *Isomorphismus*, falls

$$(aX + bY)\varphi = a(X\varphi) + b(Y\varphi) \;\; \forall a, b \in K, \;\; \forall X, Y \in \mathcal{V}$$

Man sagt: $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ sind *isomorph* ($\mathcal{V} \cong \mathcal{W}$). (Dann ist $\varphi^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ ebenso isomorph.)

$G(K, x_1, \ldots, x_n)$ und K^{n+1} sind isomorph:

$$\varphi : (a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = b) \mapsto (a_1, \ldots, a_n, b)$$

Beispiel III.2: Isomorphismus

III.7 Satz (Existenz einer Basis)

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum mit einem endlichen Erzeugendensystem (Kurz: $\mathcal{V}$ ist endlich erzeugt). Dann hat $\mathcal{V}$ eine Basis.

Beweis

Sei $M = \{X_1, \dots, X_n\} \subseteq \mathcal{V}$ mit $\mathcal{V} = \langle M \rangle$.

- Ist $(X_1, \dots, X_n)$ linear unabhängig $\Rightarrow$ fertig, die Basis ist schon gefunden.
- Sei also $(X_1, \dots, X_n)$ linear abhängig, d. h. es existieren $a_1, \dots, a_n \in K$ und ein $i_0, 1 \leq i_0 \leq n$ mit $a_{i_0} \neq 0$, so daß

  $$a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n = 0 \tag{III.2}$$

  OBdA (ohne Beschränkung der Allgemeinheit) sei $i_0 = n$. Multipliziere (III.2) mit a_n^{-1} ($a_n \neq 0$):

  $$\begin{aligned} b_1 X_1 + \cdots + b_{n-1} X_{n-1} + X_n = 0 \qquad (b_i = a_i \cdot a_n^{-1}) \\ \Leftrightarrow (-b_1) X_1 + \cdots + (-b_{n-1}) X_{n-1} = X_n \end{aligned}$$

  $$\text{Also: } \langle X_1, \dots, X_n \rangle = \langle X_1, \dots, X_{n-1} \rangle$$

  Entweder ist $(X_1, \dots, X_{n-1})$ linear unabhängig, dann ist man fertig, denn die Basis ist gefunden worden, oder $(X_1, \dots, X_{n-1})$ ist linear abhängig, dann wiederholt man den obigen Vorgang. Nach endlichen vielen Schritten (da nur endlich viele Vektoren vorhanden sind) hat man eine Basis.

q.e.d.

Warnung: Die Basis, die man aus M erhält, ist *nicht* eindeutig durch M festgelegt. Siehe auch Beispiel III.3.

Sei $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ und $M = \big\{(1,1), (1,0), (0,1), (1,-1)\big\}$. Dann gibt es 12 verschiedene Basen, die man aus Elementen von M konstruieren kann. Z. B. ist $\big((1,1),(1,0)\big)$ linear unabhängig. Ebenso ist $\big((1,0),(0,1)\big)$ linear unabhängig. Damit sind beide 2-Tupel eine Basis von $\mathcal{V}$. Aber $\big((1,1),(1,0)\big) \neq \big((1,0),(0,1)\big)$.

Beispiel III.3: Konstruktion einer Basis

III.8 Folgerung

Für jeden endlich erzeugten K-Vektorraum $\mathcal{V} \neq \{0\}$ exisitert ein n, so daß $\mathcal{V} \cong K^n$. (Für $\mathcal{V} = \{0\}$ ist $K^0 = \{0\}$.)

III.9 Satz (Steinitzscher Austauschsatz)

Sei $\mathcal{V} = \langle B_1, \dots, B_n \rangle$ und sei $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{V}$ linear unabhängig. Dann können die B_i so umnumeriert werden, daß

$$\mathcal{V} = \langle X_1, \dots, X_k, B_{k+1}, \dots, B_n \rangle$$

Beweis (Induktion nach k.)

Fall k = 1: Da $X_1 \in \langle B_1, \ldots, B_n \rangle$

$$\Rightarrow \exists \ a_1, \ldots, a_n \in K \text{ mit } X_1 = a_1 B_1 + \cdots + a_n B_n$$

mit mindestens einem $a_i \neq 0$. (sonst $X_1 = 0$ und $(X_1, \ldots, X_n)$ linear abhängig, dies ist aber ein Widerspruch zur Voraussetzung.)
OBdA. sei $a_1 \neq 0$ (sonst vertausche B_1 und B_i):

$$\begin{aligned} a_1 B_1 &= X_1 - a_2 B_2 - \cdots - a_n B_n \quad \text{, also:} \\ B_1 &= a_1^{-1} X_1 - a_1^{-1} a_2 B_2 - \cdots - a_1^{-1} a_n B_n \end{aligned} \tag{III.3}$$

Dann ist $\mathcal{V} = \langle X_1, B_2, \ldots, B_n \rangle$. Denn für ein beliebiges $X \in \mathcal{V}$ existieren $a'_i \in K$ mit

$$X = a'_1 B_1 + \cdots + a'_n B_n$$

Setze für B_1 (III.3) ein $\Rightarrow X \in Lk(X_1, B_2, \ldots, B_n)$.
Induktionsannahme:
$X_1, \ldots, X_{k-1}$ seien linear unabhängig und $\mathcal{V} = \langle B_1, \ldots, B_n \rangle$. Obiger Satz gelte für $k-1$.
Klar ist nach Voraussetzung, daß $X_1, \ldots, X_k$ linear unabhängig sind.
Nach der Induktionsannahme gilt:

$$X_k \in \langle X_1, \ldots, X_{k-1}, B_k, \ldots, B_n \rangle$$

d. h. es existieren $a_1, \ldots, a_{k-1}, b_k, \ldots, b_n \in K$ mit:

$$X_k = a_1 X_1 + \cdots + a_{k-1} X_{k-1} + b_k B_k + \cdots + b_n B_n$$

Es ist eines der $b_i \neq 0$, denn falls $b_k = \cdots = b_n = 0$, folgt:

$$-X_k + a_1 X_1 + \cdots + a_{k-1} X_{k-1} = 0$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu der Bedingung, daß $(X_1, \ldots, X_k)$ linear unabhängig sind. Also OBdA sei $b_k \neq 0$ wie oben:

$$\begin{aligned} B_k &\in \langle X_1, \ldots, X_k, B_{k+1}, \ldots, B_n \rangle \\ \text{d. h.} \quad \mathcal{V} &= \langle X_1, \ldots, X_k, B_{k+1}, \ldots, B_n \rangle \end{aligned}$$

q.e.d.

III.10 Folgerung (Anzahl von Basisvektoren)

Je zwei Basen eines endlich erzeugten K-Vektorraums haben gleichviele Elemente.

Beweis

Seien $(B_1, \ldots, B_k)$ und $(B'_1, \ldots, B'_n)$ Basen von $\mathcal{V}$.
$\Rightarrow (B_1, \ldots, B_k)$ ist linear unabhängig und $(B'_1, \ldots, B'_n)$ ist ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$.
$\Rightarrow$(nach Steinitz) $k \leq n$.
Aus Symmetriegründen: $n \leq k \ \Rightarrow n = k$.

q.e.d.

III.11 Definition Dimension

Die Anzahl der Basisvektoren in einer Basis von $\mathcal{V}$ heißt die *Dimension* von $\mathcal{V}$ ($\dim \mathcal{V} = \dim_K \mathcal{V}$).
Ist $\mathcal{V}$ nicht endlich erzeugt, so ist die Dimension unendlich.

1. $\dim K^n = n$
   Beweis:
   $\underbrace{\big((1,0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,1)\big)}_{\text{Standardbasis des Körpers}}$ ist Basis von K^n
2. $\dim K[x]$ ist unendlich.
3. $\dim G(K, x_1, \dots, x_n) = n+1$. Basis: $\big((x_1 = 0), \dots, (x_n = 0), (0 = 1)\big)$
4. Isomorphe Vektorräume haben dieselbe Dimension. (Denn eine Basis wird auf eine Basis abgebildet.)

Beispiel III.4: Dimension einiger Vektorräume

III.12 Folgerung: Basisergänzungssatz

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Jedes linear unabhängige System $X_1, \dots, X_k (\in \mathcal{V})$ kann zu einer Basis von $\mathcal{V}$ ergänzt werden.

Beweis

Da $\mathcal{V}$ endlich erzeugt ist, folgt nach Satz III.7, $\mathcal{V}$ hat eine Basis $(B_1, \dots, B_n)$.
$\Rightarrow$ (nach dem Steinitzschen Austauschsatz III.9 nach Umnumerierung) es existiert $B_{k+1}, \dots, B_n \in \mathcal{V}$ mit $(X_1, \dots, X_k, B_{k+1}, \dots, B_n)$ ist Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$. Durch Weglassen von linear abhängigen Vektoren erhalten wir aus $(X_1, \dots, X_k, B_{k+1}, \dots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ (Satz III.7). Eine Basis von $\mathcal{V}$ hat n Vektoren, also kann man keinen Vektor weglassen, d. h. $(X_1, \dots, X_k, B_{k+1}, \dots, B_n)$ ist bereits eine Basis.

q.e.d.

III.13 Satz (Äquivalente Aussagen zu Basis)

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum, $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{V}$. Äquivalent sind folgende Aussagen:

1. $(X_1, \dots, X_n)$ ist Basis von $\mathcal{V}$.
2. $(X_1, \dots, X_n)$ ist *maximal linear unabhängig* (d. h. $(X_1, \dots, X_n, Y)$ ist linear abhängig für alle $Y \in \mathcal{V}$)
3. $(X_1, \dots, X_n)$ ist *minimales Erzeugendensystem* von $\mathcal{V}$.

Beweis

1. $\Rightarrow$ **2.** Sei $(X_1, \dots, X_n)$ Basis von $\mathcal{V} \Rightarrow (X_1, \dots, X_n)$ ist linear unabhängig.
Zeige: für ein beliebiges $Y \in \mathcal{V}$ ist $(X_1, \dots, X_n, Y)$ linear abhängig:
Beweis: Es existieren $a_1, \dots, a_n \in K$ mit

$$\begin{aligned} Y &= a_1 X_1 + \dots + a_n X_n \\ \Leftrightarrow 0 &= a_1 X_1 + \dots + a_n X_n + \underbrace{(-1)}_{\neq 0} Y \end{aligned}$$

d. h. $(X_1, \dots, X_n, Y)$ ist linear abhängig.

q.e.d.

2. $\Rightarrow$ 3. Seien $X_1, \dots, X_n$ maximal linear unabhängig (in $\mathcal{V}$).

1. Behauptung: $X_1, \dots, X_n$ ist Erzeugendensystem
   Dazu: Sei $Y \in \mathcal{V}$ beliebig
   $\Rightarrow (X_1, \dots, X_n, Y)$ ist linear abhängig, dh. es existieren
   $$(a_1, \dots, a_{n+1}) \neq (0, \dots, 0) \in K^{n+1} \text{ mit}$$
   $$a_1X_1 + \dots + a_nX_n + a_{n+1}Y = 0$$
   $a_{n+1} \neq 0$, da sonst $(X_1, \dots, X_n)$ linear abhängig ist.
   $$\Rightarrow Y = -a_{n+1}^{-1}(a_1X_1 + \dots + a_nX_n) \in \langle X_1, \dots, X_n \rangle$$
2. Behauptung: $(X_1, \dots, X_n)$ ist ein *minimales* Erzeugendensystem
   Angenommen $(X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ sei ein Erzeugendsystem von $\mathcal{V}$.
   $\Rightarrow X_i$ läßt sich durch eine Linearkombination von
   $$X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n$$
   ausdrücken. Dies ist aber ein Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $(X_1, \dots, X_n)$.

q.e.d.

3. $\Rightarrow$ 1. Sei $(X_1, \dots, X_n)$ ein minimales Erzeugendensystem.
Behauptung: $(X_1, \dots, X_n)$ ist eine Basis, d. h. ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.
Beweis:

- Es ist ein Erzeugendensystem nach Voraussetzung.
- Angenommen $(X_1, \dots, X_n)$ sei linear abhängig.
  $\Rightarrow$ es existieren $a_1, \dots, a_n \in K$ mit mindestens einem $a_{i_0} \neq 0$, so daß:
  $$0 = a_1X_1 + \dots + a_nX_n$$
  $$\Rightarrow X_{i_0} = -a_{i_0}^{-1}(a_1X_1 + \dots + a_{i_0-1}X_{i_0-1} + a_{i_0+1}X_{i_0+1} + \dots + a_nX_n)$$
  Dies ist aber ein Widerspruch zur Minimalität von $(X_1, \dots, X_n)$ als Erzeugendensystem.

q.e.d.

III.14 Folgerung

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum, $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$. Dann ist $\mathcal{W}$ auch endlich erzeugt und

1. $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$
2. $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V} \Leftrightarrow \mathcal{V} = \mathcal{W}$

Beweis

1. Man konstruiere eine Basis von $\mathcal{W}$:
   - Falls $\mathcal{W} = \{0\}$ $\surd$
   - sonst wähle $X_1 \in \mathcal{W}, X_1 \neq 0$. Ist $\mathcal{W} = \langle X_1 \rangle$ $\surd$ (da X_1 linear unabhängig ist)
   - sonst wähle $X_2 \in \mathcal{W} - \langle X_1 \rangle$ ($X_2 \in \mathcal{W}$ aber $X_2 \notin \langle X_1 \rangle$), d. h. (X_1, X_2) sind linear unabhängig. Falls $\mathcal{W} = \langle X_1, X_2 \rangle$ $\surd$
   - sonst wähle $X_3 \in \mathcal{W} - \langle X_1, X_2 \rangle$
     $\Rightarrow (X_1, X_2, X_3)$ sind linear unabhängig.
     etc...

   Der Prozeß terminiert nach spätestens $\dim \mathcal{V}$ Schritte wegen Satz III.13, also ist $\mathcal{W}$ endlich erzeugt und $\dim \mathcal{W} \leq \dim \mathcal{V}$

Bezeichnung:

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum, $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leq \mathcal{V}$:

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} := \underbrace{\langle \mathcal{U}, \mathcal{W} \rangle}_{:=\langle \mathcal{U} \cup \mathcal{W} \rangle} = \{X + Y | X \in \mathcal{U}, Y \in \mathcal{W}\}$$

III.15 Satz von Graßmann

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum, $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leq \mathcal{V}$, dann gilt:

$$\dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) + \dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W}$$

Beweis

Sei $(X_1, \ldots, X_k)$ eine Basis von $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ (eine Basis existiert nach der Folgerung III.14. $\mathcal{U}$ ist endlich erzeugt $\Rightarrow$ III.12 es existieren $Y_1, \ldots, Y_s \in \mathcal{U}$, so daß $(X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_s)$ eine Basis von $\mathcal{U}$ ist. Ebenso existeren $Z_1, \ldots, Z_t \in \mathcal{W}$, so daß $(X_1, \ldots, X_k, Z_1, \ldots, Z_t)$ eine Basis von $\mathcal{W}$ ist.
Behauptung:

$$(X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_s, Z_1, \ldots, Z_t) \tag{III.4}$$

ist eine Basis von $\mathcal{U} + \mathcal{W}$.
Sei $X \in \mathcal{U} + \mathcal{W} \Rightarrow$ es existiert ein $u \in \mathcal{U}$, $w \in \mathcal{W}$ mit $X = u + w$, also existieren $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s \in K$ mit:

$$u = a_1 X_1 + \cdots + a_k X_k + b_1 Y_1 + \cdots + b_s Y_s$$

und es existeren $c_1, \ldots, c_k, d_1, \ldots, d_t \in K$ mit:

$$w = c_1 X_1 + \cdots + c_k X_k + d_1 Z_1 + \cdots + d_t Z_t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow X &= u + w \\ &= (a_1 + c_1) X_1 + \cdots + (a_k + c_k) X_k + \\ &\quad b_1 Y_1 + \cdots + b_s Y_s + d_1 Z_1 + \cdots d_t Z_t \\ \text{d. h. } \langle X \rangle &= \mathcal{U} + \mathcal{W} \end{aligned}$$

Zeige nun, daß III.4 linear unabhängig ist. Dazu seien $a_i, b_i, c_i \in K$ mit:

$$\begin{aligned} 0 =& a_1 X_1 + \cdots + a_k X_k + b_1 Y_1 + \cdots + b_s Y_s + \\ & c_1 Z_1 + \cdots + c_t Z_t \\ \Rightarrow\ & \underbrace{-c_1 Z_1 - \cdots - c_t Z_t}_{\in \mathcal{W}} = \underbrace{a_1 X_1 + \cdots + b_s Y_s}_{\in \mathcal{U}} \quad \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \end{aligned} \tag{III.5}$$

Da die linke Seite eine Linearkombination aus $\mathcal{W}$, und die rechte Seite eine Linearkombination aus $\mathcal{U}$ ist, sind beide Linearkombinationen $\in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$. Daher lassen sie sich bereits aus der Basis von $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ eindeutig linearkombinieren, z. B. durch $d_1 X_1 + \cdots + d_k X_k$ für $d_1, \ldots, d_k \in K$.

$$\Rightarrow (a_1 - d_1) X_1 + \cdots + (a_k - d_k) X_k + b_1 Y_1 + \cdots + b_s Y_s = 0$$

Nach Vorraussetzung ist $(X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_s)$ linear unabhängig, da es eine Basis von $\mathcal{U}$ ist.

$$\Rightarrow a_1 - d_1 = \cdots = a_k - d_k = \underline{b_1 = \cdots = b_s = 0}$$

Aus Symmetriegründen gilt $\underline{c_1 = \cdots = c_t = 0}$. Setzt man die b_i und c_i in (III.5) so bleibt:

$$a_1 X_1 + \cdots + a_k X_k = 0$$

da $(X_1, \ldots, X_k)$ linear unabhängig ist (Basis von $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$) folgt:

$$\underline{a_1 = \cdots = a_k = 0}$$

$\Longrightarrow X$ ist linear unabhängig und somit eine Basis von $\mathcal{U} + \mathcal{W}$.

q.e.d.

Kapitel IV

Konstruktive Behandlung von Erzeugendensystemen, Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

IV.1 Bemerkung (Elementare Schritte)

Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$. Dann ist

1. $(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_j, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_i, X_{j+1}, \ldots, X_n)$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$.
   $\mathrm{Per}_{i,j}$: Permutiere (vertausche) X_i und X_j.

2. $(X_1, \ldots, X_i, \ldots, X_j + a \cdot X_i, \ldots, X_n)$ $(i \neq j)$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$.
   $\mathrm{Add}_{i,j}(a)$: addiere das a-fache von X_i auf X_j.

3. $(X_1, \ldots, X_{i-1}, a \cdot X_i, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ mit $a \neq 0$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$.
   $\mathrm{Mult}_i(a)$: multipliziere X_i mit a.

Beachte: Jeder Elementare Schritt kann durch einen elementaren Schritt wieder rückgängig gemacht werden.

IV.2 Bemerkung (Umwandlung eines Erzeugendensystems zu einer Basis)

Ein Erzeugendensystem $(X_1, \ldots, X_n)$ von $\mathcal{V}$ läßt sich durch elementare Schritte auf die Gestalt

$$(Y_1, \ldots, Y_k, 0, \ldots, 0) \text{ mit } Y_i \in \{X_1, \ldots, X_n\}$$

umformen, wobei $(Y_1, \ldots, Y_k)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ ist.

Beweis

Finde erstes i mit $X_i \neq 0$. Falls $i \neq 1$ wende $\mathrm{Per}_{1,i}$ an. Also sei oBdA. $X_1 \neq 0$.
In der allgemeinen Situation seien $(X_1, \ldots, X_s)$ linear unabhängig. Finde im allgemeinen Schritt das kleinste j mit $s < j \leq n$, so daß $(X_1, \ldots, X_s, X_j)$ linear unabhängig sind. Falls $j \neq s + 1$, wende $\mathrm{Per}_{s+1,j}$ an.
Am Ende erhält man:

- $(X_1, \ldots, X_k, X_{k+1}, \ldots, X_n)$ mit $(X_1, \ldots, X_k)$ linear unabhängig.

- $X_{k+1}, \dots, X_n \in \langle X_1, \dots, X_k \rangle$

Sei z. B. $X_{k+1} = a_1 X_1 + \dots + a_k X_k$. Wende nacheinander $\mathrm{Add}_{1,k+1}(-a_1)$, $\mathrm{Add}_{2,k+1}(-a_2)$, $\dots$, $\mathrm{Add}_{k,k+1}(-a_k)$ an. Als Ergebnis erhält man dann $(X_1, \dots, X_k, 0, X_{k+2}, \dots, X_n)$. In gleicher Weise werden nun $X_{k+2}, \dots, X_n$ eleminiert.

q.e.d.

IV.3 Bemerkung (elementare Schritte und Basen)

Seien $\mathfrak{B} = (X_1, \dots, X_n)$ und $\mathfrak{B}' = (Y_1, X_2, \dots, X_n)$ Basen von $\mathcal{V}$. Man kann $\mathfrak{B}'$ aus $\mathfrak{B}$ durch elementare Schritte erhalten.

Beweis

Sei $Y_1 = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$. Dann ist $a_1 \neq 0$, da sonst $(Y_1, X_2, \dots, X_n)$ linear abhängig ist. Dies ist ein Widerspruch zu der Forderung, daß $\mathfrak{B}'$ eine Basis ist.
Wende nun die folgenden elementaren Schritte an:

$$\begin{array}{lcl}
\mathfrak{B} & \xrightarrow{\mathrm{Mult}_1(a_1)} & \mathfrak{B}_1 = (a_1 X_1, X_2, \dots, X_n) \\
 & \xrightarrow{\mathrm{Add}_{2,1}(a_2)} & \mathfrak{B}_2 = (a_1 X_1 + a_2 X_2, X_2, \dots, X_n) \\
 & \xrightarrow{\mathrm{Add}_{3,1}(a_3)} & \mathfrak{B}_3 \dots \\
 & \vdots & \\
 & \xrightarrow{\mathrm{Add}_{n,1}(a_n)} & \mathfrak{B}'
\end{array}$$

IV.4 Satz (Überführung zweier Basen ineinander)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum.

1. Je zwei Basen von $\mathcal{V}$ können durch Hintereinanderausführung von elementaren Schritten ineinander überführt werden.

2. Je zwei Erzeugendensysteme von $\mathcal{V}$ mit gleichvielen Elementen können durch Hintereinanderausführung elementarer Schritte ineinander überführt werden.

Beweis

1. Wende IV.3 und den Beweis des Austauschsatzes von Steinitz an (Umnummerieren - $\mathrm{Per}_{i,j}$ anwenden), bis sukzessive alle Basisvektoren durch die neuen ersetzt werden.

2. folgt aus 1. und Bemerkung IV.2.

IV.5 Algorithmus: Konstruktion einer Basis

Konstruktion einer Basis aus einem endlichen Erzeugendensystem bei Teilräumen von K^n.
Gegeben: $X_1, \dots, X_m \in K^n$ mit $X_i = (X_{i1}, \dots, X_{in})$
Gesucht: Eine Basis von $\langle X_1, \dots, X_m \rangle$.
Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & \dots & X_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{m1} & \dots & X_{mn} \end{pmatrix}$$

1. Sei $\mathcal{V} = K^4$ und sei $X_1 = (1,1,1,1) \quad X_2 = (0,1,-1,0) \quad X_3 = (0,0,0,1)$
   Gesucht: Basis von $\langle X_1, X_2, X_3 \rangle$.
   Sind (X_1, X_2, X_3) linear unabhängig? (K ist hier noch beliebig!) D. h. existieren $a_1, a_2, a_3 \in K$ ein $a_i \neq 0$ mit:

$$\begin{aligned} a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 &= 0 \\ (a_1, a_1 + a_2, a_1 - a_2, a_1 + a_3) &= (0,0,0,0) \\ \Rightarrow a_1 = 0, \;\; a_2 &= 0, a_3 = 0 \end{aligned}$$

   Diese Methode ist aber schlecht, da sie unübersichtlich und somit nicht sehr einfach zu lösen ist, wenn kompliziertere Aufgaben gestellt sind. Besser ist es die Vektoren in folgender Form zu schreiben:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to a_1 = 0 \\ \to a_2 = 0 \\ \to a_3 = 0 \end{matrix}$$

2. **Gesucht:** Eine Basis von

$$\mathcal{U} = \big\langle (1,2,3,4), (5,6,7,8), (9,10,11,12) \big\rangle \leq \mathbb{Q}^4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \mathrm{Add}_{1,2}(-5) \\ \longrightarrow \\ \mathrm{Add}_{1,3}(-9) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -4 & -8 & -12 \\ 0 & -8 & -16 & -24 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} \mathrm{Add}_{2,3}(-2) \\ \longrightarrow \\ \mathrm{Mult}_2(-\frac{1}{4}) \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   $\Rightarrow \big((1,2,3,4), (0,1,2,3)\big)$ ist eine Basis von $\mathcal{U}$.

Beispiel IV.1: Bestimmung von Basen

- Suche das kleinste j (Spaltenindex) mit $X_{ij} \neq 0$ für ein i (Zeilenindex).
- Wenn dieses j gefunden, suche kleinstes i mit $X_{ij} \neq 0$. (Also suche erste Spalte ungleich Null, deren erster Eintag ungleich Null ist.)

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & \\ & & & \vdots & \dots \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 & \\ & & & X_{ij} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

- Falls $i \neq 1$, wende $\mathrm{Per}_{1,i}$ an.

- Wende $\mathrm{Mult}_1(X_{1j}^{-1})$ an.

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & ? & \dots \\ & & & ? & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix}$$

- Um nun die Koeffizienten in der Spalte unterhalb der 1 auf 0 zu bringen wendet man nacheinander $\mathrm{Add}_{1,2}(-X_{2j}), \dots, \mathrm{Add}_{1m}(-X_{mj})$ an und erhält

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & ? & \dots & ? \\ \vdots & & \vdots & 0 & & Y_2 & \\ & & & \vdots & & \vdots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & Y_m & \end{pmatrix} \qquad \text{text} \qquad Y_2, \dots, Y_m \in K^{n-j}$$

- Wende dasselbe Verfahren auf $Y_2, \dots, Y_m$ an, bis der Nullvektor oder nichts übrigbleibt.

$$\begin{pmatrix} & 1 & ? & \dots & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & ? & \dots & & \\ & \vdots & & 0 & \dots & 1 & ? \dots & \\ & & & \vdots & & 0 & \dots & \end{pmatrix}$$

- Die Zeilen $\neq (0, \dots, 0)$ bilden eine Basis von $\langle X_1, \dots, X_m \rangle$.

Überprüfe die Vektoren in folgender Matrix auf lineare Unabhägigkeit:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\mathrm{Per}_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{Add}_{2,4}(-1)]{\mathrm{Add}_{2,3}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\mathrm{Per}_{3,4}]{\mathrm{Mult}_4(-2^{-1})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 & 3 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Alle Vektoren sind linear unabhängig, bilden also eine Basis des von ihnen erzeugten Teilraums. Die Dimension ist vier.

Beispiel IV.2: Konstruktion einer Basis aus einem Erzeugendensystem

IV.6 Folgerung (Gaußsches Eliminationsverfahren)

Jedes K-lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}X_1 & +\cdots+ & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}X_1 & +\cdots+ & a_{mn}X_n & = & b_m \end{array} \tag{IV.1}$$

kann durch elementare Umformungen auf „Treppengestalt“ gebracht werden, ohne daß sich dabei die Lösungsmenge ändert.

Beweis

$\varphi : G(X_1, \dots, X_n) \to K^{n+1} : (a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = b) \mapsto (a_1, \dots, a_n, b)$
Wende φ an, wende dann den Algorithmus IV.5 an, anschließend wende φ^{-1} an. Die Lösungsmenge ändert sich nicht. Die Vorbedingung dafür, daß man φ anwenden kann ist, daß φ ein Isomorphismus ist. Siehe dazu auch Beispiel IV.3.
Beachte: $\mathrm{Per}_{ij}, \mathrm{Add}_{ij}(a)$ und $\mathrm{Mult}_i(a)$ ändern die Lösungsmenge nicht.

Gesucht ist die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 3X_3 &= 4 \\ 5X_1 + 6X_2 + 7X_3 &= 8 \\ 9X_1 + 10X_2 + 11X_3 &= 12 \end{aligned}$$

Wende nun φ auf das Gleichungssystem an. Dann erhält man folgende Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Nun kann der Algorithmus IV.5 angewendet werden:

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun kann man φ^{-1} anwenden, um wieder die Gleichungen zu erhalten:

$$\to \begin{array}{lcl} X_1 + 2X_2 + 3X_3 & = & 4 \\ X_2 + 2X_3 & = & 3 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Die Lösungsmenge ist: $\big\{(-2+a, 3-2a, a) | a \in K\big\}$.

Beispiel IV.3: Bestimmung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

IV.7 Bemerkung (Definition Äquivalenzrelation auf $\mathcal{V}$)

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum und $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$

1. Definition: Seien $x, y \in \mathcal{V}$:
$$x \underset{\mathcal{W}}{\sim} y :\Leftrightarrow x - y \in \mathcal{W}$$
Dann ist $\underset{\mathcal{W}}{\sim}$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{V}$.
2. Definition: Sei $x \in \mathcal{V}$. Die Menge $x + \mathcal{W} := \{x + w \mid w \in \mathcal{W}\}$ heißt die *Restklasse von x nach $\mathcal{W}$*.
3. Die Äquivalenzklassen bezüglich $\underset{\mathcal{W}}{\sim}$ sind gerade die Restklassen $x + \mathcal{W}$ mit $x \in \mathcal{V}$.

IV.8 Satz (Lösungsmenge eines Gleichungssystems)

Sei (IV.1) ein lineares Gleichungssystem über K und (IV.1_0) das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem. Dann gilt:

1. Die Lösungsmenge L_0 von (IV.1_0) ist ein Teilraum von K^n.
2. Die Lösungsmenge L von (IV.1) ist entweder leer (d. h. das Gleichungssystem ist nicht lösbar), oder es ist eine Restklasse nach L_0, d. h. wenn $(l_1, \ldots, l_n) \in L$ irgendeine Lösung von (IV.1) ist, so ist $L = (l_1, \ldots, l_n) + L_0$.

Beweis

1. Siehe Satz II.6
2. Seien $x, y \in L \Rightarrow x - y \in L_0$ Wende nun die Bemerkung IV.7 an.

q.e.d.

Beachte: In Treppengestalt läßt sich die Lösbarkeit und eine Basis von L_0 ablesen.

IV.9 Bemerkung (Matrix des Gleichungssystems)

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \tag{IV.2}$$

heißt die *Matrix des Gleichungssystems*. Für ein a_{ij} aus der Matrix heißt i der Zeilenindex und j der Spaltenindex. Die b_i's haben den Spaltenindex $n+1$. Ist die Matrix in *Stufengestalt* (Endergebnis des Gaußschen Algorithmus), so nennt man die Spaltenindizes an den Stufen *Stufenindizes*. Die übrigen Spaltenindizes heißen *Fehlindizes*.

IV.10 Satz (Lösbarkeit eines GLS)

Sei (IV.2) ein lineares Gleichungssystems in Treppengestalt, dessen Matrix m Zeilen ($\neq 0$) und $n+1$ Spalten hat. Dann gilt:

1. (IV.2) ist genau dann lösbar, wenn $n + 1$ kein Stufenindex ist.

1.

$$\begin{array}{cccccl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 4 \\ & x_2 & +2x_3 & & = & 8 \\ & & & 0 \cdot x_4 & = & 7 \rightarrow \text{Gleichung nicht lösbar} \end{array}$$

Ein Gleichungssystem ist genau dann lösbar, falls in der Treppengestalt

$$(0x_1 + \cdots + 0x_n = b) \qquad \text{mit } b \neq 0$$

nicht vorkommt.

2. Bestimme die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccl} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & 4 \\ & x_2 & +2x_3 & & = & 3 \end{array}$$

Zunächst *eine* Lösung des inhomogenen Gleichungssystems
z. B. $x_4 = x_3 = 0$, $x_2 = 3$, $x_1 = -2$
$(-2, 3, 0, 0)$
Dann bestimme ein Erzeugendensystem (Basis) von L_0 (dem zugehörigen homogenen Gleichungssystems)

(a) Setze $x_3 = 1$ und $x_4 = 0$
$\Rightarrow x_2 = -2, \;\; x_1 = 1$ Also: $(1, -2, 1, 0) \in L_0$

(b) Setze nun $x_3 = 0$ und $x_4 = 1$
$\Rightarrow x_2 = 0, \;\; x_1 = -1$ Also: $(-1, 0, 0, 1) \in L_0$

Jetzt kann man die Lösungsmenge des inhomogenen Gleichungssystems angeben:

$$\begin{aligned} L &= (-2, 3, 0, 0) + \big\langle (1, -2, 1, 0), (-1, 0, 0, 1) \big\rangle \\ &= \big\{ (-2 + a - b, 3 - 2a, a, b) | a, b \in K \big\} \end{aligned}$$

Beispiel IV.4: Bestimmung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

2. Die Dimension des zugehörigen homogenen Löungssystems ist gleich der Anzahl der Fehlindizes auf der linken Seite.

Die Basis von L_0 kann so gewählt werden, daß ein Fehlindex i mit 1 und alle anderen mit 0 besetzt werden. Man erhält je einen Vektor pro Fehlindex, wobei i alle Fehlindizes durchläuft. Bei der Bestimmung einer Partikulären Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ist es am einfachsten $x_i = 0$ zu setzen für alle Fehlindizes i.

IV.11 Definition Matrix

Sei K ein Körper, $n, m \in \mathbb{N}$.

1. Eine $m \times n$-Matrix über K ist eine Abbildung

$$A : \underbrace{\{1, \ldots, m\}}_{Zeilenindizes} \times \underbrace{\{1, \ldots, n\}}_{Spaltenindizes} \rightarrow K$$

1.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right) \underset{\text{in Treppe}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ \uparrow & & \uparrow & \uparrow & \end{array}\right)$$

Stufenindizes: 1, 3, 4 (siehe Pfeile ↑)
Fehlindex : 2
Partikuläre Lösung:

$$x_2 = 0 \Rightarrow \left(8\frac{1}{2}, 0, -14, 5\right) \text{ ist eine Lösung}$$

Basis von L_0: Setze $x_2 = 1$ (alle anderen Fehlindizes $= 0$)

$$\begin{aligned} L_0 &= \left\langle \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right) \right\rangle \\ L &= \left\{ \left(8\frac{1}{2}, 0, -14, 5\right) + \left\langle \left(-\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right) \right\rangle \right\} \\ &= \left\{ \left(8\frac{1}{2} - \frac{a}{2}, a, -14, 5\right) \right\} \end{aligned}$$

2. Das Gleichungssystem folgender Matrix ist nicht lösbar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Beispiel IV.5: Bestimmung der Lösung eines linearen Gleichungssystems

Schreibweise:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & & \dots & & A_{1n} \\ & \ddots & & & \\ \vdots & & A_{ij} & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ A_{m1} & & \dots & & A_{mn} \end{pmatrix}$$

2. Die Menge aller $(m \times n)$-Matrizen über K wird mit $K^{m \times n}$ bezeichnet. Sie bildet einen K-Vektorraum. (K^n wird identifiziert mit $K^{1 \times n}$)

3. $A_{1\_} = (A_{11}, \dots, A_{1n}), \dots, A_{m\_} = (A_{m1}, \dots, A_{mn})$ heißen *Zeilenvektoren* von A.

4. Der Zeilenraum $\mathcal{Z}(A)$ ist der von $A_{1\_}, \dots, A_{m\_}$ erzeugte Teilraum von K^n. Die Dimension des Zeilenraumes von A heißt der (Zeilen-)Rang von A $\big(\text{bzw.} \operatorname{Rg}(A)\big)$.

5. Sei (IV.1) ein lineares Gleichungssystem. Dann heißt

$$M(*) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

die *zugehörige Matrix*, oder die *zugehörige erweiterte Matrix*.

$$M_e(*) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

heißt die *zugehörige eingeschränkte Matrix*.

IV.12 Satz (Dimension eines GLSH)

Sei (IV.2) ein lineares Gleichungssystem und L_0 der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Gleichungsystems.

1. (IV.2) ist lösbar $\Leftrightarrow \mathrm{Rg}\big(M(*)\big) = \mathrm{Rg}\big(M_e(*)\big)$
2. $\dim L_0(*) = n - \mathrm{Rg}\big(M_e(*)\big)$

Beweis

1. Der Rang und die Lösbarkeit bleiben ungeändert beim Anwenden elementarer Umformungen. Daher sei oBdA (IV.2) in Treppenform gegeben:

$$(IV.2) \text{ ist lösbar } \Leftrightarrow (0, \dots, 0, b) \text{ mit } b \neq 0 \text{ ist nicht die letzte Zeile}$$

$$\mathrm{Rg}\big(M(*)\big) = \begin{cases} \mathrm{Rg}\big(M_e(*)\big) & \text{, falls } (0, \dots, 0, b), b \neq 0 \text{ nicht letzte Zeile} \\ \mathrm{Rg}\big(M_e(*)\big) + 1 & \text{, falls } (0, \dots, 0, b), b \neq 0 \text{ letzte Zeile} \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned} \dim L_0 &= \text{ Anzahl der linken Fehlindizes} \\ &= n - \text{ Anzahl der linken Stufenindizes} \\ &= n - \mathrm{Rg}\big(M_e(*)\big) \end{aligned}$$

q.e.d.

IV.13 Satz (Faktorraum)

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum, $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$. Dann bildet

$$\mathcal{V}/\mathcal{W} := \{X + \mathcal{W} \mid X \in \mathcal{V}\}$$

einen K-Vektorraum, in dem Addition und Multiplikation wie folgt definiert sind; für alle $X, Y \in \mathcal{V}$, $a \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} (X + \mathcal{W}) + (Y + \mathcal{W}) &:= (X + Y) + \mathcal{W} \\ a(X + \mathcal{W}) &:= aX + \mathcal{W} \end{aligned}$$

$\mathcal{V}/\mathcal{W}$ heißt der *Faktorraum* (Quotientenraum, Restklassenraum) von $\mathcal{V}$ nach $\mathcal{W}$.

Beweis

Zeige, daß die Addition und Multiplikation wohldefiniert sind: Für $X + \mathcal{W} = X' + \mathcal{W}$ und $Y + \mathcal{W} = Y' + \mathcal{W}$ (d. h. $X - X', Y - Y' \in \mathcal{W}$) Zeige:

- $(X + Y) + \mathcal{W} = (X' + Y') + \mathcal{W}$, d. h.
  $(X + Y) - (X' + Y') \in \mathcal{W}$, d. h.
  $(X - X') + (Y - Y') \in \mathcal{W}\surd$

- $aX + \mathcal{W} = aX' + \mathcal{W}$, d. h.
  $aX - aX' \in \mathcal{W} \Leftrightarrow a(X - X') \in \mathcal{W}\surd$

Nun müssen noch die Vektorraumaxiome verifiziert werden. So ist der 0-Vektor: $0 + \mathcal{W} = \mathcal{W}$ und das inverse Element ist: $-(X + \mathcal{W}) = -X + \mathcal{W}$.

q.e.d.

Für lineare Gleichungssysteme mit vorgegebener linker Seite (IV.2) sei L_0 der Lösungsraum des zugehörigen homogenen Gleichungssystem.

- $X + L_0 =$ Lösungsmenge von (IV.2) mit rechter Seite $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

- $Y + L_0 =$ Lösungsmenge von (IV.2) mit rechter Seite $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

- $X + Y + L_0 =$ Lösungsmenge von (IV.2) mit rechter Seite $\begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ \vdots \\ b_n + c_n \end{pmatrix}$

- Sei $a \in K$:

  $aX + L_0 =$ Lösungsmenge von (IV.2) mit rechter Seite $\begin{pmatrix} ab_1 \\ \vdots \\ ab_n \end{pmatrix}$

Beispiel IV.6: Lösungsmenge

IV.14 Satz (Dimension des Faktorraums)

Sei $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$, $\mathcal{V}$ endlich erzeugt über K. Dann gilt:

$$\dim \mathcal{V}/\mathcal{W} = \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{W}$$

Beweis

$\mathcal{V}$ ist endlich erzeugt $\Rightarrow \mathcal{W}$ ist endlich erzeugt. Sei $(X_1, \dots, X_k)$ eine Basis von $\mathcal{W}$. Ergänze zu einer Basis von $\mathcal{V}$: $\quad (X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n)$
Behauptung: $\mathfrak{B} = (X_{k+1} + \mathcal{W}, \dots, X_n + \mathcal{W})$ ist eine Basis von $\mathcal{V}/\mathcal{W}$

Beweis:

1. Zeige $\mathfrak{B}$ ist ein Erzeugendensystem:
   $X + \mathcal{W} \in \mathcal{V}/\mathcal{W} \Rightarrow$ es existieren $a_1, \dots, a_n \in K$ mit

$$X = a_1X_1 + \cdots + a_nX_n$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow X + \mathcal{W} &= a_1(X_1 + \mathcal{W}) + \cdots + a_k(X_k + \mathcal{W}) + \\ &\quad a_{k+1}(X_{k+1} + \mathcal{W}) + \cdots + a_n(X_n + \mathcal{W}) \\ &= \underbrace{0 + \cdots + 0}_{\text{0-Vektor in } \mathcal{V}/\mathcal{W}} + \\ &\quad a_{k+1}(X_{k+1} + \mathcal{W}) + \cdots + a_n(X_n + \mathcal{W}) \checkmark\end{aligned}$$

2. Zeige $\mathfrak{B}$ ist linear unabhängig:
   Sei $a_{k+1}, \dots, a_n \in K$ mit

$$\begin{aligned}a_{k+1}(X_{k+1} + \mathcal{W}) + \cdots + a_n(X_n + \mathcal{W}) = 0 + \mathcal{W} \\ \Rightarrow a_{k+1}X_{k+1} + \cdots + a_nX_n \in \mathcal{W}\end{aligned}$$

also existieren $a_1, \dots, a_k \in K$ mit

$$a_{k+1}X_{k+1} + \cdots + a_nX_n = -(a_1X_1 + \cdots + a_kX_k)$$

d. h. $a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = 0 \Rightarrow$ (da $(X_1, \dots, X_n)$ linear unabhängig) $a_1 = \cdots = a_n = 0$
$\Rightarrow a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$

q.e.d.

IV.15 Definition Spaltenraum

Sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix mit den Spalten $A_{\_1}, \dots, A_{\_n}$. Dann heißt

$$\mathcal{S}(A) := \langle A_{\_1}, \dots, A_{\_n} \rangle \leq K^{m\times 1}$$

der *Spaltenraum* von A.

$$\text{Spaltenrang}(A) := \dim \mathcal{S}(A)$$

IV.16 Satz (Spaltenraum - Lösungsraum)

Sei $A \in K^{m\times n}$ gegeben.

1. $R_A = \left\{ B \in K^{m\times 1} | (IV.1) \text{ mit } M(*) = (A|B) \text{ lösbar } \right\} \leq K^{m\times 1}$
2. $R_A = S(A)$ (Spaltenraum von A)
3. Sei L_0 Lösungsraum von (IV.1_0) mit $M(*_0) = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ A & \vdots \\ & 0 \end{array} \right)$. Dann gilt: K^n/L_0 und R_A sind isomorph.

Beweis

1. $R_A \neq \emptyset$, da der 0-Vektor aus R_A ist. Seien die Gleichungssysteme $(A|B_1), (A|B_2)$ lösbar mit den Lösungen $(l_1, \ldots, l_n)$ bzw. $(l'_1, \ldots, l'_n)$. Dann ist $(A|aB_1 + bB_2)$ lösbar mit der Lösung $a(l_1, \ldots, l_n) + b(l'_1, \ldots, l'_n) \qquad (a, b \in K) \qquad \surd$
2. (IV.2) ist genau dann lösbar, wenn

$$X_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \cdots + X_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ lösbar mit}$$

$$\underbrace{X_1 A_{\_1} + \cdots + X_n A_{\_n}}_{\text{LK aus Spaltenraum(A)}} = \underbrace{B}_{R_A}$$

3. Sei $\varphi : K^n/L_0 \to R_A : l + L_0 = (l_1, \ldots, l_n) + L_0 \mapsto l_1 A_{\_1} + \cdots + l_n A_{\_n}$ Zeige:

   - φ ist wohldefiniert:
     Sei $(l_1, \ldots, l_n) + L_0 = (l'_1, \ldots, l'_n) + L_0$
     $(l_1, \ldots, l_n) + L_0 \mapsto l_1 A_{\_1} + \cdots + l_n A_{\_n}$
     $(l'_1, \ldots, l'_n) + L_0 \mapsto l'_1 A_{\_1} + \cdots + l'_n A_{\_n}$
     Da $(l_1 - l'_1, \ldots, l_n - l'_n) \in L_0$ gilt:

$$\begin{aligned} (l_1 - l'_1)A_{\_1} + \cdots + (l_n - l'_n)A_{\_n} = 0 \\ \Rightarrow l_1 A_{\_1} + \cdots + l_n A_{\_n} = l'_1 A_{\_1} + \cdots + l'_n A_{\_n} \end{aligned}$$

     d. h. $\big((l_1, \ldots, l_n) + L_0\big)\varphi = \big((l'_1, \ldots, l'_n) + L_0\big)\varphi \; \surd$
   - φ ist linear:

$$\begin{aligned} \big(a(l + L_0) + b(l' + L_0)\big)\varphi &= \big((al + bl' + L_0\big)\varphi \\ &= (al_1 + bl'_1)A_{\_1} + \cdots + (al_n + bl'_n)A_{\_n} \\ &= a(l_1 A_{\_1} + \cdots + l_n A_{\_n}) + \\ &\quad b(l'_1 A_{\_1} + \cdots + l'_n A_{\_n}) \\ &= a(l + L_0)\varphi + b(l' + L_0)\varphi \qquad \surd \end{aligned}$$

   - φ ist bijektiv:
     Sei $\psi : R_A \to K^n/L_0 : B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \mapsto$ Lösungsmenge von (IV.1) mit $M(*) = (A|B)$
     Dann ist $\varphi\psi = id_{K^n/L_0}$ (identische Abbildung), d. h. φ ist injektiv, $\psi\varphi = id_{R_A}$, d. h. φ ist surjektiv. $\surd$

q.e.d.

IV.17 Bemerkung (Isomorphismus von φ^{-1})

Ist $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ ein Isomorphismus, daraus folgt, daß $\varphi^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ auch ein Isomorphismus ist.

IV.18 Folgerung (Spaltenrang = Zeilenrang)

Sei $A \in K^{m \times n}$. Daraus folgt, daß der Spaltenrang von A gleich dem Zeilenrang von A ist.

Beweis

Sei L_0 der Lösungsraum von (IV.1_0) mit $M(*_0) = (A|0)$.
In Satz IV.12 wurde gezeigt: $n - \text{Zeilenrang}(A) = \dim L_0$, in Satz IV.16 wurde gezeigt:
$\text{Spaltenrang}(A) = \dim R_A = \dim K^n/L_0 = n - \dim L_0$
$\Rightarrow \text{Zeilenrang}(A) = \text{Spaltenrang}(A)$

q.e.d.

Kapitel V

Lineare Abbildungen

V.1 Definition linear

Seien $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ K-Vektorräume. Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ heißt *linear*, falls für alle $X, Y \in \mathcal{V}$ gilt:

$$(\underbrace{X+Y}_{\text{in } \mathcal{V}})\varphi = \underbrace{X\varphi + Y\varphi}_{\text{in } \mathcal{W}}$$

und für alle $X \in \mathcal{V}$, $a \in K$ gilt:

$$(aX)\varphi = a(X\varphi)$$

V.2 Definition Kern, Bild

Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear.
$\operatorname{Ker}\varphi := \{0\}\varphi^{-1} = \{X \in \mathcal{V} \mid X\varphi = 0\}$ heißt der *Kern* von φ.
$\operatorname{Bild}\varphi := \mathcal{V}\varphi = \{Y \in \mathcal{W} \mid \text{ es existiert ein } X \in \mathcal{V} \text{ mit } X\varphi = Y\}$ heißt das *Bild* von φ.

V.3 Bemerkung (Kern/Bild)

Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear.

1. $\operatorname{Ker}\varphi \leq \mathcal{V}$
2. $\operatorname{Bild}\varphi \leq \mathcal{W}$
3. φ ist injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$
4. φ ist surjektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Bild}\varphi = \mathcal{W}$

Beweis

1. $0 \in \operatorname{Ker}\varphi$, also $\operatorname{Ker}\varphi \neq \emptyset$
   - Seien $X, Y \in \operatorname{Ker}\varphi$:

   $$\Rightarrow_{[\varphi \text{ linear}]} \qquad (X+Y)\varphi = X\varphi + Y\varphi = 0 + 0 = 0$$

   d. h. $X + Y \in \operatorname{Ker}\varphi$

1. Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ ein Isomorphismus. Daraus folgt, daß φ linear ist, und φ^{-1} ist linear.
   Beweis:
   - Für φ gilt dies nach Definition des Isomorphismus.
   - Für $\varphi^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$: Dazu seien $X, Y \in \mathcal{W}$, $a \in K$

     (a)
     $$\begin{aligned}(X+Y)\varphi^{-1} &= X\varphi^{-1} + Y\varphi^{-1} \\ \Leftrightarrow X+Y &= (X\varphi^{-1} + Y\varphi^{-1})\varphi \qquad \text{da } \varphi \text{ linear ist.}\end{aligned}$$

     (b)
     $$\begin{aligned}(aX)\varphi^{-1} &= a(X\varphi^{-1}) \\ \Leftrightarrow aX &= \big(a(X\varphi^{-1})\big)\varphi \qquad \text{da } \varphi \text{ linear ist.}\end{aligned}$$

   q.e.d.

2. $K[x] \to K^2 : a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \mapsto (a_0, a_1, a_3)$ ist linear (Schwanz-ab Abbildung).

3. Sei $\mathcal{V} = K^I$, $i \in I$ fest.
   $$\varepsilon_i : K^I \to K : f \mapsto if \qquad \text{(Einsetzen von i)}$$
   $\varepsilon_i : \mathcal{V} \to K$ ist linear.
   Beweis
   Seien $f, g \in \mathcal{V}$, $a \in K$
   $$\begin{aligned}(f+g)\varepsilon_i &= i(f+g) && \text{(nach Def. } \varepsilon_i) \\ &= if + ig && \text{(nach Def. „+“ in } \mathcal{V}) \\ &= f\varepsilon_i + g\varepsilon_i && \text{(nach Def. } \varepsilon_i) \\ a(f\varepsilon_i) &= a \cdot (if) && \text{(nach Def. } \varepsilon_i) \\ &= i(a \cdot f) && \text{(nach Def. „}\cdot\text{“ in } \mathcal{V}) \\ &= (a \cdot f)\varepsilon_i && \text{(nach Def. } \varepsilon_i)\end{aligned}$$

   q.e.d.

4. **Zwischenbemerkung:** Ist $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear, daraus folgt, $\underbrace{0\varphi}_{\in\mathcal{V}} = \underbrace{0}_{\in\mathcal{W}}$
   Beweis:
   $$0\varphi = (0 \cdot 0)\varphi = 0 \cdot (0\varphi) = 0$$

Beispiel V.1: lineare Abbildungen

1.
$$\left.\begin{array}{l}\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : (a,b,c) \mapsto (a,b) \\ \beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (a,b) \mapsto (a,b,0)\end{array}\right\} \text{linear}$$

$$\beta' : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 : (a,b,c) \mapsto (a,b,1) \qquad \text{ist nicht linear}$$
$$\alpha\beta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (a,b,c) \mapsto (a,b,0) \qquad \text{ist linear}$$
$$\beta\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (a,b) \mapsto (a,b) \qquad \text{ist linear}$$

$\beta\alpha = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2} \Rightarrow \beta$ ist injektiv und α ist surjektiv.

2. Seien $\mathcal{U}, \mathcal{V}, \mathcal{W}$ K-Vektorräume, $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ und $\psi : \mathcal{W} \to \mathcal{U}$ linear. Daraus folgt $\varphi\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ ist auch linear.
Beweis: Seien $X, Y \in \mathcal{V}$, $a \in K$

(a)
$$\begin{aligned}(X+Y)(\varphi\psi) &= \big((X+Y)\varphi\big)\psi \\ &= (X\varphi + Y\varphi)\psi \qquad \text{(da } \varphi \text{ linear)} \\ &= (X\varphi)\psi + (Y\varphi)\psi \qquad \text{(da } \psi \text{ linear)} \\ &= X(\varphi\psi) + Y(\varphi\psi)\end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned}(aX)(\varphi\psi) &= \big((aX)\varphi\big)\psi \\ &= \big(a(X\varphi)\big)\psi \\ &= a\big((X\varphi)\psi\big) \\ &= a\big(X(\varphi\psi)\big)\end{aligned}$$

3. $\Pi_{\mathcal{V}} : \underbrace{\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}}_{=\{(v,w) \mid v \in \mathcal{V}, w \in \mathcal{W}\}} \to \mathcal{V} : (v,w) \mapsto v$ ist linear.

4. $\alpha_1 : K^3 \to K^3 : (a,b,c) \mapsto (a-b, b+c, c+c)$ ist linear
$\alpha_2 : K^3 \to K^3 : (a,b,c) \mapsto (1+a, b, c)$ ist nicht linear
$\alpha_3 : K^3 \to K^3 : (a,b,c) \mapsto (a, b^2, c^2)$ ist nicht linear (genauer: α_3 ist linear $\Leftrightarrow K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

5. Sei $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$. $\nu : \mathcal{V} \to \mathcal{V}/\mathcal{W} : X \mapsto X + \mathcal{W}$ ist linear („natürlicher Epimorphismus“), d. h.
$$\left.\begin{array}{rl}(X+Y)+\mathcal{W} &= (X+\mathcal{W}) + (Y+\mathcal{W}) \\ a(X+\mathcal{W}) &= aX + \mathcal{W}\end{array}\right\} \text{(nach Definition)}$$

Beispiel V.2: lineare Abbildungen

- Sei $a \in K,\ X \in \operatorname{Ker}\varphi$:

$$\Rightarrow \qquad (aX)\varphi = a(X\varphi) = a \cdot 0 = 0$$

  d. h. $aX \in \operatorname{Ker}\varphi$ $\quad\surd$

2. $\operatorname{Bild}\varphi \neq \emptyset$, da z. B. $0_{\mathcal{W}} = (0_{\mathcal{V}})\varphi \in \operatorname{Bild}\varphi$. Seien $Y, Z \in \operatorname{Bild}\varphi,\ a, b \in K$
   Zu zeigen: $(aY + bZ) \in \operatorname{Bild}\varphi$:
   Dazu seien $Y', Z' \in \mathcal{V}$ mit $Y = Y'\varphi,\ Z = Z'\varphi$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad aY + bZ &= a(Y'\varphi) + b(Z'\varphi) \\ &= (aY' + bZ')\varphi \ \in \operatorname{Bild}\varphi \qquad \surd \end{aligned}$$

3. „$\Rightarrow$“ jeder Vektor hat genau 1 Urbild, also auch der 0-Vektor.
   „$\Leftarrow$“ Sei $X\varphi = Y\varphi$ für $X, Y \in \mathcal{V}$
   $\Rightarrow (X - Y)\varphi = X\varphi - Y\varphi = 0$
   $\Rightarrow$ (da $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$) $\quad X - Y = 0$
   $\Rightarrow X = Y \quad \surd$

4. Gilt durch Definition. $\surd$

q.e.d.

V.4 Homomorphiesatz

Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ eine lineare Abbildung der K-Vektorräume $\mathcal{V}, \mathcal{W}$.

1. $\nu : \mathcal{V} \to \mathcal{V}/\operatorname{Ker}\varphi : X \mapsto X + \operatorname{Ker}\varphi$ ist eine surjektive lineare Abbildung („natürlicher Epimorphismus“).
   ($\Rightarrow \operatorname{Ker}\nu = \operatorname{Ker}\varphi$)

2. $\widetilde{\varphi} : \mathcal{V}/\operatorname{Ker}\varphi \to \mathcal{W} : X + \operatorname{Ker}\varphi \mapsto X\varphi$ ist eine injektive lineare Abbildung.

3. $\varphi = \nu\widetilde{\varphi}$

4. $\mathcal{V}/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Bild}\varphi$
   ($\Rightarrow \dim\mathcal{V} = \dim\operatorname{Ker}\varphi + \dim\operatorname{Bild}\varphi$)

$$\begin{array}{c} \mathcal{V} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{W} \\ \text{(surjektiv) } \nu \searrow \nearrow \widetilde{\varphi} \text{ (injektiv)} \\ \mathcal{V}/\operatorname{Ker}\varphi \end{array}$$

Beweis

1. $\operatorname{Ker}\varphi \leq \mathcal{V},\ \ \nu$ linear (siehe Beispiel V.2 5.).
   Zeige nun, daß ν surjektiv ist:
   Dazu sei $X + \operatorname{Ker}\varphi \in \mathcal{V}/\operatorname{Ker}\varphi \Rightarrow X + \operatorname{Ker}\varphi = X\nu \quad \surd$

2. (a) Zeige, daß $\widetilde{\varphi}$ wohldefiniert ist.
   Sei $X, Y \in \mathcal{V}$ mit $X + \operatorname{Ker}\varphi = Y + \operatorname{Ker}\varphi$
   Behauptung: $X\varphi = Y\varphi$
   Beweis:

$$\begin{aligned} X + \operatorname{Ker}\varphi = Y + \operatorname{Ker}\varphi, \text{ d. h. } X - Y \in \operatorname{Ker}\varphi \\ \Rightarrow X\varphi - Y\varphi = 0 \\ \Rightarrow X\varphi = Y\varphi \qquad \surd \end{aligned}$$

(b) Zeige, daß $\widetilde{\varphi}$ linear ist.
Seien $X, Y \in \mathcal{V}, \quad a, b \in K$:

$$\begin{aligned}
&\big(a(X + \operatorname{Ker}\varphi) + b(Y + \operatorname{Ker}\varphi)\big)\widetilde{\varphi} \\
&= \big((aX + bY) + \operatorname{Ker}\varphi\big)\widetilde{\varphi} && \text{(nach Definition)} \\
&= (aX + bY)\varphi && \text{(nach Definition von } \widetilde{\varphi}) \\
&= a(X\varphi) + b(Y\varphi) && \text{(da } \varphi \text{ linear)} \\
&= a(X + \operatorname{Ker}\varphi)\widetilde{\varphi} + b(Y + \operatorname{Ker}\varphi)\widetilde{\varphi} \\
&\Rightarrow \widetilde{\varphi} \text{ ist linear} \qquad \surd
\end{aligned}$$

(c) Zeige, daß $\widetilde{\varphi}$ injektiv ist, d. h. $\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi} = \{ \underbrace{0 + \operatorname{Ker}\varphi}_{\text{0-Vektor in } \mathcal{V}/\operatorname{Ker}\varphi} \}$

Sei $X + \operatorname{Ker}\varphi \in \operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow (X + \operatorname{Ker}\varphi)\widetilde{\varphi} = 0 \\
&\Rightarrow X\varphi = 0 \qquad \text{(nach Definition von } \widetilde{\varphi}) \\
&\Rightarrow X \in \operatorname{Ker}\varphi \qquad \surd
\end{aligned}$$

3. Sei $X \in \mathcal{V}$:

$$\begin{aligned}
X(\nu\widetilde{\varphi}) &= (X\nu)\widetilde{\varphi} && \text{(nach Definition der Komposition)} \\
&= (X + \operatorname{Ker}\varphi)\widetilde{\varphi} && \text{(naxh Definition von } \nu) \\
&= X\varphi && \text{(nach Definition von } \widetilde{\varphi}) \\
&\Rightarrow \nu\widetilde{\varphi} = \varphi \qquad \surd
\end{aligned}$$

4. Zeige: $\mathcal{V}/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Bild}\varphi$
Dazu definiere die Abbildung $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$:

$$\widetilde{\widetilde{\varphi}} : \mathcal{V}/\operatorname{Ker}\varphi \to \operatorname{Bild}\varphi : X + \operatorname{Ker}\varphi \mapsto X\varphi$$

(Vergleiche $\widetilde{\widetilde{\varphi}}$ mit $\widetilde{\varphi}$, der Bildbereich ist anders.)

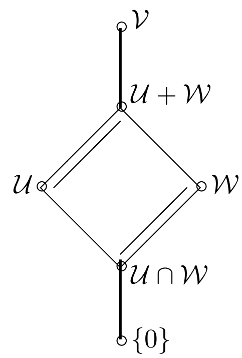
$$\left.\begin{array}{l}
\text{per Definitionem gilt: } \widetilde{\widetilde{\varphi}} \text{ ist surjektiv} \\
\text{Da } \widetilde{\varphi} \text{ injektiv} \Rightarrow \widetilde{\widetilde{\varphi}} \text{ ist injektiv} \\
\text{Da } \widetilde{\varphi} \text{ linear} \Rightarrow \widetilde{\widetilde{\varphi}} \text{ ist linear}
\end{array}\right\} \widetilde{\widetilde{\varphi}} \text{ ist isomorph}$$

q.e.d.

V.5 Isomorphiesatz

Seien $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ ($\Rightarrow \mathcal{U} \leq \mathcal{U} + \mathcal{W} \leq \mathcal{V},\ \ \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \leq \mathcal{W}$).
Dann gilt:

$$(\mathcal{U} + \mathcal{W})/\mathcal{U} \cong \mathcal{W}/(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$



Beweis

Die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{W} \to (\mathcal{U}+\mathcal{W})/\mathcal{U} : w \mapsto w+\mathcal{U}$$

ist linear, da

$$\nu|_{\mathcal{W}} = \varphi \qquad \text{wobei} \qquad \nu : \mathcal{V} \to \mathcal{V}/\mathcal{U} : v \mapsto v+\mathcal{U}$$

φ ist surjektiv, da

$$\begin{aligned} \operatorname{Bild}\varphi &= \{w+\mathcal{U} \mid w \in \mathcal{W}\} \\ &= \{w+u+\mathcal{U} \mid w \in \mathcal{W}, u \in \mathcal{U}\} \\ &= (\mathcal{W}+\mathcal{U})/\mathcal{U} \end{aligned}$$

Behauptung: $\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{U}\cap\mathcal{W}$
Beweis:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\varphi &= \{w \in \mathcal{W} \mid w+\mathcal{U} = \mathcal{U}\} \\ &= \{w \in \mathcal{W} \mid w \in \mathcal{U}\} = \mathcal{W}\cap\mathcal{U} \end{aligned}$$

Nach dem Homomorphiesatz V.4 gilt:

$$\begin{aligned} &\mathcal{W}/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Bild}\varphi \\ &\text{da } \operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{W}\cap\mathcal{U} \text{ und } \operatorname{Bild}\varphi = (\mathcal{U}+\mathcal{W})/\mathcal{U} \\ \Rightarrow \quad &\mathcal{W}/(\mathcal{W}\cap\mathcal{U}) \cong (\mathcal{U}+\mathcal{W})/\mathcal{U} \end{aligned}$$

q.e.d.

V.6 Folgerung aus dem Isomorphiesatz

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit den Unterräumen $\mathcal{U}$ und $\mathcal{W}$.

$$\Rightarrow \dim\mathcal{U} + \dim\mathcal{W} = \dim(\mathcal{W}\cap\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{U}+\mathcal{W})$$

Beweis

Da $\mathcal{W}/(\mathcal{W}\cap\mathcal{U}) \cong (\mathcal{U}+\mathcal{W})/\mathcal{U}$ gilt nach dem Isomorphiesatz:

$$\begin{aligned} &\dim\mathcal{W}/(\mathcal{W}\cap\mathcal{U}) = dim(\mathcal{U}+\mathcal{W})/\mathcal{U} \\ \Leftrightarrow\ &\dim\mathcal{W} - \dim(\mathcal{W}\cap\mathcal{U}) = \dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) - \dim\mathcal{U} \end{aligned}$$

q.e.d.

V.7 Anwendung des Homomorpiesatzes

Neuer Beweis von IV.16:
Sei $A \in K^{m \times n}$ und

$$\begin{aligned} R_A &= \left\{B \in K^{m\times 1} | (IV.1) \text{ mit } M(*) = (A|B) \text{ lösbar}\right\} \\ &= \langle A_{\_1}, \ldots, A_{\_n} \rangle \leq K^{m\times 1} \end{aligned}$$

Behauptung: $K^n/L_0 \cong R_A$
Beweis:

$$\psi : K^n \to R_A : (l_1, \ldots, l_n) \mapsto l_1 A_{\_1} + \cdots + l_n A_{\_n}$$

ist eine surjektive lineare Abbildung. $\operatorname{Ker}\psi = L_0 =$ Lösungsraum von (IV.1_0)

$$\Rightarrow \text{(nach dem Homomorphiesatz)} \qquad K^n / \underbrace{L_0}_{=\operatorname{Ker}\psi} \cong \underbrace{R_A}_{=\operatorname{Bild}\psi}$$

q.e.d.

V.8 Satz

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum, $\mathcal{U}, \mathcal{W} \leq \mathcal{V}$. Weiterhin sei

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \langle X_1, \ldots, X_k \rangle \\ \mathcal{W} &= \langle Y_1, \ldots, Y_l \rangle \\ \mathcal{X} &= \left\langle (X_1, X_1), \ldots, (X_k, X_k), (Y_1, 0), \ldots, (Y_l, 0) \right\rangle \leq \mathcal{V} \oplus \mathcal{V} \\ \Pi &: \mathcal{X} \to \mathcal{V} : (X, Y) \mapsto X \end{aligned}$$

Dann gilt:

1. Π ist linear
2. $\operatorname{Bild}\Pi = \mathcal{U} + \mathcal{W}$
3. $\operatorname{Ker}\Pi = \{0\} \oplus (\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$
4. $\mathcal{X} \cong \mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$

Beweis

1. Daß Π linear ist, ist klar. $\surd$
2. Daß $\operatorname{Bild}\Pi = \mathcal{U} + \mathcal{W}$ folgt sofort aus der Definition von Π $\surd$
3. Sei $(0, Z) \in \operatorname{Ker}\Pi$. Daraus folgt

   „$\subseteq$“ es existieren $X \in \mathcal{U}$ und $Y \in \mathcal{W}$ mit

   $$\begin{aligned} (0, Z) &= (X, X) + (Y, 0) \\ &\Rightarrow X = -Y, \;\; Z = X \\ &\Rightarrow Z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W} \end{aligned}$$

   „$\supseteq$“ Sei $Z \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$:

   $$\begin{aligned} &\Rightarrow (0, Z) = (Z, Z) + (-Z, 0) \quad \in \mathcal{X} \\ &\Rightarrow (0, Z) \in \operatorname{Ker}\Pi \qquad \surd \end{aligned}$$

4. Definiere folgende lineare Abbildungen:
   $\alpha : \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} \to \mathcal{X} : (u, w) \mapsto (u + w, u)$
   $\beta : \mathcal{X} \to \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} : (s, t) \mapsto (t, s - t)$
   α und β sind invers zueinander, d. h. $\alpha\beta = \mathrm{id}_{\mathcal{U}\oplus\mathcal{W}}$, und $\beta\alpha = \mathrm{id}_{\mathcal{X}}$ also liegt ein Isomorphismus vor. $\surd$

q.e.d.

V.9 Folgerung

Bei gleichen Voraussetzungen wie beim vorigen Satz gilt:

$$\underbrace{\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{W}}_{\substack{\dim(\mathcal{U}\oplus\mathcal{W}) \\ =\dim \mathcal{X}}} = \dim(\underbrace{\mathcal{U} + \mathcal{W}}_{\mathrm{Bild}\,\Pi}) + \dim(\underbrace{\mathcal{U} \cap \mathcal{W}}_{\mathrm{Ker}\,\Pi})$$

Denn nach dem Homomorphiesatz gilt:

$$\underbrace{\dim \mathcal{X} - \dim \mathrm{Ker}\,\Pi}_{=dim\mathcal{X}/\,\mathrm{Ker}\,\Pi} = \dim \mathrm{Bild}\,\Pi$$

V.10 Folgerung (Zassenhaus-Algorithmus)

Algorithmus zur Bestimmung einer Basis von $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ und $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$:
Gegeben seien X_i, Y_i wie in Satz V.8.

Algorithmus

Wende den Gauß-Algorithmus an auf

$$\big((X_1, X_1), \ldots, (X_k, X_k), (Y_1, 0), \ldots, (Y_l, 0)\big)$$

Man erhält:

$$\big((Z_1, *), \ldots, (Z_m, *), (0, D_1), \ldots, (0, D_n), (0, 0), \ldots, (0, 0)\big)$$

mit $Z_i \neq 0$ und $D_i \neq 0$. Dann ist $(Z_1, \ldots, Z_m)$ eine Basis von $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ und $(D_1, \ldots, D_n)$ ist eine Basis von $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$.

V.11 Satz (lineare Abb. zwischen Vektorräumen)

Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ K-Vektorräume, $\mathcal{V}$ endlich erzeugt und $Y_1, \ldots, Y_k \in \mathcal{W}$.

1. Wenn $B_1, \ldots, B_k \in \mathcal{V}$ linear unabhängig sind, daraus folgt, es existiert eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W} \qquad \text{mit} \qquad B_i\varphi = Y_i \qquad (i = 1 \ldots k)$$

2. Sei $\mathcal{V} = \langle B_1, \ldots, B_k \rangle$ (d. h. $(B_1, \ldots, B_k)$ bilden ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}$). Daraus folgt, es existiert höchstens eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W} \qquad \text{mit} \qquad B_i\varphi = Y_i \qquad (i = 1 \ldots k)$$

3. Ist $(B_1, \ldots, B_k)$ eine Basis von $\mathcal{V}$, daraus folgt, es existiert genau eine lineare Abbildung

$$\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W} \qquad \text{mit} \qquad B_i\varphi = Y_i \qquad (i = 1 \ldots k)$$

Sei $K = \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}$ und $\mathcal{V} = K^3$.

$$\mathcal{U} = \big\langle (1,1,1), (1,-1,1) \big\rangle \qquad \mathcal{W} = \big\langle (1,2,0), (1,1,-1) \big\rangle$$

d. h. $\dim \mathcal{U} = 2$ und $\dim \mathcal{W} = 2$, $\dim \mathcal{U} \cap \mathcal{W} + \dim \mathcal{U} + \mathcal{W} = 1 + 3 = 4$
Bestimme nun mit dem Zassenhaus Algorithmus eine Basis von $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ und von $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & | & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & | & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Daraus folgt : eine Basis von $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ ist $\big((1,1,1), (0,1,0), (0,0,1)\big)$, d. h. $\mathcal{U} + \mathcal{W} = K^3$, eine Basis von $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ ist: $\big((1,0,1)\big)$.

Beispiel V.3: Anwendung des Zassenhaus-Algorithmus

Beweis

1. $(B_1, \ldots, B_k)$ ist linear unabhängig und $\mathcal{V}$ ist endlich erzeugt. Daher kann man $(B_1, \ldots, B_k)$ zu einer Basis ergänzen und 3. anwenden.

2. Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear mit $B_i\varphi = Y_i$ und $X \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \; X = a_1 B_1 + \cdots + a_k B_k \qquad \text{für geeignete } a_i \in K \\ &\Rightarrow X\varphi = a_1 \underbrace{(B_1\varphi)}_{Y_1} + \cdots + a_k \underbrace{(B_k\varphi)}_{Y_k} \end{aligned}$$

   d. h. $X\varphi$ ist bereits festgelegt durch die Bilder Y_i der B_i, d. h. φ ist eindeutig.

3. Sei $X \in \mathcal{V}$, dann existieren $a_1 \ldots a_k \in K$ mit

$$X = a_1 B_1 + \cdots + a_k B_k$$

   Definiere nun φ durch:

$$\begin{aligned} X\varphi &= a_1(B_1\varphi) + \cdots + a_k(B_k\varphi) \\ &= a_1 Y_1 + \cdots + a_k Y_k \end{aligned}$$

   Daraus folgt, daß φ wohldefiniert ist. (Die Darstellung als $X = \sum a_i B_i$ ist eindeutig.) Zeige nun φ ist linear:

- Sei $X' \in \mathcal{V}$ und $a'_1 \dots a'_k \in K$ mit

$$\begin{aligned} X' &= \sum_{i=1}^{k} a'_i B_i \\ (X+X')\varphi &= \big((a_1+a'_1)B_1 + \dots + (a_k+a'_k)B_k\big)\varphi \\ &= (a_1+a'_1)Y_1 + \dots + (a_k+a'_k)Y_k \\ &= (a_1Y_1 + \dots + a_kY_k) + (a'_1Y_1 + \dots + a'_kY_k) \\ &= X\varphi + X'\varphi \end{aligned}$$

- Sei $a \in K$:

$$\begin{aligned} (aX)\varphi &= (aa_1B_1 + \dots + aa_kB_k)\varphi \\ &= aa_1Y_1 + \dots + aa_kY_k \\ &= a(a_1Y_1 + \dots + a_kY_k) \\ &= a(X\varphi) \end{aligned}$$

Daraus folgt die Existenz der Abbildung. Die Eindeutigkeit folgt aus 2.

V.12 Definition Matrix einer Abbildung

1. Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ eine lineare Abbildung, $\mathfrak{B} = (B_1, \dots, B_m)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und $\mathfrak{C} = (C_1, \dots, C_n)$ sei eine Basis von $\mathcal{W}$. Weiterhin sei φ definiert durch die Bilder der Basisvektoren:

$$B_i\varphi = a_{i1}C_1 + \dots + a_{in}C_n \qquad \text{mit} \qquad a_{ij} \in K \qquad \text{für} \qquad i = 1 \dots m$$

   Die a_{ij} sind eindeutig, da $\mathfrak{C}$ eine Basis von $\mathcal{W}$ ist.
   Dann heißt:

$${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

   die Matrix von φ bezüglich der Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Die Matrix besteht aus den Koeffiziententupeln (a_{ij}) der Bilder der B_i bezüglich der C_j

2. Sei $X \in K^{m \times n}$ und $(a_1, \dots, a_m) \in K^{1 \times m} = K^m$. Dann ist

$$(a_1, \dots, a_m)X := a_1X_{1\_} + a_2X_{2\_} + \dots + a_mX_{m\_} \qquad \in K^n$$

V.13 Erinnerung zum Isomorphismus

Sei $\mathfrak{B} = (B_1, \dots, B_m)$ eine Basis von $\mathcal{V}$, dann ist

$$\kappa_{\mathfrak{B}} : \mathcal{V} \to K^m : X = a_1B_1 + \dots + a_mB_m \mapsto (a_1, \dots, a_m) = X_{\mathfrak{B}}$$

ein Isomorphismus.

Sei $\mathfrak{S}$ die Standardbasis von K^4 und φ eine Abbildung $\varphi : K^4 \to K^4$ mit folgender Matix:

$$_{\mathfrak{S}}\varphi_{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei nun $X = (1, 2, 3, 4) \in K^4$ dann kann man $X\varphi$ wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} X\varphi &= (1, 2, 3, 4) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \Big(1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0, \\ &\quad 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2, \\ &\quad 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0, \\ &\quad 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1\Big) \\ &= (1, 10, 3, 3) \end{aligned}$$

Beispiel V.4: Matrix einer Abbildung

V.14 Satz (Matrix einer linearen Abbildung)

1. Sei $X \in K^{m \times n}$. Dann ist die Abbildung

$$\widetilde{X} : K^m \to K^n : (a_1, \ldots, a_m) \mapsto (a_1, \ldots, a_m) \cdot X$$

   eine lineare Abbildung.

2. Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ K-Vektorräume der Dimension m und n mit den Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ eine lineare Abbildung. Dann ist das folgende Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\kappa_{\mathfrak{B}}"'] & \mathcal{W} \arrow[d, "\kappa_{\mathfrak{C}}"] \\ K^m \arrow[r, "_{\mathfrak{B}}\widetilde{\varphi}_{\mathfrak{C}}"'] & K^n \end{tikzcd}$$

   d. h. $\varphi\kappa_{\mathfrak{C}} = \kappa_{\mathfrak{B}}\,{}_{\mathfrak{B}}\widetilde{\varphi}_{\mathfrak{C}}$, oder $X_{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} = (X\varphi)_{\mathfrak{C}}$

Beweis

1. Seien $V = (V_1, \dots, V_m)$, und $W = (W_1, \dots, W_m) \in K^m$, $a, b \in K$

$$\begin{aligned}
(aV + bW)\widetilde{X} &= \underbrace{(aV + bW) \cdot X}_{\text{Matrixprodukt}} \\
&= (aV_1 + bW_1, \dots, aV_m + bW_m)X \\
&= (aV_1 + bW_1)X_{1_} + \dots + (aV_m + bW_m)X_{m_} \\
&= a(V_1X_{1_} + \dots + V_mX_{m_}) + b(W_1X_{1_} + \dots + W_mX_{m_}) \\
&= a \cdot \underbrace{V \cdot X}_{\text{Matrixprodukt}} + b \cdot \underbrace{W \cdot X}_{\text{Matrixprodukt}} \\
&= a(V\widetilde{X}) + b(W\widetilde{X})
\end{aligned}$$

   Also ist $\widetilde{X}$ linear. $\checkmark$

2. Sei $X \in \mathcal{V}$. Zeige: $X_{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} = (X\varphi)_{\mathfrak{C}}$
   Sei also $X = a_1B_1 + \dots + a_mB_m$, d. h. $X_{\mathfrak{B}} = (a_1, \dots, a_m)$. Da φ linear ist, gilt:

$$\begin{aligned}
X\varphi &= a_1(B_1\varphi) + \dots + a_m(B_m\varphi) \\
&= a_1(a_{11}C_1 + \dots + a_{1n}C_n) + \dots + a_m(a_{m1}C_1 + \dots + a_{mn}C_n)
\end{aligned}$$

   Wir erhalten

$$(X\varphi)_{\mathfrak{C}} = (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = X_{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}}$$

q.e.d.

V.15 Bemerkung (Vektorraum der Abbildungen)

Sei $\mathcal{W}$ ein K-Vektorraum, V eine Menge. Dann ist $\mathcal{W}^V = \{\varphi \mid \varphi : V \to \mathcal{W}\}$ wieder ein K-Vektorraum mit

$$\begin{aligned}
\varphi + \psi : V \to \mathcal{W} : v \mapsto v\varphi + v\psi \qquad & (\varphi, \psi \in \mathcal{W}^V) \\
a \cdot \varphi : V \to \mathcal{W} : v \mapsto a \cdot (v\varphi) \qquad & (a \in K)
\end{aligned}$$

Ist V sogar ein K-Vektorraum, so ist

$$\mathrm{Hom}_K(V, \mathcal{W}) := \{\varphi : V \to \mathcal{W} \mid \varphi \text{ ist linear }\} \le \mathcal{W}^V$$

V.16 Satz (Isomorphismus zwischen Matrix und Abbildung)

Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ K-Vektorräume der Dimension m und n mit den Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Dann gilt:

$$\mathrm{mat} : \mathrm{Hom}_K(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \to K^{m \times n} : \varphi \mapsto {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}}$$

ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen. Insbesondere

$$\dim \mathrm{Hom}_K(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \dim \mathcal{V} \cdot \dim \mathcal{W} = m \cdot n$$

1. Sei $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler K-Vektorraum. Die Identitätsabbildung

$$\mathrm{id} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : X \mapsto X$$

hat folgende Matrix:

$$_{\mathfrak{B}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

I_n heißt die $n \times n$ Einheitsmatrix.

2. Sei $\Pi : \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \to \mathcal{V} : (v, w) \mapsto v$. Weiterhin sei $\mathfrak{B} = (B_1, \dots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und $\mathfrak{C} = (C_1, \dots, C_m)$ eine Basis von $\mathcal{W}$.
$\Rightarrow \mathfrak{B}\mathfrak{C} = \big((B_1, 0), \dots, (B_n, 0), (0, C_1), \dots, (0, C_m)\big)$ ist eine Basis von $\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}$.

$$_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}}\Pi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ & \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & & \dots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

3. Sei $\mathcal{V} = K^m$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{S}_m = \big(\underbrace{\underbrace{(1, 0, \dots, 0)}_{m}, (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)}_{m}\big)$ ist die Standardbasis von $\mathcal{V}$. Weiterhin sei $\mathcal{W} = K^n$ und $\mathfrak{C} = \mathfrak{S}_n$. $A \in K^{m \times n}$ definiert die Abbildung

$$\widetilde{A} : K^m \to K^n : x \mapsto x \cdot A$$

Dann ist die Matrix der Abbildung $\widetilde{A}$:

$$_{\mathfrak{B}}\widetilde{A}_{\mathfrak{C}} = A$$

Beispiel V.5: Matrizen linearer Abbildungen

Beweis

- Die Abbildung mat ist wohldefiniert, da die Matrix wohldefiniert ist.
- Zu zeigen ist, daß mat linear ist:
  Seien $\varphi, \psi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear. Zeige nun
  $${}_{\mathfrak{B}}(a \cdot \varphi + \psi)_{\mathfrak{C}} = a({}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}}) + {}_{\mathfrak{B}}\psi_{\mathfrak{C}}$$
  Dazu betrachte die i-te Zeile B_i der Matrix:
  $$\begin{aligned}\big(B_i(a \cdot \varphi + \psi)\big)_{\mathfrak{C}} &= (a \cdot B_i\varphi + B_i\psi)_{\mathfrak{C}} \\ &= a(B_i\varphi)_{\mathfrak{C}} + (B_i\psi)_{\mathfrak{C}} \qquad \surd\end{aligned}$$
- Zeige nun daß mat injektiv ist:
  Dazu sei $\varphi \in \operatorname{Ker} \operatorname{mat}$, d. h.
  $${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} = 0\text{–Matrix}$$
  d. h. $(B_i\varphi)_{\mathfrak{C}} = (0, \dots, 0)$, d. h. $B_i\varphi = 0$ für alle i, also ist φ die 0–Abbildung. Somit ist $\operatorname{Ker} \operatorname{mat} = \{0\text{-Abbildung}\}$, d. h. mat ist injektiv. $\surd$
- Zeige mat ist surjektiv:
  Satz V.14 zeigt, daß jede Matrix $X \in K^{m\times n}$ als Matrix einer linearen Abbildung $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ aufgefaßt werden kann. Sei $X \in K^{m\times n}$, gesucht ist nun $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ mit ${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} = X$
  Setze $\varphi = \kappa_{\mathfrak{B}} \widetilde{X} (\kappa_{\mathfrak{C}}^{-1})$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\kappa_{\mathfrak{B}}"'] & \mathcal{W} \arrow[d, "\kappa_{\mathfrak{C}}"] \\ K^m \arrow[r, "\widetilde{X}"'] & K^n \end{tikzcd}$$

q.e.d.

V.17 Definition Matrixprodukt

Seien $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times o}$. Dann ist das *Matrixprodukt* $C = A \cdot B \in K^{m\times o}$ definiert durch
$$C_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \dots + A_{in}B_{nj}$$
(d. h. $C_{i\_} = A_{i1}B_{1\_} + \dots + A_{in}B_{n\_}$)
Also $C_{i\_} = A_{i\_}B$, ebenso $C_{\_j} = AB_{\_j}$.

V.18 Satz (Komposition linearer Abbildungen)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit der Basis $\mathfrak{B}$ und der Dimension m, $\mathcal{W}$ sei ein K-Vektorraum von der Dimension n mit der Basis $\mathfrak{C}$ und $\mathcal{X}$ sei ein K-Vektorraum mit der Basis $\mathfrak{D}$ und $\dim \mathcal{X} = o$. Weiter seien $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ und $\psi : \mathcal{W} \to \mathcal{X}$ K-lineare Abbildungen.
Dann ist $\varphi\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{X}$ ebenfalls K-linear und es gilt:
$${}_{\mathfrak{B}}(\varphi\psi)_{\mathfrak{D}} = {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} \cdot {}_{\mathfrak{C}}\psi_{\mathfrak{D}}$$
d. h. die Hintereinanderausführung linearer Abbildungen ist gleich dem Produkt der zugehörigen Matrizen. Dabei muß man auf die zugehörigen Basen aufpassen.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}}_{2\times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}}_{3\times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 12 & 30 \end{pmatrix}}_{2\times 2}$$

Beispiel V.6: Matrixprodukt

Beweis

- Zeige: die Hintereinanderausführung $\varphi\psi$ ist linear.
  Dazu sei $X, Y \in \mathcal{V}$ und $a \in K$:

$$\begin{aligned} (aX+Y)\varphi\psi &= \big((aX+Y)\varphi\big)\psi \qquad \text{(nach der Definition der Komposition)} \\ &= \big(a(X\varphi)+Y\varphi\big)\psi \qquad (\varphi \text{ linear}) \\ &= a\big((X\varphi)\psi\big)+(Y\varphi)\psi \qquad (\psi \text{ linear}) \\ &= a(X\varphi\psi)+Y\varphi\psi \qquad \surd \end{aligned}$$

- Zeige: Die Matrix der Hinterinanderausführung ist gleich dem Produkt der Matrizen.
  Dazu sei $\mathfrak{B} = (B_1, \dots, B_m)$. Betrachte nun die i-te Zeile von ${}_{\mathfrak{B}}(\varphi\psi)_{\mathfrak{D}}$:

$$\begin{aligned} &= \big(B_i(\varphi\psi)\big)_{\mathfrak{D}} \qquad \text{(nach Defintion der Matrix)} \\ &= \big((B_i\varphi)\psi\big)_{\mathfrak{D}} \qquad \text{(nach Definition Komposition)} \\ &= (B_i\varphi)_{\mathfrak{C}} \cdot {}_{\mathfrak{C}}\psi_{\mathfrak{D}} \qquad \text{(nach Satz V.14)} \\ &= (i\text{-te Zeile von } {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}}) \cdot {}_{\mathfrak{C}}\psi_{\mathfrak{D}} \qquad \text{(nach Satz V.14)} \\ &= i\text{-te Zeile von } {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} \cdot {}_{\mathfrak{C}}\psi_{\mathfrak{D}} \qquad \text{(nach Definition des Matrixproduktes)} \qquad \surd \end{aligned}$$

q.e.d.

V.19 Bemerkung (Grundlage zum Assoziativgesetz)

Seien M, N, O, P Mengen, $\varphi : M \to N$, $\psi : N \to O$ und $\sigma : O \to P$ drei beliebige Abbildungen. Es gilt:

$$(\varphi\psi)\sigma = \varphi(\psi\sigma)$$

Beweis

Sei $m \in M$ beliebig.

$$\begin{aligned} m\big((\varphi\psi)\sigma\big) &= \big(m(\varphi\psi)\big)\sigma \qquad \text{(Definition Komposition)} \\ &= \big((m\varphi)\psi\big)\sigma \qquad \text{(Definition Komposition)} \\ &= (m\varphi)(\psi\sigma) \qquad \text{(Definition Komposition)} \\ &= m\big(\varphi(\psi\sigma)\big) \end{aligned}$$

q.e.d.

V.20 Folgerung (Assoziativität der Matrizenmultiplikation)

Matrizenmultiplikation ist assoziativ, d. h. für $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times o}$ und $C \in K^{o \times p}$ gilt:

$$(AB)C = A(BC)$$

Beweis

Fasse A, B und C als Matrizen geeigneter linearer Abbildungen $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ und $\widetilde{C}$ auf und wende die Bemerkung V.19 an:

$$\widetilde{A}(\widetilde{B}\widetilde{C}) = (\widetilde{A}\widetilde{B})\widetilde{C}$$

Jetzt kann man nach Satz V.16 Matrizen nehmen.

q.e.d.

Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ K-Vektorräume der Dimension n mit den Basen B und C. Außerdem sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ ein Isomorphismus. (Daraus folgt, daß auch $\varphi^{-1} : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ linear ist.) Dann gilt:

$$\begin{aligned} \underbrace{{}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} \cdot {}_{\mathfrak{C}}\varphi^{-1}{}_{\mathfrak{B}}}_{Matrixprodukt} &= \underbrace{{}_{\mathfrak{B}}(\varphi\varphi^{-1})_{\mathfrak{B}}}_{Komposition} \\ &= {}_{\mathfrak{B}}(id_{\mathcal{V}})_{\mathfrak{B}} \\ &= I_n \end{aligned}$$

I_n ist die Einheitsmatrix. Umgekehrt:

$$\begin{aligned} {}_{\mathfrak{C}}\varphi^{-1}{}_{\mathfrak{B}} \cdot {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} &= {}_{\mathfrak{C}}(\varphi^{-1}\varphi)_{\mathfrak{C}} \\ &= {}_{\mathfrak{C}}(id_{\mathcal{W}})_{\mathfrak{C}} \\ &= I_n \end{aligned}$$

Beispiel V.7: Matrixprodukt mit der inversen Matrix

V.21 Definition invertierbar

Eine Matrix $A \in K^{n \times n}$ heißt *invertierbar*, falls eine Matrix $B \in K^{n \times n}$ existiert mit $A \cdot B = I_n$. Das Ziel ist nun zu zeigen, daß B eindeutig durch A bestimmt ist.

V.22 Vorbemerkung

Seien M, N endliche Mengen mit gleichvielen Elementen und $\varphi : M \to N$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. φ ist injektiv
2. φ ist surjektiv
3. φ ist bijektiv

V.23 Satz (bijektive Abbildungen auf endlich erzeugte Vektorräume)

Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ endlich erzeugte K-Vektorräume von gleicher Dimension. $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ sei eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. φ ist injektiv
2. φ ist surjektiv
3. φ ist bijektiv

Beweis

1. $\Rightarrow$ 2. Sei φ injektiv. Zeige φ ist surjektiv. Nach dem Homomorphiesatz V.4 gilt:

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Bild} \varphi &= \dim \mathcal{V} - \dim \underbrace{\operatorname{Ker} \varphi}_{=\{0\}} \\ &= \dim \mathcal{V} \\ &= \dim \mathcal{W}\end{aligned}$$

   d. h. $\operatorname{Bild} \varphi = \mathcal{W}$, also ist φ surjektiv. $\surd$

2. $\Rightarrow$ 3. Sei φ surjektiv. Zeige φ ist bijektiv, also zeige φ ist injektiv:

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi = \underbrace{\dim \mathcal{V}}_{=\dim \mathcal{W}} - \underbrace{\dim \operatorname{Bild} \varphi}_{=\dim \mathcal{W}} = 0$$

   $\Rightarrow$ φ ist injektiv. $\surd$

3. $\Rightarrow$ 1. Sei φ bijektiv, d. h. φ ist nach Definition auch injektiv.

q.e.d.

V.24 Satz (Inverserve Matrix)

1. Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ endlich erzeugte K-Vektorräume der selben Dimension. Die lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ habe die rechtsinverse Abbildung $\psi : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$, d. h. $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$.
   Dann ist ψ eindeutig bestimmt und es gilt: $\psi\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{W}}$
2. Die Matrix $A \in K^{n\times n}$ sei invertierbar. Dann ist $B \in K^{n\times n}$ mit $A \cdot B = I_n$ eindeutig bestimmt und es gilt: $B \cdot A = I_n$
   Bezeichnung: $B = A^{-1}$ heißt die zu A *inverse Matrix*.

Beweis

1. $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{V}} \Rightarrow \varphi$ ist injektiv
   $\Rightarrow$ (nach Satz V.23) φ ist bijektiv, da $\mathcal{V}$ endlich erzeugt ist und $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ die gleiche Dimension haben, d. h. $\psi\varphi = \mathrm{id}_{\mathcal{W}}$ und ψ ist eindeutig durch die Gleichung $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$ festgelegt.
2. Wende 1. an:
   A ist die Matrix von $\widetilde{A}$ bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{S}$, d. h.:

$$A = {}_{\mathfrak{S}}\widetilde{A}_{\mathfrak{S}}$$

   $\Rightarrow$ Behauptung

q.e.d.

V.25 Bemerkung (Inverse der Identitätsabbildung)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit den Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, sei $\mathrm{id} = \mathrm{id}_\mathcal{V}$.
Dann sind ${}_\mathfrak{B}\mathrm{id}_\mathfrak{C}$ und ${}_\mathfrak{C}\mathrm{id}_\mathfrak{B}$ invers zueinander.

Beweis

$$\begin{aligned} {}_\mathfrak{B}\mathrm{id}_\mathfrak{C} \cdot {}_\mathfrak{C}\mathrm{id}_\mathfrak{B} &= {}_\mathfrak{B}(\mathrm{id}\ \mathrm{id})_\mathfrak{B} \;=\; {}_\mathfrak{B}(\mathrm{id})_\mathfrak{B} \;=\; I_n \\ {}_\mathfrak{C}\mathrm{id}_\mathfrak{B} \cdot {}_\mathfrak{B}\mathrm{id}_\mathfrak{C} &= {}_\mathfrak{C}(\mathrm{id}\ \mathrm{id})_\mathfrak{C} \;=\; {}_\mathfrak{C}(\mathrm{id})_\mathfrak{C} \;=\; I_n \end{aligned}$$

q.e.d.

V.26 Basistransformationssatz

Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ endlich erzeugte K-Vektorräume mit der Dimension m und n. $\mathcal{V}$ habe die Basen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$, $\mathcal{W}$ habe die Basen $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$. Dann gilt:

$$\underbrace{{}_{\mathfrak{B}_2}\varphi_{\mathfrak{C}_2}}_{m\times n} = \underbrace{{}_{\mathfrak{B}_2}\mathrm{id}_{\mathcal{V}\,\mathfrak{B}_1}}_{m\times m} \cdot \underbrace{{}_{\mathfrak{B}_1}\varphi_{\mathfrak{C}_1}}_{m\times n} \cdot \underbrace{{}_{\mathfrak{C}_1}\mathrm{id}_{\mathcal{W}\,\mathfrak{C}_2}}_{n\times n}$$

Beweis

$$\begin{aligned} {}_{\mathfrak{B}_2}\mathrm{id}_{\mathcal{V}\,\mathfrak{B}_1} \cdot {}_{\mathfrak{B}_1}\varphi_{\mathfrak{C}_1} \cdot {}_{\mathfrak{C}_1}\mathrm{id}_{\mathcal{W}\,\mathfrak{C}_2} &= {}_{\mathfrak{B}_2}\mathrm{id}_\mathcal{V}\,\varphi\,\mathrm{id}_{\mathcal{W}\,\mathfrak{C}_2} \\ &= {}_{\mathfrak{B}_2}\varphi_{\mathfrak{C}_2} \end{aligned}$$

q.e.d.

V.27 Folgerung

Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linear und $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ Basen von $\mathcal{V}$.

$$\Rightarrow {}_{\mathfrak{B}_2}\varphi_{\mathfrak{B}_2} = A^{-1} \cdot {}_{\mathfrak{B}_1}\varphi_{\mathfrak{B}_1} \cdot A \quad \text{wobei} \quad A = {}_{\mathfrak{B}_1}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}_2} \qquad \Rightarrow A^{-1} = {}_{\mathfrak{B}_2}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}_1}$$

Beweis

Folgt aus dem Basistransformationssatz V.26, hier ist $\mathcal{W} = \mathcal{V}$, und aus der Bemerkung V.25

q.e.d.

Rechnerische Bestimmung der inversen Matrix

Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ ist invertierbar (d. h. A gehört zu einem Isomorphismus), falls eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ existiert mit $A \cdot B = I_n$ ($\Rightarrow B \cdot A = I_n$).
Sei nun eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ gegeben. Gesucht $B \in K^{n\times n}$ mit:

$$A \cdot B = I_n \tag{V.1}$$

Sei $B = (B_{\_1}, \dots, B_{\_n})$ $\qquad$ ($B_{\_i} = i$-te Spalte von B)

$$A \cdot B = A \cdot (B_{\_1}, \dots, B_{\_n}) = (A \cdot B_{\_1}, \dots, A \cdot B_{\_n})$$

Es gibt somit n verschiedene Gleichungssysteme mit je n unbekannten der Form:

$$(V.1_i) \qquad A \cdot B_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i\text{-te Spalte}$$

(Beachte: Die Matrix A ist gegeben und die Spalte B_i ist gesucht.) Die Gleichung (V.1) ist also genau dann gelöst, wenn *alle* Gleichungen $(V.1_1) \dots (V.1_n)$ gelöst sind. Dabei sind die (V.1_i) linearen Gleichungsysteme mit „denselben linken Seiten", d. h.

$$M_l(V.1_i) = A$$

1. Ist $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar?

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{Add}_{1,2}(1)]{} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, also existiert keine Inverse.

2. Bestimme A^{-1} zu $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (der Körper ist hier noch beliebig).

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel V.8: Berechnung der inversen Matrix

Berechnung von Rechtsinversen

Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ endlich erzeugte K-Vektorräume mit den Dimensionen n und m und den Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ eine lineare Abbildung. (D. h. ${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} \in K^{n \times m}$)
Gesucht ist eine Abbildung $\psi : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ mit $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$, d. h.

$${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} \cdot {}_{\mathfrak{C}}\psi_{\mathfrak{B}} = {}_{\mathfrak{B}}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}})_{\mathfrak{B}} = I_n$$

Man erhält also ein Gleichungssystem mit n verschiedenen rechten Seiten und m Unbekannten für jede einzelne rechte Seite.

Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ eine lineare Abbildung, $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ K-Vektorräume, $\dim \mathcal{V} = 2$, $\dim \mathcal{W} = 3$ und

$$_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Gesucht $\psi : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ mit $\varphi\psi = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$. (Wegen $\dim \mathcal{W} > \dim \mathcal{V}$ ist φ nicht surjektiv, d. h. es kann keine Linksinverse geben.)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$_{\mathfrak{C}}\psi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -a & -b \\ a & b \end{pmatrix} \qquad (a, b \in K)$$

Beispiel V.9: Berechnung einer Rechtsinversen

V.28 Definition Transponierte Matrix

Sei $A = (A_{ij}) \in K^{m \times n}$ eine Matrix. (D. h. A kann als die Abbildung:

$$A : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to K : (i, j) \mapsto A_{ij}$$

aufgefaßt werden.) Entsprechend dazu heißt

$$A^{tr} : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, m\} \to K : (i, j) \mapsto A_{ji}$$

die *Transponierte Matrix* von A. ($A^{tr} \in K^{n \times M}$)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{2 \times 4} \;\Rightarrow\; A^{tr} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Beispiel V.10: Transponierte Matrix

V.29 Bemerkung (Transponieren eines Matrixproduktes)

Sind $A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{n \times o}$, so gilt:

$$(A \cdot B)^{tr} = B^{tr} \cdot A^{tr}$$

Beweis

$$\begin{aligned}(A\cdot B)^{tr}_{ij} &= (A\cdot B)_{ji}\\ &= A_{j1}\cdot B_{1i}+\dots+A_{jn}\cdot B_{ni}\\ &= B_{1i}\cdot A_{j1}+\dots+B_{ni}\cdot A_{jn}\\ &= (B^{tr})_{i1}\cdot (A^{tr})_{1j}+\dots+(B^{tr})_{in}\cdot (A^{tr})_{nj}\\ &= (B^{tr}\cdot A^{tr})_{ij}\end{aligned}$$

q.e.d.

Anwendung: Berechnung von Linksinversen: Linksinvers(A) = $\big(\text{Rechtsinvers}(A^{tr})\big)^{tr}$

Sei $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$. Gesucht eine zugehörige linksinverse Matrix.

$A^{tr} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$ hat die Matrix $\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-a & -b\\ -a & -b\\ a & b\end{pmatrix}$ als Rechtsinverse (Siehe Beispiel V.9).

$\Rightarrow A$ hat die Matrix $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-a & -a & a\\ -b & -b & b\end{pmatrix}$ als Linksinverse.

Beispiel V.11: Berechnung einer Linksinversen

V.30 Bemerkung (Spaltenkonvention)

1. Sei $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit der Basis $\mathfrak{B} = (X_1, \dots, X_n)$. Die Abbildung

$$^{\mathfrak{B}}\sigma : \mathcal{V} \to K^{n\times 1} : X = a_1X_1 + \dots + a_nX_n \mapsto \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} =:^{\mathfrak{B}} X$$

   ist ein Isomorphismus. $\left({}^{\mathfrak{B}}X := (X_{\mathfrak{B}})^{tr}\right)$

2. Ist $X \in K^{m\times n}$, so ist

$$\underset{\sim}{X} : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1} : \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix} \mapsto \underbrace{X\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}}_{a_1X_{\_1}+\dots+a_nX_{\_n}}$$

   eine lineare Abbildung.

3. Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ eine lineare Abbildung, wobei $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ K-Vektorräume mit den Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sind. Folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "{}^{\mathfrak{B}}\sigma"'] & \mathcal{W} \arrow[d, "{}^{\mathfrak{C}}\sigma"] \\
K^{n\times 1} \arrow[r, "\underset{\sim}{X}"'] & K^{m\times 1}
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $X = {}^{\mathfrak{C}}\varphi^{\mathfrak{B}} := ({}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{C}})^{tr}$, d. h. ${}^{\mathfrak{C}}\big(\varphi(V)\big) = {}^{\mathfrak{C}}\varphi^{\mathfrak{B}} \cdot {}^{\mathfrak{B}}V$ für alle $V \in \mathcal{V}$.

4. Die Hintereinanderausführung zweier linearer Abbildungen: $\mathcal{V} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{W} \xrightarrow{\psi} \mathcal{X}$ ist linear. Seien $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ die zugehörigen Basen. Dann gilt:

$$\psi \circ \varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{X} : V \mapsto \psi\big(\varphi(V)\big)$$

ist die Hintereinanderausführung, erst φ dann ψ anwenden und es folgt:

$${}^{\mathfrak{D}}(\psi \circ \varphi)^{\mathfrak{B}} = {}^{\mathfrak{D}}\varphi^{\mathfrak{C}} \cdot {}^{\mathfrak{C}}\varphi^{\mathfrak{B}}$$

V.30.1 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Sei $A \in K^{m\times n}$ und $B \in K^{m\times 1}$ und (IV.2) ein lineares Gleichungssystem mit $M(*) = (A|B)$. Interpretiere A als Matrix einer linearen Abbildung:

$$\varphi = \underset{\sim}{A} : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1} : \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix}$$

(A ist Matrix von $\underset{\sim}{A}$ bezüglich der Standardbasen $\mathfrak{S}_n$ und $\mathfrak{S}_m$ von $K^{n\times 1}$ und $K^{m\times 1}$ in der Spaltenkonvention.) Das Gleichungssystem bedeutet: „Suche alle Urbilder B unter der Abbildung $\underset{\sim}{A}$“. Daraus ergibt sich folgende Gleichung:

$$\varphi \underbrace{\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}}_{\text{gesucht}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \qquad (= B)$$

Der Spaltenvektor X wird unter der Abbildung φ auf das Produkt mit der Matrix A abgebildet, d. h.

$$A \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Man erhält also folgendes Gleichungssystem, wobei $A = (a_{ji}) \in K^{m\times n}$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}X_1 & + & \cdots & + & a_{1n}X_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{m1}X_1 & + & \cdots & + & a_{mn}X_n & = & b_m \end{array} \tag{V.2}$$

Es gilt: $L_0 =$ Lösungsraum des Homogenen Gleichungssystems $= \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\underset{\sim}{A}$. Das Gleichungssystem (V.2) ist lösbar genau dann, wenn $\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \operatorname{Bild}\underset{\sim}{A}$. Ist das Gleichungssystem lösbar, dann ist die Lösungsmenge das volle Urbild von B unter der Abbildung $\underset{\sim}{A}$. Die Lösungsmenge ist dann eine Restklasse nach $\operatorname{Ker}\underset{\sim}{A}$. Nach dem Homomorphisatz gilt:
$K^{n\times 1}/\underbrace{L_0}_{=\operatorname{Ker}\underset{\sim}{A}} \cong \operatorname{Bild}\underset{\sim}{A} =$ Spaltenraum von $A =$ der Raum der möglichen rechten Seiten, so daß (V.2) lösbar ist. $\big(\Rightarrow \dim L_0 = \dim\operatorname{Ker}\varphi = n - \dim\operatorname{Bild}\varphi = n - \operatorname{Rg}(A)\big)$

V.30.2 Interpretation der elementaren Umformungen

Betrachte die Matrizen der elementaren Umformungen (Alle Matrizen seien $m \times m$-Matrizen):

$$\mathrm{Per}_{ij} = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & 1 &&& 1 &&& \\
&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 &&&& 0 & 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} &&& \uparrow &&&& \uparrow &&& \\ &&& i &&&& j &&& \end{matrix} &
\end{array}$$

$$\mathrm{Add}_{ij}(a) = \begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
1 &&& \\
& \ddots & a & \\
&& \ddots & \\
&&& 1
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \end{matrix} \\
\begin{matrix} && \uparrow & \\ && j & \end{matrix} &
\end{array}$$

$$\mathrm{Mult}_i(a) = \begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&& 0 & \\
&& 1 &&&& \\
&&& a &&& \\
&&&& 1 && \\
& 0 &&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad (a \neq 0)$$

Sei $A \cdot X = B$ die gegebene Gleichung. Bezeichne die Matrix einer beliebigen elementaren Umformung mit E_i $(i \in \mathbb{N})$. Durch die elementaren Umformungen ändert sich die Lösungsmenge nicht, da die E_i invertierbar sind. Wendet man eine elementare Umformung an, so ergibt sich:

$$(E_1 \cdot A) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = E_1 \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \qquad \text{mit } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

wobei $\big(A = (A_{\_1}, \dots, A_{\_n}) \Rightarrow E_1 A = (E_1 A_{\_1}, \dots, E_1 A_{\_n})\big)$ Der Gaußsche Algorithmus bedeutet also: „ersetze obiges Gleichungssystem durch

$$(E_l \dots E_2 E_1 A) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = E_l \dots E_2 E_1 \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

bis Stufengestalt erreicht worden ist.“
Anwendung auf die Berechnung der Inversen:

$$(A|I_n) \to (E_1 A | E_1 I_n) \to \dots \to (\underbrace{E_l \dots E_1 A}_{I_n} \,|\, \underbrace{E_l \dots E_1}_{A^{-1}} I_n)$$

V.31 Satz

Seien $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ und $\mathcal{X}$ K-Vektorräume.

1. Sei $\varphi : \mathcal{W} \to \mathcal{X}$ eine beliebige feste lineare Abbildung.

$$\Rightarrow \overline{\varphi} : \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \to Hom(\mathcal{V}, \mathcal{X}) : \alpha \mapsto \alpha\varphi \qquad \text{ist linear}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha\varphi"'] & \mathcal{W} \arrow[d, "\varphi"] \\ & \chi \end{tikzcd}$$

(Matrixversion: Sei $P \in K^{m \times o}$ fest, dann ist die Abbildung $K^{n \times m} \to K^{n \times o} : X \mapsto XP$ linear)

2. Ist die Abbildung $\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear, so ist auch ψ: $\mathrm{Hom}(\mathcal{W}, \mathcal{X}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{X}) : \beta \mapsto \psi\beta$ linear:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\psi\beta"'] & \mathcal{W} \arrow[d, "\beta"] \\ & \chi \end{tikzcd}$$

Seien $a_1, \dots, a_k \in K$ fest und

$$\mathcal{V} = \left\{(X_i) \quad i \in \mathbb{N} \mid X_n = a_1 X_{n-1} + a_2 X_{n-2} + \dots + a_k X_{n-k} \;\; \forall\, n > k\right\} \Rightarrow \mathcal{V} \leq K^{\mathbb{N}}$$

mit $\dim \mathcal{V} = k$. Eine Basis von $\mathcal{V}$ ist:

$$B = \Big((1, 0, \dots, 0, \underbrace{a_k}_{k+1\text{-te Stelle}}, \dots), (0, 1, 0, \dots, 0, a_{k-1}, \dots), \dots, (0, \dots, 0, 1, a_1, \dots)\Big)$$

Betrachte nun die Abbildung $\gamma : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : (X_1, X_2, X_3, \dots) \mapsto (X_2, X_3, \dots)$. Die zugehörige Matrix ist

$$_{\mathfrak{B}}\gamma_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_k \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a_{k-1} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & a_2 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & a_1 \end{pmatrix} \qquad \in K^{k \times k}$$

(z. B. $B_k \gamma = B_{k-1} + a_1 B_k$)
Sei nun $k = 2$ und $K = \mathbb{R}$, $a_1 = 1$ und $a_2 = 1$. Dies ergibt die Matrix $_{\mathfrak{B}}\gamma_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (Dies entspricht der Fibonacci-Folge: $X_n := X_{n-1} + X_{n-2}$)

Interpretation: ein Kaninchen-Problem
X_n ist die Anzahl der neugeborenen Paare von Kaninchen in der Generation n. Dazu gibt es die Regel, daß jedes Paar zu einem Zeitpunkt n geboren wird und jeweils ein neues Paar zum Zeitpunkt $n+1$ und $n+2$ wirft, und anschlieend stirbt.
Das Problem ist, auszurechnen, wieviel Kaninchenpaare zum Zeitpunkt i existieren. Dazu muß man entweder alle Folgenglieder ausrechnen, oder die Abbildung γ $i-1$-mal auf das erste Zahlenpaar anwenden,d. h.

$$(X_{i+1}, X_{i+2}) = (X_1, X_2)_B \gamma^i{}_B = (X_1, X_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^i$$

Betrachte nun die Abbildung γ bezüglich der Basis C mit

$$_{\mathfrak{C}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad {}_C\gamma^i{}_C = \begin{pmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^i & 0 \\ 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i \end{pmatrix}$$

D. h. die Fibonacci-Folge $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ steigt wie $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^i$.

Beispiel V.12: Die Fibonacci-Folge

1. Es gilt $K[X] \leq K\big[[X]\big]$. Dann folgt: $K[X]_{gr\leq n} = \{a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n | a_i \in K\} = \langle 1, x, x^2, \ldots, x^n\rangle$ hat die Dimension $n+1$. Betrachte nun die Abbildung

$$\begin{aligned} {}' : K[X] \to K[X] : (a_0 + \cdots + a_nX^n) &\mapsto (a_1 + 2a_2X + \cdots + na_nX^{n-1}) \\ \text{(bzw.)} \quad (a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) &\mapsto (a_1, 2a_2, \ldots, na_n, 0, \ldots) \end{aligned}$$

Ist $n \in \mathbb{N}$ und $a \in K$, so ist $n \cdot a := \underbrace{a + \cdots + a}_{n}$, und $(-n)\cdot a = -(n \cdot a)$. Die Abbildung $'$ ist linear.

2. $D_n : K[X]_{gr\leq n} \to K[X]_{gr\leq n-1} : p = p(X) \mapsto p' = p'(X)$ (siehe 1.) ist eine lineare Abbildung, da die Abbildung $'$ linear ist. Die zugehörigen Basen sind $\mathfrak{B}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ und $\mathfrak{B}_{n-1} = (1, X, \ldots, X^{n-1})$.

$$\Rightarrow \qquad {}_{\mathfrak{B}_n}(D_n)_{\mathfrak{B}_{n-1}} = \begin{pmatrix} 0 & & \ldots & & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & & 0 & n \end{pmatrix} \in K^{(n+1)\times n}$$

3. $m_x : K[X] \to K[X] : a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mapsto a_0X + a_1X^2 + \cdots + a_nX^{n+1}$ bzw. $(a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots) \mapsto (0, a_0, \ldots, a_n, 0, \ldots)$
Schreibweise : $pm_x =: p \cdot X$
Betrachte nun die Einschränkung von m_x auf die Polynome vom Grad $\leq n$:

$$m_{x,n} : K[X]_{gr\leq n} \to K[X]_{gr\leq n+1} : p(X) \mapsto p(X)\cdot X \text{ bzw. } p \mapsto p \cdot X$$

Die zugehörigen Basen sind $\mathfrak{B}_n = (1, \ldots, X^n)$ und $\mathfrak{B}_{n+1} = (1, \ldots, X^{n+1})$. Daraus ergibt sich folgende Matrix:

$${}_{\mathfrak{B}_n}(m_{x,n})_{\mathfrak{B}_{n+1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & \ldots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \in K^{(n+1)\times(n+2)}$$

Beispiel V.13: lineare Abbildungen und ihre Matrizen

Beweis

1. - $\overline{\varphi}$ ist wohldefiniert, denn $\alpha\varphi$ ist linear.
   - Zeige $\overline{\varphi}$ ist linear:
     Dazu seien α_1, $\alpha_2 \in \operatorname{Hom}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, weiter sei $V \in \mathcal{V}$ beliebig.

$$\begin{aligned}
V\big((\alpha_1+\alpha_2)\overline{\varphi}\big) &= V\big((\alpha_1+\alpha_2)\varphi\big) && \text{(nach Defnition von } \overline{\varphi})\\
&= \big(V(\alpha_1+\alpha_2)\big)\varphi\\
&= (V\alpha_1 + V\alpha_2)\varphi && \text{(nach Definition von } \varphi)\\
&= (V\alpha_1\varphi + V\alpha_2\varphi) && \text{(da } \varphi \text{ linear)}\\
&= V(\alpha_1\varphi + \alpha_2\varphi)\\
&= V(\alpha_1\overline{\varphi} + \alpha_2\overline{\varphi}) && \text{(nach Defnition von } \overline{\varphi})\\
&\Rightarrow \overline{\varphi} \text{ ist additiv}
\end{aligned}$$

   - Sei $a \in K$:

$$\begin{aligned}
V\big((a\alpha_1)\overline{\varphi}\big) &= V\big((a\alpha_1)\varphi\big) && \text{(nach Definition von } \overline{\varphi})\\
&= \big(V(a\alpha_1)\big)\varphi\\
&= a(V\alpha_1\varphi) && \text{(da } \alpha_1 \text{ linear, } \varphi \text{ linear)}\\
&= V\big(a(\alpha_1\varphi)\big)\\
&= V\big(a(\alpha_1\overline{\varphi})\big) && \text{(nach Definition } \overline{\varphi}) \quad \surd
\end{aligned}$$

2. Analog zu 1.

q.e.d.

V.32 Bemerkung (Der kommutative Ring der Polynome)

$K[X]$ bildet einen kommutativen Ring: Seien $p, q \in K[X]$ und $q = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ mit $a_i \in K$. Die Multiplikation wird definiert durch:

$$p \cdot q = pq := p\underbrace{\left(a_0 \cdot \mathrm{id}_{K[X]} + a_1 m_x + \cdots + a_n m_x^n\right)}_{m_q : K[X] \to K[X] \text{ linear}}$$

Die Multiplikation in $K[X]$ ist kommutativ, denn seien $p = a_0 + a_1X + \cdots + a_kX^k$ und $q = b_0 + b_1X + \cdots + b_lX^l$

$$\Rightarrow \qquad pq = c_0 + \cdots + c_iX^i + \cdots + c_{k+l}X^{k+l}$$

mit $c_i = a_0b_i + a_1b_{i-1} + \cdots + a_{i-1}b_1 + a_ib_0$ für $i = 1 \ldots k+l$. Da K kommutativ ist, folgt, daß die Multiplikation in $K[X]$ kommutativ ist.
Distributivgesetzt:
Seien $p, q, r \in K[X]$. Dann gilt:

- $(p+q) \cdot r = p \cdot r + q \cdot r$ denn m_r ist linear
- $r \cdot (p+q) = r \cdot p + r \cdot q$ folgt dann aus der Kommutativität.

Assoziativität der Multiplikation:
Seien $p, q, r \in K[X]$. Dann gilt: $(p \cdot q) \cdot r = p \cdot (q \cdot r)$ (d. h.: $p \cdot q = pm_q$) $\Rightarrow (pm_q)m_r = pm_{qr}$. Also genügt es zu zeigen, daß $m_qm_r = m_{qr}$

Zeige nun, daß $K[X]$ ein kommutativer Ring ist:

Wie wir in der Bemerkung V.32 gesehen haben, genügt es, zu zeigen, daß $m_q m_r = m_{qr}$. Dazu betrachte zunächst einen Spezialfall, sei $q = x^i$ und $r = x^j$:

$$m_{x^i} \cdot m_{x^j} = m_{x^{i+j}}$$

Dies ist klar, denn

$$X^k(m_{x^i} m_{x^j}) = X^{(k+i)+j} = X^{k+(i+j)} = X^k m_{x^{i+j}}$$

Dies genügt um die Behauptung zu zeigen, da m_q und $m_r \in \langle \underbrace{m_1}_{=\mathrm{id}_{K[X]}}, m_x, m_{x^2}, \dots \rangle$
(Beachte: $(1, X, X^2, \dots)$ bildet ein Erzeugendensystem von $K[X]$.)
Sei z. B. $m_q = a_0 m_1 + a_1 m_x + \dots + a_n (m_x)^n$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad m_q m_r &= (a_0 m_1 + a_1 m_x + \dots + a_n (m_x)^n) m_r \\ &= (\text{nach V.31 und } m_r \text{ linear }) a_0 (m_1 m_r) + \dots + a_n \big((m_x)^n m_r\big) \end{aligned}$$

Verfahre ebenso mit m_r und wende Satz V.31 an. Dann folgt, da $m_{x^i} m_{x^j} = m_{x^{i+j}}$:

$$m_q m_r = m_{qr}$$

Insgesamt: $K[X]$ ist ein kommutativer Ring mit 1.

V.33 Definition Grad, $pK[X]$

Es sei $p = p(X) = a_0 + a_1 X + \dots a_n X^n \in K[X]$.

1. Ist $a_n \neq 0$, so heißt n der *Grad* von p(X). (D. h. für p = 0 ist kein Grad definiert!)
2. $pK[X] := \{pq | q \in K[X]\} \qquad (= K[X] m_p = \mathrm{Bild}\, m_p)$

V.34 Bemerkung (Grad)

1. Seien $p, q \in K[X]$, mit $p \neq 0 \neq q$, so gilt:
$$\mathrm{Grad}(p \cdot q) = \mathrm{Grad}(p) + \mathrm{Grad}(q)$$
2. Es gilt $pK[X] \leq K[X] \quad \big(\Leftrightarrow \mathrm{Bild}\, m_p \leq K[x]\big)$
$\big($**Beachte:** falls $p \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Ker}\, m_p = \{0\}$
Beweis: Sei $q \in \mathrm{Ker}\, m_p \Rightarrow q \cdot p = 0$ wäre $q \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Grad}\, qp = \mathrm{Grad}\, q + \mathrm{Grad}\, p \neq 0\big)$
Insbesondere folgt: $pK[X] \cong K[X]$ als K-Vektorräume, denn eine „Basis" von $pK[X]$ ist $(p, p \cdot X, p \cdot X^2, \dots)$ und von $K[X]$: $(1, X, X^2, \dots)$.

V.35 Satz

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum und $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linear. Sei $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ mit $\mathcal{W}\varphi \subseteq \mathcal{W}$

1. $\overline{\varphi} : \mathcal{V}/\mathcal{W} \to \mathcal{V}/\mathcal{W} : X + \mathcal{W} \mapsto X\varphi + \mathcal{W}$ ist eine wohldefinierte lineare Abbildung.
2. Sei $\mathcal{W}$ jetzt endlich erzeugt und $\mathfrak{B}_\mathcal{W} = (X_1, \dots, X_k)$ eine Basis von $\mathcal{W}$ und eine Basis von $\mathcal{V}$ sei $\mathfrak{B}_\mathcal{V} = (X_1, \dots, X_k, X_{k+1}, \dots, X_n)$, dann ist $\mathfrak{B}_{\mathcal{V}/\mathcal{W}} = (X_{k+1} + \mathcal{W}, \dots, X_n + \mathcal{W})$ eine Basis von $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ und
$${}_{\mathfrak{B}_\mathcal{V}}\varphi_{\mathfrak{B}_\mathcal{V}} = \left(\begin{array}{c|c} {}_{\mathfrak{B}_\mathcal{W}}(\varphi|_\mathcal{W})_{\mathfrak{B}_\mathcal{W}} & 0 \\ \hline * & {}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{V}/\mathcal{W}}}\overline{\varphi}_{\mathfrak{B}_{\mathcal{V}/\mathcal{W}}} \end{array} \right)$$

Beweis

1. Zeige: $\overline{\varphi}$ ist wohldefiniert:
   Dazu seien $X+\mathcal{W}$, $X'+\mathcal{W} \in \mathcal{V}/\mathcal{W}$ mit $X+\mathcal{W} = X'+\mathcal{W}$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow X - X' \in \mathcal{W}\\ &\Rightarrow_{[\text{da } \mathcal{W}\varphi \subseteq \mathcal{W}]} \quad (X-X')\varphi \in \mathcal{W}\\ &\Rightarrow_{[\text{da } \varphi \text{ linear}]} \quad X\varphi - X'\varphi \in \mathcal{W}\\ &\Rightarrow X\varphi + \mathcal{W} = X'\varphi + \mathcal{W} \qquad \checkmark\end{aligned}$$

   $\overline{\varphi}$ ist linear, da φ linear ist.

q.e.d.

V.36 Satz (Restklasse der Polynome)

Sei $p(X) = p = a_0 + a_1X + a_1X^2 + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in K[X]$ vom Grad n.

1. $\dim(K[X]/pK[X]) = \text{Grad}(p)$
   $\mathfrak{B} = (\overline{1}, \overline{X}, \ldots, \overline{X^{n-1}})$ ist eine Basis von $K[X]/pK[X]$, wobei $\overline{q} = q + pK[X]$ (Restklasse von q nach $pK[X]$).
2. Die Abbildung $m_x : K[X] \to K[X] : q \mapsto X \cdot q = q \cdot X$ erfüllt $\big(pK[X]\big)m_x \subseteq pK[X]$ und die zugehörige Matrix ist:

$$_{\mathfrak{B}}\overline{m_x}_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & & & \ddots & 0\\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1\\ -a_0 & -a_1 & \ldots & \ldots & -a_{n-1}\end{pmatrix}$$

Beweis

1. In $K[X]/pK[X]$ ist $\overline{p} = 0$, also:

$$\overline{p} = a_0\overline{1} + a_1\overline{X} + \cdots + a_{n-1}\overline{X^{n-1}} + \overline{X^n}$$

d. h.

$$\overline{X^n} = -a_0\overline{1} - a_1\overline{X} - \cdots - a_{n-1}\overline{X^{n-1}} \tag{V.3}$$

Die Idee ist, „$p(X)$ als Algorithmus aufzufassen“:

- Ersetze $\overline{X^n}$ durch (V.3)
- $\overline{Xp} = 0 \to$ Ersetze $\overline{X^{n+1}}$ durch $-a_0\overline{X} - a_1\overline{X^2} - \cdots - a_{n-1}\overline{X^n}$
- $\overline{X^2p} = 0 \to$ Ersetze $\overline{X^{n+2}}$ durch $-a_0\overline{X^2} - a_1\overline{X^3} - \cdots - a_{n-1}\overline{X^{n+1}}$
- **Behauptung:** $K[X]/pK[X] = \langle \overline{1}, \overline{X}, \ldots, \overline{X^{n-1}}\rangle$
  Beweis durch Induktion:
  Zeige: $\overline{x^i} \in \langle \overline{1}, \overline{X}, \ldots, \overline{X^{n-1}}\rangle$
  Induktionsanfang: $(i = 0, \ldots, n-1)$

$$X^0 = \overline{1}, \;\; X^1 = \overline{X} \;\; \ldots \;\; X^{n-1} = \overline{X^{n-1}} \qquad \checkmark$$

Induktionsannahme: $\overline{X^i} \in \langle \overline{1}, \overline{X}, \dots, \overline{X^{n-1}} \rangle$
Induktionsschluß: $i \to i+1$

$$\begin{aligned} \overline{X^i} &= c_0\overline{1} + c_1\overline{X} + \cdots + c_{n-1}\overline{X^{n-1}} && \text{nach I.V.} \\ \Rightarrow \overline{X^{i+1}} &= c_0\overline{X} + c_1\overline{X^2} + \cdots + c_{n-1}\overline{X^n} && \text{nach Algorithmus:} \\ &= c_0\overline{X} + c_1\overline{X^2} + \dots c_{n-1}(-a_0\overline{1} - a_1\overline{X} - \cdots - a_{n-1}\overline{X}^{n-1}) \\ &\in \langle \overline{1}, \overline{X}, \dots, \overline{X^{n-1}} \rangle \end{aligned}$$

Also $\overline{1}, \dots, \overline{X^{n-1}}$ erzeugen $K[X]/pK[X]$.

- Zeige: $(\overline{1}, \dots, \overline{X^{n-1}})$ sind linear unabhängig.
  Dazu seien $c_0, \dots, c_{n-1} \in K$ mit

$$\begin{aligned} & c_0\overline{1} + \cdots + c_{n-1}\overline{X^{n-1}} = 0 && \text{d. h.} \\ & \underbrace{c_0 1 + \cdots + c_{n-1}X^{n-1}}_{\text{0 oder vom Grad } < n} \in \underbrace{K[X] \cdot p}_{\text{0 oder vom Grad } \geq n} \\ \Rightarrow \quad & c_0 1 + \cdots + c_{n-1}X^{n-1} = 0 && \text{, d. h.} \\ & c_0 = c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0 \end{aligned}$$

2. Klar ist: $K[X] \cdot p \cdot X \subseteq K[X] \cdot p \quad \checkmark$

$$\underbrace{\begin{array}{rcl} \overline{1} & \mapsto & \overline{X} \\ \overline{X} & \mapsto & \overline{X^2} \\ & \vdots & \\ \overline{X^{n-2}} & \mapsto & \overline{X^{n-1}} \\ \overline{X^{n-1}} & \mapsto & \overline{X^n} = -a_0\overline{1} - \cdots - a_{n-1}\overline{X^{n-1}} \end{array}}$$
$$\Downarrow$$
$$_{\mathfrak{B}}\overline{m_x}_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

V.37 Definition Polynomfunktion

Sei K ein Körper. Eine Abbildung $f : K \to K$ heißt *Polynomfunktion*, falls ein $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $a_0, \dots, a_n \in K$ existieren mit

$$f : \alpha \mapsto a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n \qquad \text{für alle } \alpha \in K$$

Die Menge aller Polynomfunktionen ist $\mathrm{PolFu}(K) = \{f \in K^K | f \text{ ist Polynomfunktion }\}$.
(Beachte: $\mathrm{PolFu}(K) \leq K^K$)

V.38 Satz (Abbildung von $K[X]$ in die Polynomfunktionen)

1. Die Abbildung $\varepsilon : K[X] \to \mathrm{PolFu}(K) : p = p(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n \mapsto f_p$ mit $f_p : \alpha \mapsto a_0 + a_1\alpha + \cdots + a_n\alpha^n$ ist surjektiv und linear.

2. ε ist ein Isomorphismus, genau dann, wenn K unendlich ist.

1. Sei $p = X^n$:

$$_B\overline{m_x}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

2. Sei $p = X^n - 1$:

$$_B\overline{m_x}_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & & \dots & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \dots & & 0 \end{pmatrix}$$

Beispiel V.14: Matrizen in Polynomrestklasen

Beweis

1. Zeige: ε ist linear. Dazu seien $p, q \in K[X]$ und $a \in K$ mit:

$$\begin{aligned} p &= b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n \\ q &= c_0 + b_1 X + \dots + c_m X^m \\ &\text{Sei oBdA.} \quad n \leq m \\ \Rightarrow \qquad (ap+q)\varepsilon &= f_{ap+q} \\ &= ab_0 + c_0 + (ab_1 + c_1)X + \dots + (ab_n + c_n)X^n + \\ &\quad c_{n+1}X^{n+1} + \dots + c_m X^m \\ &= a(b_0 + b_1 X + \dots + b_n X^n) + c_0 + c_1 X + \dots + c_m X^m \\ &= a(f_p) + f_q \\ &= a(p\varepsilon) + q\varepsilon \qquad \surd \end{aligned}$$

   Die Surjektivität von ε folgt aus der Definition von PolFu(K), das ja als Bild ε definiert war.

2. Sei ε ein Isomorphismus. Klar ist, daß $K[X]$ als K-Vektorraum nicht endlich erzeugt ist $\Rightarrow$ PolFu(K) ist auch nicht endlich erzeugt, da ε ein Isomorphismus ist. Aber da PolFu$(K) \leq K^K$ $\Rightarrow K^K$ ist nicht endlich erzeugt $\Rightarrow K$ ist unendlich.
   Umgekehrt: Sei K unendlich. Zeige ε ist injektiv, d. h. $\operatorname{Ker}\varepsilon = \{0\}$.
   Ist $p \in \operatorname{Ker}\varepsilon$, d. h. $p \in K[X]$ mit $f_p = 0$, also $f_p(a) = 0$ für alle $a \in K$
   $\Rightarrow p(x) = (x - a_1) \cdot p_1(x)$ für ein festes $a_1 \in K$. Sei nun $a_2 \in K$, $a_2 \neq a_1$
   $\Rightarrow p_1(x) = (x - a_2) \cdot p_2(x)$ etc.
   Wäre $p(x) \neq 0$, dann zeigt obiger Schluß, daß $\operatorname{Grad}\big(p(x)\big) \geq n$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies ist aber ein Wiederspruch, $\Rightarrow p = 0$
   $\Rightarrow \operatorname{Ker}\varepsilon = \{0\}$

q.e.d.

V.39 Lemma (Nullstellen einer Polynomfunktion)

Sei $a \in K$. $f_p(a) = 0 \Leftrightarrow$ es existiert ein $r \in K[X]$ mit $p = (X - a) \cdot r$

Beweis

„$\Leftarrow$“

$$f_p(a) = (a - a) \cdot f_r(a) = 0 \qquad \surd$$

„$\Rightarrow$“ Teilen mit Rest:
$K[X]/(x-a)K[X]$ ist eindimensional: $\overline{p} = b \cdot \overline{1}$ für ein $b \in K$, d. h.

$$\begin{aligned} p &= b \cdot 1 + (x-a) \cdot r \qquad \text{für ein } r \in K[X] \\ 0 = f_p(a) &= b + 0 \cdot f_r(a) = b \\ &\Rightarrow b = 0 \\ \text{d. h. } p &= (x-a) \cdot r \end{aligned}$$

Allgemein gilt:

$$f_p(a) = b$$

$\mathbb{C} = \mathbb{R}[X]/(x^2+1)\mathbb{R}[X]$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Basis ist: $(\overline{1}, \overline{x})$
Seien $p, q \in \mathbb{R}[X]$, und entsprechend $\overline{p}, \overline{q} \in \mathbb{R}[X]/(x^2+1)\mathbb{R}[X]$, dann ist:

$$\overline{p} \cdot \overline{q} = \overline{p \cdot q} = \overline{pm_q}$$

denn $m_q : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X] : s \mapsto s \cdot q$. Klar ist: $\big((x^2+1)\mathbb{R}[X]\big)\, m_q \subseteq (x^2+1)\mathbb{R}[X]$
$\overline{x}^2 = \overline{x^2} = -1$ Setzte nun $i := \overline{x}$, also ist $i^2 = -1$.

Beispiel V.15: Der Körper der komplexen Zahlen

Kapitel VI

Der Dualraum

Zur Erinnerung:

1. Sei K ein Körper, $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ seien K-Vektorräume, dann bildet

$$\mathrm{Hom}_K(\mathcal{V}, \mathcal{W}) = \{\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W} | \varphi \text{ ist linear}\}$$

   einen K-Vektorraum der Dimension $\dim \mathcal{V} \cdot \dim \mathcal{W}$.

2. Der Körper K ist auch ein K-Vektorraum mit der Dimension 1.

VI.1 Definition Dualraum

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum, dann heißt $\mathcal{V}^* := \mathrm{Hom}_K(\mathcal{V}, K)$ der *Dualraum* von $\mathcal{V}$. Die Elemente von $\mathcal{V}^*$ heißen *Linearformen* oder *lineare Funktionale*.

VI.2 Satz

Die Abbildung $\widetilde{\ } : K^{n\times 1} \to (K^{1\times n})^* : A \mapsto \widetilde{A}$ ist ein K-Vektorraum-Isomorphismus (siehe Beispiel VI.1).

Beweis

Dieser Satz ist ein Spezialfall von Satz V.16. Hier ist $\mathcal{W} = K$, $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \cong K^{n\times 1}$

1. $\widetilde{\ }$ bildet $K^{n\times 1}$ in $(K^{1\times n})^* = \mathrm{Hom}_K(K^{1\times n}, K)$ ab, da $\widetilde{A}$ eine Linearform ist. (siehe auch Beispiel VI.1).

2. $\widetilde{\ }$ ist linear, denn

   - $(\widetilde{A + B}) = \widetilde{A} + \widetilde{B}$ für $A, B \in K^{n\times 1}$
   - $\widetilde{(aA)} = a(\widetilde{A})$ für $A \in K^{n\times 1}$, $a \in K$

3. $\mathrm{Ker}\widetilde{\ } = \{0\}$ d. h. $\widetilde{\ }$ ist injektiv, denn sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$ mit $\widetilde{A} = 0$, daraus folgt, daß $X\widetilde{A} = 0$ für alle $X \in K^{1\times n}$. Wähle nun sukzessive

$$X \in \big\{\underbrace{(1, 0, \ldots, 0)}_{\Rightarrow a_1 = 0}, \underbrace{(0, 1, 0, \ldots, 0)}_{\Rightarrow a_2 = 0}, \ldots, \underbrace{(0, \ldots, 0, 1)}_{\Rightarrow a_n = 0}\big\}$$

1. Sei $\mathcal{V} = K^I$ für eine Menge I. Für $i \in I$ sei
$$\hat{\imath} : \mathcal{V} \to K : f \mapsto if$$
ist ein lineares Funktional.
Beweis: Zeige $\hat{\imath}$ ist linear. Dazu seien $f, g \in K^I$ und $a \in K$:
$$\begin{aligned}(af+g)\hat{\imath} &= i(af+g)\\ &= a(if) + ig \qquad \text{(nach Definition von +)}\\ &= a(f\hat{\imath}) + g\hat{\imath}\\ &\Rightarrow \hat{\imath} \text{ ist linear} \qquad \surd\end{aligned}$$
Zum Beispiel sei $I = \mathbb{N}$, $\mathcal{V} = \big\{\underbrace{(a_1, a_2, a_3, \dots)}_{i \mapsto a_i} | a_i \in K\big\}$
$$\hat{\imath} : (a_1, a_2, a_3, \dots) \mapsto a_i$$
2. Sei $\mathcal{V} = K[X]$, $a \in K$:
   - $\varepsilon_a : K[X] \to K : p \mapsto p(a)$ ist ein lineares Funktional, d. h. $\in \mathcal{V}^*$.
   - $\varepsilon'_a : K[X] \to K : p \mapsto p'(a)$ ist auch $\in \mathcal{V}^*$.
   - Sei $K = \mathbb{R}$: Die Abbildung $\mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} : p \mapsto \int_{-1}^{1} f_p(u)\, du$ ist auch $\in \mathbb{R}[X]^*$, wobei f_p die von p induzierte Polynomfunktion ist.
3. Sei $\mathcal{V} = K^n = K^{1\times n}$, und sei $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$, dann ist
$$\begin{aligned}\widetilde{A} : \mathcal{V} \to K : X = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto x \cdot A\\ &= (x_1, \dots, x_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}\\ &= x_1a_1 + \dots + x_na_n \quad \in K^{1\times 1} \equiv K\end{aligned}$$
$\Rightarrow \widetilde{A}$ ist ein lineares Funktional.

Beispiel VI.1: lineare Funktionale

4. Bild$^{\sim} = (K^{1\times n})^*$, d. h. $^{\sim}$ ist surjektiv. Sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_K(K^{1\times n}, K), \mathfrak{S}_n$ die Standardbasis von $K^{1\times n}$, sowie (1) die Standardbasis von K.

$$\varphi = \widetilde{{}_{\mathfrak{S}_n}\varphi_{(1)}}$$

${}_{\mathfrak{S}_n}\varphi_{(1)}$ ist die Matrix von φ bezüglich der Basen $\mathfrak{S}_n$ und (1), d. h. es ist eine $n \times 1$ Matrix, also ${}_{\mathfrak{S}_n}\varphi_{(1)} \in K^{n\times 1}$

q.e.d.

VI.3 Definition Duale Basis

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit der Basis $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$. $\mathfrak{B}^* := (\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ heißt die zu $\mathfrak{B}$ *duale Basis*, wobei $\beta_i^* \in \mathcal{V}^*$ mit:

$$\beta_i^* : B_j \mapsto \delta_{ij} := \begin{cases} 0, \text{ falls } i \neq j \\ 1, \text{ falls } i = j \end{cases}$$

(δ_{ij} heißt auch das *Kronecker-Symbol.*)
Die Duale Basis gibt die Koordinaten eines Vektors X bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$ an:

$$X = \underbrace{(X\beta_1^*)}_{\in K} B_1 + \cdots + \underbrace{(X\beta_n^*)}_{\in K} B_n$$

VI.4 Satz (Basis des Dualraums)

$\mathfrak{B}^*$ ist eine Basis von $\mathcal{V}^*$.

Beweis

1. $\beta_i^* \in \mathcal{V}^*$ ist wohldefiniert, denn jede lineare Abbildung ist eindeutig durch die Bilder der Basisvektoren festgelegt.

2. Die β_i^* bilden ein Erzeugendensystem von $\mathcal{V}^*$:

   $$\mathcal{V}^* = \langle \beta_1^*, \ldots, \beta_n^* \rangle$$

   Beweis: Eine lineare Abbildung $\varphi \in \mathcal{V}^*$ ist durch die Bilder der Basisvektoren festgelegt. Sei also $a_i = B_i\varphi$ für $a_i \in K$

   $$\Rightarrow \varphi = a_1\beta_1^* + \cdots + a_n\beta_n^*$$

3. Das System $(\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ ist linear unabhängig.
   Beweis: Seien $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $a_1\beta_1^* + \cdots + a_n\beta_n^* =$ 0-Abbildung. Durch Anwenden dieser Abbildung auf die Basisvektoren B_i ergibt sich: $\Rightarrow a_i = 0 \quad i = 1 \ldots n$ d. h. $(\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ ist linear unabhängig.

q.e.d.

VI.5 Satz (Koordinatenspalte/-zeile)

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum der Dimension n mit der Basis $\mathfrak{B}$.

$$\kappa_{\mathfrak{B}} : \mathcal{V} \to K^{1\times n} : V \mapsto V_{\mathfrak{B}} \qquad \text{(Koordinatenzeile)}$$
$$^{\mathfrak{B}^*}\sigma : \mathcal{V}^* \to K^{n\times 1} : \varphi \mapsto^{\mathfrak{B}^*} \varphi \qquad \text{(Koordinatenspalte)}$$

1. Für $V \in \mathcal{V}$ und $\varphi \in \mathcal{V}^*$ gilt:
$$V\varphi = (V_{\mathfrak{B}}) \cdot ({}^{\mathfrak{B}^*}\varphi)$$

2. Für $\varphi \in \mathcal{V}^*$ gilt:
$$\underbrace{{}^{\mathfrak{B}^*}\varphi}_{\text{Sapltenkonvention für Koordinaten}} = \underbrace{{}_{\mathfrak{B}}\varphi_{(1)}}_{\text{Zeilenkonvention für Matrizen}}$$

Beweis

Da 1. die gleiche Aussage hat wie 2., also 1. $\Leftrightarrow$ 2., braucht nur 2. gezeigt zu werden. Dazu betrachte die beiden Isomorphismen:
$$\begin{aligned} {}^{\mathfrak{B}^*}\sigma &: \mathcal{V}^* \to K^{n\times 1} : \varphi \mapsto {}^{\mathfrak{B}^*}\varphi \\ \mathrm{mat} &: \mathcal{V}^* \to K^{n\times 1} : \varphi \to {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{(1)} \end{aligned}$$

$\mathfrak{B}^* = (\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ ist die zu $\mathfrak{B}$ duale Basis. Daraus folgt:
$$\beta_i^{*\,\mathfrak{B}^*}\sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{pmatrix} B_1\beta_i^* \\ \vdots \\ B_n\beta_i^* \end{pmatrix} = \beta_i \,\mathrm{mat}$$

Also sind die linearen Abbildungen gleich auf der Basis $\mathfrak{B}^*$, also
$${}^{\mathfrak{B}^*}\sigma = \mathrm{mat}$$

q.e.d.

Falls man die Zeilenkonvention für $\mathcal{V}$ wählt, so wähle die Spaltenkonvention für den Dualraum $\mathcal{V}^*$ und umgekehrt.

VI.6 Satz (Basistransformation)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit den Basen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$. Es gilt:
$$\text{(Spaltenkonvention:)} \qquad {}^{\mathfrak{B}_1^*}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}^*})^{\mathfrak{B}_2^*} = {}_{\mathfrak{B}_1}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}})_{\mathfrak{B}_2} \qquad \text{(:Zeilenkonvention)}$$

Beweis

Sei $\mathfrak{B}_1^* = (\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$, sowie $A = {}_{\mathfrak{B}_1}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}_2}$. Interpretiere $A \cdot A^{-1} = I_n\big(= (\delta_{ij})\big)$ wie folgt:
„Die i-te Zeile der Matrix A, das ist die Koordinatenzeile des i-ten Vektors aus $\mathfrak{B}_1$ bezüglich $\mathfrak{B}_2$, wird mit der j-ten Spalten von A^{-1} multipliziert.“
$$i\begin{pmatrix} \\ \text{———} \\ \\ \end{pmatrix} \cdot \overset{j}{\begin{pmatrix} & | & \\ & | & \\ & | & \end{pmatrix}} = (\delta_{ij})$$

Also ist A^{-1} die Matrix von β_j^* bezüglich $\mathfrak{B}_2^*$, d. h. $A^{-1} = {}^{\mathfrak{B}_2^*}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}^*})^{\mathfrak{B}_1^*}$ Die j-te Spalte der Matrix ist die Koordinatenspalte von β_j^* bezüglich $\mathfrak{B}_2^*$, d. h.

$$A = {}^{\mathfrak{B}_1^*}(\mathrm{id}_{\mathcal{V}^*})^{\mathfrak{B}_2^*}$$

q.e.d.

Zur Dualität von Teilräumen

VI.7 Definition Annulator

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum.

1. Ist $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, so heißt $\mathcal{U}^\perp := \{\varphi \in \mathcal{V}^* \mid u\varphi = 0 \text{ für alle } u \in \mathcal{U}\}$ der *Annulator von* $\mathcal{U}$.
2. Ist $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}^*$, so heißt ${}^\perp\mathcal{X} := \{V \in \mathcal{V} \mid V\varphi = 0 \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{X}\}$ der *Annulator von* $\mathcal{X}$.

VI.8 Bemerkung (zum Annulator)

Es gilt:

1. $\mathcal{U}^\perp \leq \mathcal{V}^*$ und ${}^\perp\mathcal{X} \leq \mathcal{V}$
2. $\langle\mathcal{U}\rangle^\perp = \mathcal{U}^\perp$ und ${}^\perp\langle\mathcal{X}\rangle = {}^\perp\mathcal{X}$

Beweis

1. Seien φ, $\psi \in \mathcal{U}^\perp$.
   Behauptung: $\varphi + \psi \in \mathcal{U}^\perp$

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{U} &\Rightarrow u\varphi = 0 \qquad \text{und} \qquad u\psi = 0 \\ &\Rightarrow u\varphi + u\psi = u(\varphi + \psi) = 0 \\ &\Rightarrow \varphi + \psi \in \mathcal{U}^\perp \end{aligned}$$

   Der Beweis für ${}^\perp\mathcal{X} \leq \mathcal{V}$ geht analog.

2. Sei $\varphi \in \mathcal{U}^\perp \Leftrightarrow \mathcal{U} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi \Leftrightarrow \langle\mathcal{U}\rangle \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$, d. h.

$$\mathcal{U}^\perp = \langle\mathcal{U}\rangle^\perp$$

   Der Beweis für ${}^\perp\mathcal{X} = \langle\mathcal{X}\rangle$ geht analog.

VI.9 Dualitätssatz

Sei $\mathcal{V}$ endlich erzeugt und $\mathcal{T}(\mathcal{V})$ eine Menge von Teilräumen von $\mathcal{V}$, sowie die Abbildungen

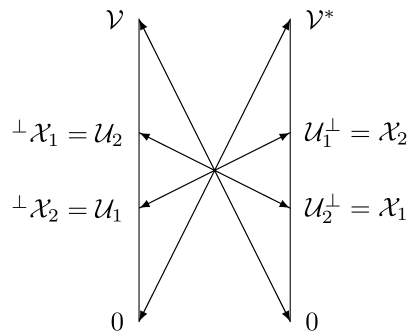
$$\begin{aligned} .^\perp &: \mathcal{T}(\mathcal{V}) \to \mathcal{T}(\mathcal{V}^*) : \mathcal{U} \mapsto \mathcal{U}^\perp \\ {}^\perp. &: \mathcal{T}(\mathcal{V}^*) \to \mathcal{T}(\mathcal{V}) : \mathcal{X} \mapsto {}^\perp\mathcal{X} \end{aligned}$$

wie oben definiert.

1. ${}^\perp(\mathcal{U}^\perp) = \mathcal{U}$
2. $({}^\perp\mathcal{X})^\perp = \mathcal{X}$

3. $\mathcal{U}_1 \leq \mathcal{U}_2 \leq \mathcal{V} \;\Rightarrow\; \mathcal{U}_1^\perp \geq \mathcal{U}_2^\perp$
4. $\mathcal{X}_1 \leq \mathcal{X}_2 \leq \mathcal{V}^* \;\Rightarrow\; {}^\perp\mathcal{X}_1 \geq^\perp \mathcal{X}_2$
5. Insbesondere gilt:
$$\{0\}^\perp = \mathcal{V}^* \qquad {}^\perp\{0\} = \mathcal{V} \qquad \mathcal{V}^\perp = \{0\} \qquad {}^\perp(\mathcal{V}^*) = \{0\}$$
6. $\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{U}^\perp = \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{V}^*$
7. $\dim \mathcal{X} + \dim^\perp \mathcal{X} = \dim \mathcal{V}^* = \dim \mathcal{V}$

D. h. $.^\perp$ und $^\perp.$ sind zwei bijektive, inklusionsumkehrende Abbildungen, welche invers zueinander sind (Galois Korrespondenz).



Beweis

1. Zu zeigen ist: ${}^\perp(\mathcal{U}^\perp) = \mathcal{U}$:
Es ist klar, daß $\mathcal{U} \subseteq^\perp (\mathcal{U}^\perp)$, da $\mathcal{U}^\perp$ aus allen $\varphi \in \mathcal{V}^*$ besteht, die $\mathcal{U}$ auf 0 abbilden. Zeige also nun die Gleichheit. Dazu sei $(B_1, \ldots, B_k)$ eine Basis von $\mathcal{U}$, und $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$, sowie $\mathfrak{B}^* = (\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ die zugehörige duale Basis von $\mathcal{V}^*$.
Behauptung: $(\beta_{k+1}^*, \ldots, \beta_n^*)$ ist eine Basis von $\mathcal{U}^\perp$.
   - Es ist klar, daß sie linear unabhängig sind, da $\mathfrak{B}^*$ eine Basis ist.
   - Sie liegen in $\mathcal{U}^\perp$:
   $$B_i\beta_{k+j}^* = 0 \quad \text{für} \quad i \leq k, j \geq 1 \qquad \Rightarrow \mathcal{U}\beta_{k+j}^* = 0$$
   - Sei $\beta \in \mathcal{U}^\perp$.
   $\Rightarrow$ es existieren $a_1, \ldots, a_n \in K$ mit $\beta = a_1\beta_1^* + \cdots + a_n\beta_n^*$
   $$a_i = B_i\beta$$
   $\overset{\beta\in\mathcal{U}^\perp}{\Longrightarrow} a_1 = \cdots = a_k = 0 \qquad$ d. h. $\beta = a_{k+1}\beta_{k+1}^* + \cdots + a_n\beta_n^*$ also:
   $$\mathcal{U}^\perp \subseteq \langle \beta_{k+1}^*, \ldots, \beta_n^* \rangle \qquad \surd$$
2. Analog zu 1: $(\varphi_1, \ldots, \varphi_l)$ sei eine Basis von $\mathcal{X}$, und $\mathfrak{C} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_l, \ldots, \varphi_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}^*$.
$\Rightarrow$ es existiert eine Basis $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ mit $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}^*$ $\qquad \Rightarrow (B_{l+1}, \ldots, B_n)$ ist eine Basis von ${}^\perp\mathcal{X}$, wie oben. $\qquad \surd$
3. und 4 und direkt daraus folgend 5 sind klar.
6. Aus 1. erhalten wir:
$$\underbrace{\dim \mathcal{U}}_{k} + \underbrace{\dim \mathcal{U}^\perp}_{n-k} = \underbrace{\dim \mathcal{V}}_{n} = \dim \mathcal{V}^* \qquad \surd$$
7. Analog zu oben.

Sei $\mathcal{U} = \big\langle (1,1,1,1) \big\rangle$

$$\mathcal{U}^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \mid (1,1,1,1) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$
$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle := \mathcal{X} \leq \mathcal{V}^*$$
$$^\perp\mathcal{X} = \{V \in \mathcal{V} \mid V\varphi = 0 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in \mathcal{X}\}$$
$$= \{Y := (y_1, \ldots, y_4) \mid Y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad Y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad Y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0\}$$
$$= \big\langle (1,1,1,1) \big\rangle$$

Beispiel VI.2: Annulatoren

Anwendung auf homogene lineare Gleichungssysteme

$$\left.\begin{array}{ccccc} a_{11}X_1 & +\cdots+ & a_{1n}X_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}X_1 & +\cdots+ & a_{mn}X_n & = & 0 \end{array}\right\} \quad \text{mit} \quad (X_1, \ldots, X_n) \in K^{1\times n} \tag{VI.1}$$

Betrachte nun die folgende Abbildung:

$$\delta_i : \mathcal{V} \to K : (X_1, \ldots, X_n) \mapsto a_{i1}X_1 + \cdots + a_{in}X_n$$

Wie man sieht ist $\delta_i \in \mathcal{V}^*$. Das Gleichungssystem (VI.1) hat nun folgende Lösungsmenge:

$$(VI.1): \quad \big\{(X_1, \ldots, X_n) \in K^n \mid (X_1, \ldots, X_n)\delta_i = 0 \quad i = 1, \ldots, m\big\}$$

D. h. $\langle \delta_1, \ldots, \delta_m \rangle \leq \mathcal{V}^*$ gesucht ist nun $^\perp\langle \delta_1, \ldots, \delta_m \rangle \leq V$, der Lösungsraum. Aus VI.9 wissen wir:

$$\dim \underbrace{^\perp\langle \delta_1, \ldots, \delta_m \rangle}_{L_0} + \underbrace{\dim\langle \delta_1, \ldots, \delta_m \rangle}_{\mathrm{Rg}(A)} = \dim K^n = n$$

mit $A := (a_ij)$. Also gibt dies einen neuen Beweis für $\dim L_0 + \mathrm{Rg}(A) = n$.

Transponieren von linearen Abbildungen

VI.10 Definition transponierte Abbildung

Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ endlich erzeugte K-Vektorräume, $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ eine lineare Abbildung.

$$\alpha^{tr} : \mathcal{W}^* \to \mathcal{V}^* : \varphi \to \alpha\varphi$$

heißt die zu α *transponierte Abbildung*.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha\varphi \in \mathcal{V}^*"'] & \mathcal{W} \arrow[d, "\varphi \in \mathcal{W}^*"] \\ & K \end{tikzcd}$$

VI.11 Satz (Matrix und die transponierte Matrix)

Sei die Abbildung $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear.

1. $\alpha^{tr} : \mathcal{W}^* \to \mathcal{V}^*$ ist linear.
2. Seien $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ Basen von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$. Dann gilt:

$$\text{(Spaltenkonvention:)} \qquad {}^{\mathfrak{B}^*}(\alpha^{tr})^{\mathfrak{C}^*} = {}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{C}} \qquad \text{(:Zeilenkonvention)}$$

   (Vergleiche auch Satz VI.6: $\alpha = \text{id.}$)

Falls beidemale dieselbe Konvention benutzt wird, muß die Matrix transponiert werden.

Beweis

1. Dies ist ein Spezialfall von Satz V.31 2.
   Seien $\varphi\psi \in \mathcal{W}^*$, $a \in K$

$$\begin{aligned} \underbrace{\alpha^{tr}(a\varphi + \psi)}_{\text{Abb. links}} = \underbrace{\alpha(a\varphi + \psi)}_{\text{nat. Konv.}} &= \alpha(a\varphi) + \alpha\psi \\ &= a\,\alpha\varphi + \alpha\psi \\ &= a\,\alpha^{tr}(\varphi) + \alpha^{tr}(\psi) \qquad \surd \end{aligned}$$

2. Sei $\mathfrak{B} = (B_1, \dots, B_m)$ eine Basis von $\mathcal{V}$, $\mathfrak{B}^* = (\beta_1^*, \dots, \beta_m^*)$ die entsprechende duale Basis von $\mathcal{V}^*$, $\mathfrak{C} = (C_1, \dots, C_n)$ eine Basis von $\mathcal{W}$ und $\mathfrak{C}^* = (\gamma_1^*, \dots, \gamma_n^*)$ die zugehörige duale Basis von $\mathcal{W}^*$. Dann ist:

$$\begin{aligned} ({}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{C}})_{ij} &= (B_i\alpha)\gamma_j^* \\ &= B_i\left(\alpha^{tr}(\gamma_j^*)\right) \qquad \text{(nach Definition von } \alpha^{tr}) \\ &= \left({}^{\mathfrak{B}^*}(\alpha^{tr})^{\mathfrak{C}^*}\right)_{ij} \qquad \surd \end{aligned}$$

q.e.d.

Beachte: Sei $(B_1, \dots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$, $(\beta_1^*, \dots, \beta_n^*)$ die zugehörige duale Basis von $\mathcal{V}^*$. Für $X \in \mathcal{V}$ gilt:

$$X = (X\beta_1^*)B_1 + \dots + (X\beta_n^*)B_n$$

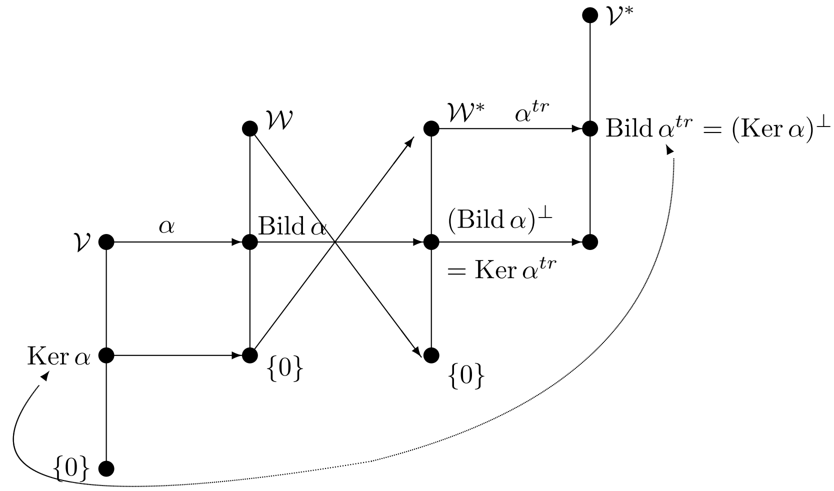
Für $\varphi \in \mathcal{V}^*$ gilt:

$$\varphi = (B_1\varphi)\beta_1^* + \dots + (B_n\varphi)\beta_n^*$$

VI.12 Satz (Kern, Bild der transpoinierten Abbildung)

Seien $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ endlich erzeugte K-Vektorräume, $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ eine lineare Abbildung und $\alpha^{tr} : \mathcal{W}^* \to \mathcal{V}^*$.

1. $(\operatorname{Ker}\alpha)^\perp = \operatorname{Bild}\alpha^{tr} \qquad (\leq \mathcal{V}^*)$
2. $(\operatorname{Bild}\alpha)^\perp = \operatorname{Ker}\alpha^{tr} \qquad (\leq \mathcal{W}^*)$



Beweis

1. **„$\supseteq$“** Sei $\varphi \in \operatorname{Bild}\alpha^{tr}$. Daraus folgt, es existiert ein $\psi \in \mathcal{W}^*$ mit $\varphi = a^{tr}(\psi)$. Für alle $X \in \operatorname{Ker}\alpha$ gilt:

$$X\varphi = X\alpha^{tr}(\psi) = X\alpha\psi = 0\psi = 0$$

$\Rightarrow \ \varphi \in (\operatorname{Ker}\alpha)^\perp$

„$\subseteq$“ Nach dem Dualitätssatz ist diese Aussage äquivalent mit $\operatorname{Ker}\alpha \supseteq^\perp (\operatorname{Bild}\alpha^{tr})$. Sei also $V \in^\perp (\operatorname{Bild}\alpha^{tr}) \Rightarrow V\big(\alpha^{tr}(\psi)\big) = 0 \quad$ für alle $\quad \psi \in \mathcal{W}^*$, d. h. $\underbrace{(V\alpha)}_{\in\mathcal{W}}\psi = 0 \quad$ für alle $\psi \in \mathcal{W}^*$

$\Rightarrow \ V\alpha = 0 \quad \Rightarrow \ V \in \operatorname{Ker}\alpha \qquad \checkmark$

2. **„$\supseteq$“** Zeige: $(\operatorname{Bild}\alpha)^\perp = \operatorname{Ker}\alpha^{tr}$
Sei $\psi \in \operatorname{Ker}\alpha^{tr}$. Dann ist $\alpha^{tr}(\psi) = 0$ also $V\big(\alpha^{tr}(\psi)\big) = 0 \quad$ für alle $\quad V \in \mathcal{V}$
$\Rightarrow \ (V\alpha)\psi = 0 \quad$ für alle $\quad V \in \mathcal{V} \quad \Rightarrow \ \psi \in (\operatorname{Bild}\alpha)^\perp$

„$\subseteq$“ Sei $\psi \in (\operatorname{Bild}\alpha)^\perp$
$\Rightarrow$ für alle $V \in \mathcal{V}$ gilt: $\qquad \underbrace{(V\alpha)\psi}_{V\alpha^{tr}(\psi)} = 0$

$\Rightarrow \ \alpha^{tr}(\psi) = 0 \qquad$ d. h. $\psi \in \operatorname{Ker}\alpha^{tr} \qquad \checkmark$

q.e.d.

VI.13 Folgerung

$$\alpha \quad \text{injektiv} \Leftrightarrow \alpha^{tr} \quad \text{surjektiv}$$
$$\alpha \quad \text{surjektiv} \Leftrightarrow \alpha^{tr} \quad \text{injektiv}$$

Beweis

Folgt sofort aus obigem Satz VI.12

Neuer Beweis für Satz IV.18

Sei $A \in K^{m\times n}$, $\alpha = \widetilde{A} : K^{1\times m} \to K^{1\times n} : V \mapsto VA$
Behauptung: Zeilenrang(A) = Spaltenrang(A)
Beweis:

$$\begin{aligned}\text{Zeilenrang}(A) &= \dim \operatorname{Bild} \alpha \\ &= \dim K^{1\times m} - \dim \operatorname{Ker} \alpha \\ &= \dim(\operatorname{Ker} \alpha)^{\perp} \\ &= \dim \operatorname{Bild} \alpha^{tr} \\ &= \text{Spaltenrang}(A)\end{aligned}$$

$\operatorname{Bild} \alpha$ ist der Zeilenraum von A $\big(= \mathcal{Z}(A)\big)$. $(\operatorname{Bild} \alpha)^{\perp}$ ist der Spaltenraum, der den Zeilenraum annuliert, d. h. wir sprechen über die homogenen linearen Gleichungen, die $\mathcal{Z}(A)$ als Lösung hat.

Kapitel VII

Bilinearformen

1. $K[X] \times K[X] \to K[X] : (p, q) \mapsto pq$ ist eine Abbildung, die sowohl in der ersten, als auch in der zweiten Komponente linear ist.

$$(ap_1 + bp_2)q = ap_1q + bp_2q \qquad a, b \in K \quad p_1, p_2, q \in K[X]$$

2. Seien $\mathcal{V}$, $\mathcal{W}$ und $\mathcal{U}$ K-Vektorräume. Dann ist die Abbildung

$$\mathrm{Hom}_K(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \times \mathrm{Hom}_K(\mathcal{W}, \mathcal{U}) \to \mathrm{Hom}_K(\mathcal{V}, \mathcal{U}) : (\varphi, \psi) \mapsto \varphi\psi$$

in beiden Komponenten linear.

3. In Matrizen:

$$K^{m \times n} \times K^{n \times o} \to K^{m \times o} : (A, B) \mapsto A \cdot B$$

z. B. $A(b_1B_1 + b_2B_2) = b_1AB_1 + b_2AB_2$

Im folgenden behandeln wir nur K-wertige bilineare Abbildungen.

Beispiel VII.1: Bilineare Abbildungen

VII.1 Definition Bilinearform

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum. Dann heißt $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ *bilineare* Abbildung oder *Bilinearform*, falls für alle $a, b \in K \quad V, V', W, W' \in \mathcal{V}$ gilt:

$$\begin{aligned} \Phi(aV + bV', W) &= a\Phi(V, W) + b\Phi(V', W) \qquad \text{und} \\ \Phi(V, aW + bW') &= a\Phi(V, W) + b\Phi(V, W') \end{aligned}$$

VII.2 Bemerkung (Linearität in den Komponenten)

Sei $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ eine Abbildung. Φ ist bilinear $\iff$

1. $\Phi_{,W} : \mathcal{V} \to K : V \mapsto \Phi(V, W)$ ist linear für alle $W \in \mathcal{V}$
2. $\Phi_{W,} : \mathcal{V} \to K : V \mapsto \Phi(W, V)$ ist linear für alle $W \in \mathcal{V}$

d. h. $\Phi_{,W}$, $\Phi_{W,} \in \mathcal{V}^*$ für alle $W \in \mathcal{V}$.

Beweis

Folgt direkt aus der Definition der Bilinearform.

1. Seien $\delta_1, \delta_2 \in \mathcal{V}^*$.

$$\Rightarrow \qquad \delta_1 \otimes \delta_2 = \Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K : (V, W) \mapsto \underbrace{(V\delta_1) \cdot (W\delta_2)}_{\text{Produkt in } K}$$

   ist eine Bilinearform (folgt aus der Bemerkung VII.2).

2. Seien $a, b \in K$ fest.

$$K[X] \times K[X] \to K : (p, q) \mapsto p(a) \cdot q(b)$$

   ist eine Bilinearform.

3.

$$\mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R} : (p, q) \mapsto \int_{-1}^{2} f_p(u) \cdot f_q(u)\, du$$

   ist eine Bilinearform. (f_p ist die Polynomfunktion zu p)

4. Sei $\mathcal{V} = K^n$.

$$\Rightarrow \qquad \Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K : \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) \mapsto x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

   ist eine Bilinearform.

Beachte:

1. Die bilineare Abbildungen $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ bilden einen Teilraum von $K^{\mathcal{V} \times \mathcal{V}}$.
2. Sei $\mathfrak{S}_n$ die Standardbasis von K^n und $\mathfrak{S}_n^* = (\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ die duale Basis.

$$\Rightarrow \qquad \Phi = \beta_1^* \otimes \beta_1^* + \beta_2^* \otimes \beta_2^* + \cdots + \beta_n^* \otimes \beta_n^*$$

   d. h. seien $\Phi_1, \Phi_2 : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ und $a, b \in K$

$$\Rightarrow \qquad (a\Phi_1 + b\Phi_2) : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K : (V, W) \mapsto a\Phi_1(V, W) + b\Phi_2(V, W)$$

   ist bilinear.

Beispiel VII.2: Bilinearformen

VII.3 Satz (Bilinearform einer Matrix)

1. Sei $K^n = K^{1\times n}$ und $A \in K^{n\times n}$, dann ist

$$\underset{\sim}{\widetilde{A}} : K^n \times K^n \to K : (X, Y) \mapsto \underbrace{X}_{1\times n} \underbrace{A}_{n\times n} \underbrace{Y^{tr}}_{n\times 1} \quad \in K \equiv K$$

   eine Bilinearform.

2. Sei $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit der Basis $\mathfrak{B} = (B_1, \dots, B_n)$ und $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ bilinear und $A = \big(\Phi(B_i, B_j)\big)_{1 \leq i,j \leq n}$. Dann ist folgendes Diagramm kommutativ:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V} \times \mathcal{V} \arrow[d, "\kappa_{\mathfrak{B}} \times \kappa_{\mathfrak{B}}"'] \arrow[dr, "\Phi"] & \\ K^n \times K^n \arrow[r, "\underset{\sim}{\widetilde{A}}"'] & K \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (V, W) \arrow[d] \arrow[dr] & \\ (V_{\mathfrak{B}}, W_{\mathfrak{B}}) \arrow[r] & \Phi(V, W) = V_{\mathfrak{B}} A (W_{\mathfrak{B}})^{tr} \end{tikzcd}$$

d. h. $\Phi(V, W) = V_{\mathfrak{B}} A (W_{\mathfrak{B}})^{tr}$ für alle $V, W \in \mathcal{V}$.

Beweis

1. Zeige $\underset{\sim}{\widetilde{A}}$ ist in beiden Komponenten linear.
Dazu seien $X = (X_1, \dots, X_n),\ Y = (Y_1, \dots, Y_n),\ X' = (X'_1, \dots, X'_n) \in K^n$ und $a, b \in K$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\widetilde{A}}(aX + bX', Y) &= (aX + bX')(AY^{tr}) \\ &= a(XAY^{tr}) + b(XAY^{tr}) \qquad \text{(da Matrixprodukt distributiv)} \\ &= a\underset{\sim}{\widetilde{A}}(X, Y) + b\underset{\sim}{\widetilde{A}}(X, Y) \end{aligned}$$

d. h. $\underset{\sim}{\widetilde{A}}$ ist linear in der ersten Komponente. Der Beweis für die Linearität in der zweiten Komponente geht analog.

2. Seien $V, W \in \mathcal{V}$ mit

$$\begin{aligned} V &= a_1 B_1 + \dots + a_n B_n \qquad \text{mit} \quad a_i \in K \\ W &= b_1 B_1 + \dots + b_n B_n \qquad \text{mit} \quad b_i \in K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi(V, W) &= \Phi(a_1 B_1 + \dots + a_n B_n, W) \\ &= a_1 \Phi(B_1, W) + \dots + a_n \Phi(B_n, W) \qquad \text{(linear in der 1. Komponente)} \\ &= (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} \Phi(B_1, W) \\ \vdots \\ \Phi(B_n, W) \end{pmatrix} \qquad \text{(VII.1)} \\ &= (a_1, \dots, a_n) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \Phi(B_1, B_1) + \dots + b_n \Phi(B_1, B_n) \\ \vdots \\ b_1 \Phi(B_n, B_1) + \dots + b_n \Phi(B_n, B_n) \end{pmatrix} \quad \text{(linear in der 2. Komponente)} \\ &= \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{V_{\mathfrak{B}}} A \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{(W_{\mathfrak{B}})^{tr}} \\ &= V_{\mathfrak{B}} A (W_{\mathfrak{B}})^{tr} \end{aligned}$$

Denn betrachte in (VII.1) die i-te Zeile des Spaltenvektors der $\Phi(B_i, W)$. Durch die Linearität in der zweiten Komponente ergibt sich:

$$\begin{aligned}\Phi(B_i, W) &= b_1 \underbrace{\Phi(B_i, B_1)}_{A_{i1}} + \dots + b_n \underbrace{\Phi(B_i, B_n)}_{A_{in}} \\ &= i\text{-te Zeile von } A \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}\end{aligned}$$

q.e.d.

VII.4 Definition Grammatrix

1. Sei $\mathfrak{B} = (B_1, \dots, B_n)$ eine Basis des K-Vektorraums $\mathcal{V}$ und $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ eine Bilinearform, dann heißt $\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = \big(\Phi(B_i, B_j)\big)_{1 \le i,j \le n} \in K^{n \times n}$ die *Matrix der Bilinearform* Φ bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$, oder die *Grammatrix* bezüglich der Basis $\mathfrak{B}$. (Somit ist $\Phi(V, W) = V_{\mathfrak{B}} \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} (W_{\mathfrak{B}})^{tr}$ für alle $V, W \in \mathcal{V}$.)
2. $\mathrm{BiFo}(\mathcal{V}) := \{\Phi \mid \Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K \text{ ist bilinear}\}$

VII.5 Satz (Isomorphismus zwischen $\mathrm{BiFo}(\mathcal{V})$ und Grammatrix)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum der Dimension n und $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Dann gilt:

1. $\mathrm{BiFo}(\mathcal{V}) \le K^{\mathcal{V} \times \mathcal{V}}$
2. Die Abbildung
$$\psi : \mathrm{BiFo}(\mathcal{V}) \to K^{n \times n} : \Phi \mapsto \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$$
ist ein Isomorphismus. (Insbesondere: $\dim \mathrm{BiFo}(\mathcal{V}) = n^2$)

Beweis

2.
- Zeige ψ ist linear. Dazu seien $\Psi, \Phi \in \mathrm{BiFo}(\mathcal{V})$ und $a, b \in K$. Betrachte nun die (i,j)-te Komponente von $\psi(a\Phi + b\Psi) = (a\Phi + b\Psi)_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$:
Nach der Definition von „+" und „·" in $K^{\mathcal{V} \times \mathcal{V}}$ gilt:
$$(a\Phi + b\Psi)(B_i, B_j) = a\Phi(B_i, B_j) + b\Psi(B_i, B_j)$$

also:

$$(a\Phi + b\Psi)_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = a\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} + b\Psi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$$

d. h. ψ ist linear. $\checkmark$
- Zeige ψ ist injektiv, d. h. $\mathrm{Ker}\,\psi = \{0\}$ Dazu sei $\Phi \in \mathrm{Ker}\,\psi$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \quad \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = (0) \\ &\Rightarrow \Phi(B_i, B_j) = 0 \qquad \text{für} \quad 1 \le i, j \le n \\ &\Rightarrow \Phi(X, Y) = \sum_{i,j} a_i b_i \underbrace{\Phi(B_i, B_j)}_{0} = 0 \qquad \checkmark\end{aligned}$$

d. h. $\Phi = 0 \qquad \Rightarrow \quad \psi$ ist injektiv.

- Zeige ψ ist surjektiv. Sei $A \in K^{n\times n}$ dann ist nach Satz VII.3 $\underset{\sim}{\widetilde{A}}$ eine Bilinearform und es existiert ein $\Phi \in \mathrm{BiFo}(\mathcal{V})$ mit $\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = A \qquad \surd$

q.e.d.

VII.6 Satz (Transformationsgesetz)

Sei $\mathcal{V}$ eine endlich erzeugter K-Vektorraum mit den Basen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, sowie $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ eine Bilinearform. Dann gilt:

$$\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = {}_{\mathfrak{B}}\mathrm{id}_{\mathfrak{C}} \cdot \Phi_{\mathfrak{C}\mathfrak{C}} \cdot ({}_{\mathfrak{B}}\mathrm{id}_{\mathfrak{C}})^{tr}$$

Beweis

Seien $X, Y \in \mathcal{V}$ beliebig.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad \Phi(X,Y) &= X_{\mathfrak{B}} \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} (Y_{\mathfrak{B}})^{tr} \\
&= (X_{\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}}) \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \underbrace{(Y_{\mathfrak{C}\,\mathfrak{C}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}})^{tr}}_{({}_{\mathfrak{C}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}})^{tr}(Y_{\mathfrak{C}})^{tr}} \\
&= X_{\mathfrak{C}} \left({}_{\mathfrak{C}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}} \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} ({}_{\mathfrak{C}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}})^{tr}\right) (Y_{\mathfrak{C}})^{tr} \\
&= X_{\mathfrak{C}} \Phi_{\mathfrak{C}\mathfrak{C}} (Y_{\mathfrak{C}})^{tr}
\end{aligned}$$

Setze alle Paare von Basisvektoren von $\mathfrak{C}$ ein, dann greift (C_i, C_j) gerade die (i,j)-te Komponente raus, z. B.

$$(1, 0, \ldots, 0) \cdot (A_{ij}) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A_{12}$$

$$\Rightarrow \quad {}_{\mathfrak{C}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}} \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} ({}_{\mathfrak{C}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}})^{tr} = \Phi_{\mathfrak{C}\mathfrak{C}}$$

q.e.d.

VII.7 Definition symmetrische Bilinearform, Skalarprodukt

1. Sei $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K$ eine Bilinearform. Φ heißt *symmetrische Bilinearform* oder *Skalarprodukt*, falls

$$\Phi(V, W) = \Phi(W, V) \qquad \text{für alle} \quad V, W \in \mathcal{V}$$

2. $A \in K^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, falls $A^{tr} = A$.

VII.8 Bemerkung (Matrix des Skalarproduktes)

Sei $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathcal{V}$.

$$\Phi \quad \text{ist symmetrisch} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \quad \text{ist symmetrisch}$$

Beweis

„⇒“ Sei Φ symmetrisch.

$$\Rightarrow \qquad \left.\begin{array}{l} \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} : (i,j) \mapsto \Phi(B_i, B_j) \\ \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{tr} : (i,j) \mapsto \Phi(B_j, B_i) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{tr} \qquad \text{da} \quad \Phi(B_i, B_j) = \Phi(B_j, B_i)$$

„⇐“ Sei $\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$ symmetrisch, $V, W \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \Phi(V,W) &= V_{\mathfrak{B}} \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} (W_{\mathfrak{B}})^{tr} \in K \qquad (a \in K \Rightarrow a^{tr} = a) \\ &= \left(V_{\mathfrak{B}} \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} (W_{\mathfrak{B}})^{tr}\right)^{tr} \\ &= W_{\mathfrak{B}} (\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}})^{tr} (V_{\mathfrak{B}})^{tr} \\ &= W_{\mathfrak{B}} \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} (V_{\mathfrak{B}})^{tr} \\ &= \Phi(W,V) \end{aligned}$$

q.e.d.

VII.9 Definition orthogonal, Radikal, nicht ausgeartet

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum mit Skalarprodukt Φ.

1. $X, Y \in \mathcal{V}$ heißen *orthogonal* (zueinander) bezüglich Φ, falls $\Phi(X,Y) = 0$.
   Bezeichnung: $X \perp Y$ (stehen senkrecht bezüglich Φ aufeinander)
2. Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, dann heißt $\mathcal{U}^{\perp_\Phi} = \mathcal{U}^{\perp} := \{X \in \mathcal{V} \mid X \perp U \quad \text{für alle} \quad U \in \mathcal{U}\}$ der *Orthogonal–Raum* von $\mathcal{U}$. (Spezialfall: $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$)
   Insbesondere heißt $\mathcal{V}^{\perp} =: \mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V})$ das *Radikal* von $\mathcal{V}$ bezüglich Φ.
3. Φ heißt *nicht ausgeartet*, falls $\mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V}) = \{0\}$

VII.10 Bemerkung

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum mit dem Skalarprodukt Φ.

1. $X \perp Y \Leftrightarrow Y \perp X$
2. $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V} \Rightarrow \mathcal{U}^{\perp} \leq \mathcal{V}$
3. Φ ist nicht ausgeratet $\Leftrightarrow$ nur der 0–Vektor steht senkrecht auf allen Vektoren von $\mathcal{V}$

VII.11 Satz (Skalarprodukt - Dualraum)

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum mit dem Skalarprodukt Φ.

1. $\overline{\Phi} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^* : V \mapsto \Phi_V \quad \text{mit} \quad W\Phi_V := \Phi(W,V) \quad \text{für alle} \quad W \in \mathcal{V}$ ist eine lineare Abbildung.
2. $\mathrm{Ker}\,\overline{\Phi} = \mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V})$
3. Ist $\mathcal{V}$ endlich erzeugt, so gilt: $\overline{\Phi}$ ist ein Isomorphismus $\Leftrightarrow$ Φ ist nicht ausgeartet.
   Bemerkung: In diesem Fall ist $\overline{\Phi}$ sogar ein basisunabhängiger Isomorphismus.
4. ${}_{\mathfrak{B}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*} = \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$

Beweis

1. Die Wohldefiniertheit von $\overline{\Phi}$ folgt aus der Linearität von Φ in der ersten Komponente. Die Linearität von $\overline{\Phi}$ folgt aus der Linearität von Φ in der zweiten Komponente.

$$\begin{aligned} W\big((aV+bV')\overline{\Phi}\big) &= W\Phi_{aV+bV'} \\ &= \Phi(W, aV+bV') \\ &= a\Phi(W,V) + b\Phi(W,V') \\ &= W\big(a(V\overline{\Phi}) + b(V'\overline{\Phi})\big) \qquad \surd \end{aligned}$$

2. Sei $V \in \operatorname{Ker}\overline{\Phi}$, d. h.

$$\begin{aligned} \Phi_V \quad \text{ist die 0-Abbildung} &\Leftrightarrow W\Phi_V = 0 && \text{für alle} \quad W \in \mathcal{V} \\ &\Leftrightarrow \Phi(W,V) = 0 && \text{für alle} \quad W \in \mathcal{V} \end{aligned}$$

   d. h. $V \in \mathcal{V}^\perp = \operatorname{Rad}_\Phi(\mathcal{V}) \qquad \surd$

3. Sei $\mathcal{V}$ endlich erzeugt. $\Rightarrow \dim \mathcal{V} = \dim \mathcal{V}^*$, d. h.

$$\begin{aligned} \overline{\Phi} \quad \text{ist ein Isomorphismus} &\Leftrightarrow \operatorname{Ker}\overline{\Phi} = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \operatorname{Rad}_\Phi(\mathcal{V}) = \{0\} \qquad \surd \end{aligned}$$

4. Sei $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ Basis von $\mathcal{V}$ und $\mathfrak{B}^* = (\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ die zugehörige Dualbasis von $\mathcal{V}^*$. Sei $B_i\overline{\Phi} = \Phi_{B_i} = a_{i1}\beta_1^* + \cdots + a_{n1}\beta_n^*$ $\big(\text{dann } {}_{\mathfrak{B}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*} = (a_{ij})\big)$.

$$\begin{aligned} \Phi(B_j, B_i) &= B_j\Phi_{B_i} \\ &= a_{i1}\cdot 0 + \cdots + a_{ij-1}\cdot 0 + \\ &\quad\ a_{ij}\cdot 1 + a_{ij+1}\cdot 0 + \cdots + a_{in}\cdot 0 \\ &= a_{ij} \\ &\Rightarrow\ (\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}})^t\, r = {}_{\mathfrak{B}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*} \\ &\Rightarrow \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = {}_{\mathfrak{B}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*} \qquad \surd \qquad (\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} \text{ symmetrisch}) \end{aligned}$$

q.e.d.

VII.12 Folgerung (Rang der Grammatrix und Radikal)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum der Dimension n, $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und Φ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{V}$. Dann

1. Φ ist nicht ausgeartet $\Leftrightarrow \operatorname{Rg}(\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}) = n$

2. $\operatorname{Rg}(\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}) + \dim \operatorname{Rad}_\Phi(\mathcal{V}) = \dim \mathcal{V} = n$

Beweis

1. Folgt aus 2

2.

$$\underbrace{\dim \operatorname{Bild}\overline{\Phi}}_{\operatorname{Rg}({}_{\mathfrak{B}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*}) = \operatorname{Rg}(\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}})} + \dim \underbrace{\operatorname{Ker}\overline{\Phi}}_{\operatorname{Rad}_\Phi(\mathcal{V})} = \dim \mathcal{V} = n$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} V \in \operatorname{Rad}_\Phi(V) &\Leftrightarrow \Phi(V, B_i) = 0 \qquad \text{für} \quad i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow V_{\mathfrak{B}} \cdot \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = (0, \dots, 0) \end{aligned} \tag{VII.2}$$

Die Koordinatenabbildung $\kappa_{\mathfrak{B}} : \mathcal{V} \to K^n$ bildet also $\operatorname{Rad}_\Phi(\mathcal{V})$ ab auf den Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems (VII.2)
$\Rightarrow$ Dimension des homogenen Lösungsraumes + Rang $= n$ $\quad \surd$

(Ist Φ symmetrisch $\Rightarrow \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}(V_{\mathfrak{B}})^{tr} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$)

q.e.d.

VII.13 Satz (Skalarprodukt auf Restklassenraum)

Sei Φ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{V}$. Definiere $\hat{\mathcal{V}} := \mathcal{V}/\operatorname{Rad}_\Phi(\mathcal{V})$. Dann folgt:

1. $$\hat{\Phi} : \hat{\mathcal{V}} \times \hat{\mathcal{V}} \to K : (X + \mathcal{V}^\perp, Y + \mathcal{V}^\perp) \mapsto \Phi(X, Y)$$

   ist ein wohldefiniertes Skalarprodukt auf $\hat{\mathcal{V}}$.
2. $\hat{\Phi}$ ist nicht ausgeartet.

Beweis

1. Betrachte den natürlichen Homomorphismus: $\mathcal{V} \to \hat{\mathcal{V}} : X \mapsto \hat{X} := X + \mathcal{V}^\perp$. Sei nun $\hat{X} = \hat{X}_1$, $\hat{Y} = \hat{Y}_1$, d. h. $X = X_1 + C,\ Y = Y_1 + C'$ mit $C, C' \in \mathcal{V}^\perp$. Zeige nun $\Phi(X, Y) = \Phi(X_1, Y_1)$:

   $$\begin{aligned} \Phi(X, Y) &= \Phi(X_1 + C, Y_1 + C) \\ &= \Phi(X_1, Y_1) + \underbrace{\Phi(X_1, C')}_{=0} + \underbrace{\Phi(C, Y_1)}_{=0} + \underbrace{\Phi(C, C')}_{=0} \\ &= \Phi(X_1, Y_1) \end{aligned}$$

   d. h. $\hat{\Phi}$ ist wohldefiniert. $\hat{\Phi}$ ist bilinear, da Φ bilinear ist.
2. Sei $\hat{X} \in \operatorname{Rad}_{\hat{\Phi}}(\hat{\mathcal{V}}) \quad \Rightarrow \quad \Phi(X, Y) = \hat{\Phi}(\hat{X}, \hat{Y}) = 0 \quad$ für alle $\quad Y \in \mathcal{V} \quad (\hat{Y} \in \hat{\mathcal{V}})$
   $\Rightarrow X \in \mathcal{V}^\perp \quad$, d. h. $\quad \hat{X} = \hat{0}$.

q.e.d.

VII.14 Bemerkung (Einschränkung des Skalarproduktes auf Teilraum)

Sei Φ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{V}$, sowie $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$.

1. $\Psi := \Phi|_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}} \qquad$ (= Einschränkung von Φ auf $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$) $\qquad$ ist wieder ein Skalarprodukt auf $\mathcal{U}$.

   $$\Psi : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to K : (U_1, U_2) \mapsto \Phi(U_1, U_2)$$

2. Φ nicht ausgeartet $\not\Rightarrow \quad \Psi = \Phi|_{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$ nicht ausgeartet!

Beweis

2. Gegenbeispiele:

   (a) Sei $\mathcal{V} = \mathbb{F}_2^n$ mit dem Skalarprodukt $\Phi = \underset{\sim}{\widetilde{I_n}}$, d. h.

   $$\Phi\big((X_1, \ldots, X_n), (Y_1, \ldots, Y_n)\big) = X_1Y_1 + \cdots + X_nY_n$$

   Sei $\mathcal{U} = \big\langle (1,1,0,\ldots,0) \big\rangle \qquad \Rightarrow \quad \Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = 0 \qquad$ (Beachte: $1+1=0$ in $\mathbb{F}_2$)

   (b) Sei $\mathcal{V} = \mathbb{R}^4$ und $\Phi = \underset{\sim}{\widetilde{A}}$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, d. h.

   $$\Phi\big((X_1, \ldots, X_n), (Y_1, \ldots, Y_n)\big) = X_1Y_1 - X_2Y_2 + X_3Y_3 - X_4Y_4$$

   Sei $U = (1,0,0,1)$ und $\mathcal{U} = \langle U \rangle$

   $$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad \Phi(U,U) = 0 \\ &\Rightarrow \Phi(\alpha U, \beta U) = \alpha\beta\Phi(U,U) \; = \; 0 \qquad \text{mit} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ &\Rightarrow \qquad \Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = 0 \end{aligned}$$

   (c) Sei K beliebig, $\dim \mathcal{V} = 2$ und $\mathfrak{B} = (B_1, B_2)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und Φ mit $\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

   $$\mathcal{U} = \langle B_1 \rangle \quad \Rightarrow \quad \Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} = 0$$

q.e.d.

VII.15 Bemerkung (Radikal des eingeschränkten Skalarproduktes)

Sei $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$ und Φ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{V}$

$$\Psi = \Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Rad}_\Psi(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^{\perp_\Phi}$$

Beweis

Folgt direkt aus der Definition.

VII.16 Satz (Dimension des Senkrechtraumes)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum, Φ ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt auf $\mathcal{V}$ und $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$

$$\Rightarrow \qquad \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{U}^{\perp_\Phi} = \dim \mathcal{V}$$

Beweis

- Da Φ nicht ausgeartet ist, ist $\overline{\Phi} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^* : V \mapsto \Phi_V$ ein Isomorphismus. Dann ist

  $$\big(\mathcal{U}^{\perp_\Phi}\big)\,\overline{\Phi} = \mathcal{U}^\perp = \quad \text{Annulator von } \mathcal{U} \text{ in } \mathcal{V}^*$$

  Nach Satz VI.9 folgt:

  $$\Rightarrow \qquad \underbrace{\dim \mathcal{U}^\perp}_{\dim \mathcal{U}^{\perp_\Phi}} + \dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{V} \qquad \checkmark$$

- Alternativer Beweis:
  Sei $(B_1, \ldots, B_k)$ eine Basis von $\mathcal{U}$. Ergänze zu $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_k, \ldots, B_n)$ Basis von $\mathcal{V}$. Für alle $V \in \mathcal{U}^\perp$ gilt:

$$\Phi(B_i, V) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

in Koordinaten: Sei $\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} A \\ \hline \vdots \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad A \in K^{k \times n}$

$$A(V_{\mathfrak{B}})^{tr} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \in K^{k \times 1}$$

Weiterhin gilt: $\operatorname{Rg} A = k$, da $\operatorname{Rg} \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = n$, daraus folgt $\operatorname{Rg} A + \dim L_0 = n \qquad \surd$.

q.e.d.

VII.17 Definition direkte Summe

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum.

1. Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \leq \mathcal{V}$. $\mathcal{V}$ heißt die *(innere) direkte Summe* von $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ $\quad (\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2)$, falls
   (a) $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = \mathcal{V}$
   (b) $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{0\}$

2. Seien $\mathcal{U}_i \leq \mathcal{V}$ für $i = 1, \ldots, n$. $\mathcal{V}$ heißt *(innere) direkte Summe* der $\mathcal{U}_i$, falls jedes $V \in \mathcal{V}$ eindeutig darstellbar ist als

$$V = U_1 + \cdots + U_n \qquad \text{mit} \quad U_i \in \mathcal{U}_i$$

   Bemerkung:
   (a) Für $n = 2$ ist dies äquivalent zu 1.
   (b) $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ ist Basis von $\mathcal{V} \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{V} = \langle B_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle B_n \rangle$

VII.17.1 Zusammenhang mit der äußeren direkten Summe

Seien $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ K-Vektorräume. Dann ist $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ die äußere direkte Summe von $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$. Seien weiterhin $\mathcal{V}' := \mathcal{V} \times \{0\}$ und $\mathcal{W}' := \{0\} \times \mathcal{W} \quad \leq \mathcal{V} \times \mathcal{W}$. Dann folgt, daß $\mathcal{V} \times \mathcal{W}$ die (innere) direkte Summe von $\mathcal{V}'$ und $\mathcal{W}'$ ist.

$$\mathcal{V} \times \mathcal{W} := \mathcal{V} \oplus \mathcal{W} \quad \text{(äußere)} \qquad = \quad \mathcal{V}' \oplus \mathcal{W}' \quad \text{(innere direkte Summe)}$$

Seien $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \leq \mathcal{V}$. Die Abbildung

$$\varphi : \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 : (U_1, U_2) \mapsto U_1 + U_2 \qquad \text{(äußere)}$$

ist linear und surjektiv mit $\operatorname{Ker} \varphi = \big\{(U, -U) \mid U \in \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2\big\}$, d. h. φ ist ein Epimorphismus von $\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$ auf $\mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$ und φ ist ein Isomorphismus genau dann wenn $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{0\}$.

Sei die Abbildung $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ linear. Dann ist φ

- Epimorphismus $\Leftrightarrow$ φ ist surjektiv.
- Monomorphismus $\Leftrightarrow$ φ ist injektiv.
- Endomorphismus $\Leftrightarrow$ $\mathcal{V} = \mathcal{W}$
- Isomorphismus $\Leftrightarrow$ φ ist bijektiv.
- Automorphismus $\Leftrightarrow$ φ ist Isomorphismus und $\mathcal{V} = \mathcal{W}$.
- Homomorphismus $\Leftrightarrow$ φ ist linear.

Beispiel VII.3: ...morphismen

VII.18 Satz (orthogonale direkte Summe)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum, Φ ein Skalarprodukt auf $\mathcal{V}$ und $\mathcal{U} \leq \mathcal{V}$.

1. Ist Φ nicht ausgeartet, dann gilt:

$$\mathcal{U}^{\perp_\Phi \perp_\Phi} = \mathcal{U}$$

2.

$$\mathcal{V} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}^\perp \quad \Leftrightarrow \quad \Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \quad \text{ist nicht ausgeartet}$$

Dann ist auch $\Phi|_{\mathcal{U}^\perp \times \mathcal{U}^\perp}$ nicht ausgeartet.

Beweis

1. Φ nicht ausgeartet $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{U}^{\perp_\Phi} &= \dim V \\
\dim \mathcal{U}^{\perp_\Phi} + \dim \mathcal{U}^{\perp_\Phi \perp_\Phi} &= \dim V
\end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dim \mathcal{U} = \dim \mathcal{U}^{\perp_\Phi \perp_\Phi} \\ \text{klar: } \mathcal{U}^{\perp_\Phi \perp_\Phi} \supseteq \mathcal{U} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{U} = \mathcal{U}^{\perp_\Phi \perp_\Phi}$$

2. „$\Rightarrow$“ trivial
„$\Leftarrow$“

$$\begin{aligned}
\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\} &\Leftrightarrow \mathrm{Rad}_{\Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}}(\mathcal{U}) = \{0\} \\
&\Leftrightarrow \Phi|_{\mathcal{U}\times\mathcal{U}} \quad \text{ist nicht ausgeartet}
\end{aligned}$$

Zeige unter der Annahme $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}$, daß: $\mathcal{U} + \mathcal{U}^\perp = \mathcal{V}$.
Sei $\dim \mathcal{U} = k$. Dann wird $\mathcal{U}^\perp$ beschrieben, als Lösungsraum des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\Phi(B_i, X) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k)$$

wobei $(B_1, \ldots, B_k)$ eine Basis von $\mathcal{U}$ ist. Das GLS hat k linear unabhängige Gleichungen, denn für $X \in \mathcal{U}$ existiert nur die triviale Lösung. Daraus folgt, daß die Dimension des Lösungsraumes

$$(= \dim \mathcal{U}^\perp) = \dim \mathcal{V} - k = \dim \mathcal{V} - \dim \mathcal{U}$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned}\dim\mathcal{U} + \dim\mathcal{U}^\perp = \dim\mathcal{V}\\ \mathcal{U}\cap\mathcal{U}^\perp = \{0\}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathcal{V} = \mathcal{U}\oplus\mathcal{U}^\perp$$

q.e.d.

Schreibweisen:

1. Im allgemeinen Fall: $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2$
2. Gilt zusätzlich: $\mathcal{U}_1 \perp \mathcal{U}_2$, d. h. $U_1 \perp U_2$ für alle $U_1 \in \mathcal{U}_1$ und $U_2 \in \mathcal{U}_2$, so schreibt man $\mathcal{V} = \mathcal{U}_1 \perp \mathcal{U}_2$ „*orthogonale direkte Summe*“.

VII.19 Satz (reziproke Basis)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit der Basis $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ und Φ ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt auf $\mathcal{V}$. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Basis $\mathfrak{B}^\circledast = (B_1^*, \ldots, B_n^*)$ von $\mathcal{V}$ mit $\Phi(B_i, B_j^*) = \delta_{ij}$
$\mathfrak{B}^\circledast$ heißt die zu $\mathfrak{B}$ *reziproke Basis*. Ferner gilt:

$$V = \Phi(V, B_1^*)B_1 + \cdots + \Phi(V, B_n^*)B_n \qquad \text{für alle} \quad V \in \mathcal{V}$$

Beweis

Sei $\mathfrak{B}^* = (\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*)$ die zu $\mathfrak{B}$ duale Basis von $\mathcal{V}^*$

$$\overline{\Phi} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^* : X \mapsto \Phi_X \qquad [\Phi_X : \mathcal{V} \to K : V \mapsto \Phi(X, V)]$$

ist ein Isomorphismus, da Φ nicht ausgeartet ist.

$$\begin{aligned} && B_i^* &:= \beta_i^* \overline{\Phi}^{-1} \qquad \text{(vgl. Satz VII.11)}\\ \Rightarrow && \Phi(B_j, B_i^*) &= B_j \Phi_{B_i^*}\\ && &= B_j \beta_i^* \;=\; \delta_{ij}\end{aligned}$$

$\mathfrak{B}^\circledast = \mathfrak{B}^* \overline{\Phi}^{-1}$ ist eine Basis von $\mathcal{V}$, da $\mathfrak{B}^*$ Basis von $\mathcal{V}^*$ und $\overline{\Phi}$ ein Isomorphismus ist.

$$V = (V\beta_1^*)B_1 + \cdots + (V\beta_n^*)B_n$$

q.e.d.

VII.20 Satz (reziproke Basiswechselmatrix)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit der Basis $\mathfrak{B}$ und einem nicht ausgeartetem Skalarprodukt Φ. Für die reziproke Basis $\mathfrak{B}^\circledast$ gilt:

$$_{\mathfrak{B}^\circledast}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}} = (\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}})^{-1}$$

Beweis

Der Isomorphismus $\overline{\Phi}: \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ hat die Matrix ${}_{\mathfrak{B}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*} = \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}$ (siehe Satz VII.11). $\overline{\Phi}$ bildet $\mathfrak{B}^{\circledast}$, die reziproke Basis von $\mathcal{V}$, auf $\mathfrak{B}^*$, die duale Basis von $\mathcal{V}^*$, ab, d. h. ${}_{\mathfrak{B}^{\circledast}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*} = I_n$. Also:

$$\begin{aligned} {}_{\mathfrak{B}^{\circledast}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}} &= {}_{\mathfrak{B}^{\circledast}}(\overline{\Phi}\,\overline{\Phi}^{-1})_{\mathfrak{B}} \\ &= {}_{\mathfrak{B}^{\circledast}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*}\,{}_{\mathfrak{B}^*}\overline{\Phi}^{-1}{}_{\mathfrak{B}} \\ &= {}_{\mathfrak{B}^{\circledast}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*}\left({}_{\mathfrak{B}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*}\right)^{-1} \\ &= I_n(\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}})^{-1} \\ &= (\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}})^{-1} \end{aligned}$$

q.e.d.

Sei $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^{1\times 2}$ und Φ das Standardskalarprodukt:

$$\Phi\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Sei $\mathfrak{B} = (B_1, B_2) = \big((1,2), (1,3)\big)$ eine Basis von $\mathcal{V}$

$$\Rightarrow \qquad \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \Phi(B_1, B_1) & \Phi(B_1, B_2) \\ \Phi(B_2, B_1) & \Phi(B_2, B_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$$

Somit

$$\begin{aligned} {}_{\mathfrak{B}^{\circledast}}\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_2} &= {}_{\mathfrak{B}^{\circledast}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}}\,{}_{\mathfrak{B}}\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_2} \\ &= (\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}})^{-1} \cdot {}_{\mathfrak{B}}\mathrm{id}_{\mathfrak{S}_2} \\ &= \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mathfrak{B}^{\circledast} = ((3,-1), (-2,1))$ ist die reziproke Basis. Die duale Basis von $(\mathbb{R}^{1\times 2})^* \equiv \mathbb{R}^{2\times 1}$ ist: $\mathfrak{B}^* = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Beispiel VII.4: reziproke Basis

VII.21 Definition Orthogonal– Orthonormalbasis

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit dem Skalarprodukt Φ und der Basis $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$.

1. $\mathfrak{B}$ heißt *Orthogonalbasis* von $\mathcal{V}$ (bezüglich Φ), falls $\Phi(B_i, B_j) = 0$ für $i \neq j$.
2. $\mathfrak{B}$ heißt *Orthonormalbasis* (ON-Basis) von $\mathcal{V}$ (bezüglich Φ), falls $\Phi(B_i, B_j) = \delta_{ij}$ für $i, j = 1, \ldots, n$.

Achtung: Orthonormalbasen existieren nicht immer, selbst wenn Φ nicht ausgeartet ist.

1. Sei $\mathcal{V} = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{Q}$
$$\Phi : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} : (V, W) \mapsto 2VW$$
es existiert eine ON-Basis genau dann, wenn ein $V \in \mathbb{Q}$ existiert, mit $2V^2 = 1$, d. h. $V^2 = \frac{1}{2}$. Es gibt also keine ON-Basis.
2. Sei $\mathcal{V} = K^n$ mit dem Standardskalarprodukt
$$\underset{\sim}{\widetilde{I_n}} : \big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) \mapsto x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$
$\Rightarrow \quad \mathfrak{S}_n$ ist Orthonormalbasis.
3. Sei $\mathcal{V} = K^{n \times m}$ und
$$\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K : (A, B) \mapsto \mathrm{Sp}(AB^{tr})$$
mit $\mathrm{Sp}(X) = x_{11} + \cdots + x_{nn}$ = die „Spur“ von $X = (x_{ij}) \in K^{n \times m}$. Dann bilden die
$$e_{ij} := \begin{array}{c} \scriptstyle j \\ \scriptstyle \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array} \leftarrow i \quad \text{eine ON-Basis.}$$

Beispiel VII.5: ON-Basen

VII.22 Satz (Existenz einer Orthogonalbasis)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit dem Skalarprodukt Φ und es gelte $\underbrace{2}_{1+1} \neq 0$ in K.

$\Rightarrow \mathcal{V}$ hat eine Orthogonalbasis.

Beweis

Wähle ein beliebiges $B_1 \in \mathcal{V}$ mit $\Phi(B_1, B_1) \neq 0$. Falls $\Phi \neq 0$ existiert ein solches B_1, denn sonst ergibt sich ein Widerspruch wie folgt:
Sei $\Phi(X, X) = 0$ für alle $X \in \mathcal{V}$ und $V, W \in \mathcal{V}$ beliebig: Dann folgt
$$\begin{aligned} 0 &= \Phi(V + W, V + W) \\ &= 2\Phi(V, W) + \underbrace{\Phi(V, V)}_{=0} + \underbrace{\Phi(W, W)}_{=0} \\ &\Rightarrow \Phi(V, W) = 0 \qquad \text{da } 2 \neq 0 \\ &\Rightarrow \Phi = 0 \qquad ϟ \end{aligned}$$

Also $\mathcal{V} = \langle B_1 \rangle \perp \langle B_1 \rangle^\perp$. Fahre fort mit $\Phi|_{\langle B_1 \rangle^\perp \times \langle B_1 \rangle^\perp}$, beachte $\dim \langle B_1 \rangle^\perp = \dim \mathcal{V} - 1$ da $\Phi(B_1, B_1) \neq 0$.

VII.23 Definition positiv/negativ definit

Sei $\mathcal{V}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ ein Skalarprodukt. Φ heißt

- positiv definit, falls $\Phi(V, V) > 0$ für alle $V \in \mathcal{V} \backslash \{0\}$
- positiv semidefinit, falls $\Phi(V, V) \geq 0$ für alle $V \in \mathcal{V}$

Bezüglich des Skalarproduktes Φ mit $\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =: A$ soll eine Orthogonalbasis bestimmt werden.

Grammatrix	Basistransformationsmatrix
$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_n$
$\overset{B_1 A =}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}} \to \overset{B_1 A B_1^{tr} =}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$	$\downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B_1 I_n$
$\overset{B_2(B_1 A B_1^{tr}) =}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}} \to \overset{B_2(B_1 A B_1^{tr}) B_2^{tr} =}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$	$\downarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = B_2 B_1 I_n = {}_{\mathfrak{C}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}}$

Beispiel VII.6: Bestimmung einer Orthogonalbasis

- negativ definit, falls $\quad \Phi(V,V) < 0 \quad$ für alle $\quad V \in \mathcal{V} \backslash \{0\}$
- negativ semidefinit, falls $\quad \Phi(V,V) \leq 0 \quad$ für alle $\quad V \in \mathcal{V}$

VII.24 Bemerkung (definites Skalarprodukt)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum, Φ ein Skalarprodukt.

1. Ist Φ positiv definit oder negativ definit $\Rightarrow$ Φ ist nicht ausgeartet.

2. Ist Φ positiv semidefinit oder negativ semidefinit $\Rightarrow \underbrace{\mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V})}_{\mathcal{V}^\perp} = \underbrace{\{V \in \mathcal{V} \mid \Phi(V,V) = 0\}}_{\mathcal{X}}$

Beweis

1. Folgt sofort aus den Definitionen VII.9 und VII.23:

$$V \neq 0 \Rightarrow \Phi(V,V) \neq 0 \Rightarrow V \notin \mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V}) \Rightarrow \mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V}) = \{0\}$$

2.
   - Da alle Vektoren aus $\mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V})$ auf allen Vektoren senkrecht stehen, somit auch auf sich selbst, ist $\mathcal{X} \supseteq \mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V})$.

- Zeige: $\mathcal{X} \subseteq \mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V})$
  Wähle Orthogonalbasis $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ mit

$$\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_k & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad \alpha_i \neq 0$$

  Φ ist positiv semidefinit $\Leftrightarrow$ alle $\alpha_i > 0$ (bzw. Φ ist negativ semidefinit $\Leftrightarrow$ alle $\alpha_i < 0$).
  $\Rightarrow (B_{k+1}, \ldots, B_n)$ ist eine Basis von $\mathcal{V}^\perp$. Sei nun $X \in \mathcal{X}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad X &= a_1 B_1 + \cdots + a_n B_n \qquad \text{für} \quad a_i \in \mathbb{R} \\ 0 &= \Phi(X, X) \\ &= \alpha_1 a_1^2 + \cdots + \alpha_k a_k^2 + 0 \cdot a_{k+1}^2 + \cdots + 0 \cdot a_n^2 \end{aligned}$$

  wobei alle $\alpha_i > 0$ (bzw. alle $\alpha_i < 0$)
  $\Rightarrow \quad a_1 = \cdots = a_k = 0 \qquad \Rightarrow X \in \mathcal{V}^\perp = \mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V})$

q.e.d.

VII.25 Sylvesterscher Trägheitssatz

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt Φ. Für jede Orthogonalbasis $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ von $\mathcal{V}$ sei

$\mathbf{p}(\mathfrak{B}) := \big|\{i \big| \Phi(B_i, B_i) > 0\}\big|$ die Anzahl der Basiselemente $B \in \mathfrak{B}$ mit $\Phi(B, B) > 0$.

$\mathbf{n}(\mathfrak{B}) := \big|\{i \big| \Phi(B_i, B_i) < 0\}\big|$ die Anzahl der Basiselemente $B \in \mathfrak{B}$ mit $\Phi(B, B) < 0$.

$\mathbf{o}(\mathfrak{B}) := \big|\{i \big| \Phi(B_i, B_i) = 0\}\big|$ die Anzahl der Basiselemente $B \in \mathfrak{B}$ mit $\Phi(B, B) = 0$.

Dann gilt: $p(\mathfrak{B})$, $n(\mathfrak{B})$ und $o(\mathfrak{B})$ sind unabhängig von der Wahl der Orthogonalbasis $\mathfrak{B}$.
Andere Formulierung: Seien $\mathcal{V} = \mathcal{V}^+ \perp \mathcal{V}^- \perp \mathcal{V}^0 = \mathcal{W}^+ \perp \mathcal{W}^- \perp \mathcal{W}^0$ zwei Zerlegungen von $\mathcal{V}$ als orthogonale direkte Summe, so daß gilt:

- $\Phi|_{\mathcal{V}^+ \times \mathcal{V}^+}$ und $\Phi|_{\mathcal{W}^+ \times \mathcal{W}^+}$ sind positiv definit
- $\Phi|_{\mathcal{V}^- \times \mathcal{V}^-}$ und $\Phi|_{\mathcal{W}^- \times \mathcal{W}^-}$ sind negativ definit
- $\Phi|_{\mathcal{V}^0 \times \mathcal{V}^0} = 0$ und $\Phi|_{\mathcal{W}^0 \times \mathcal{W}^0} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \dim \mathcal{V}^+ &= \dim \mathcal{W}^+ \qquad \big(= p(\mathfrak{B})\big) \\ \dim \mathcal{V}^- &= \dim \mathcal{W}^- \qquad \big(= n(\mathfrak{B})\big) \\ \mathcal{V}^0 &= \mathcal{W}^0 \end{aligned}$$

($\dim \mathcal{V}^+ - \dim \mathcal{V}^-$ heißt die Signatur von Φ)

Beweis

Es gilt: $\mathcal{V}^0 = \mathcal{V}^\perp = \mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V})$, also ist $o(\mathfrak{B})$ unabhängig von der Wahl der Orthogonal-Basis. Seien nun $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ und $\mathfrak{C} = (C_1, \ldots, C_n)$ Orthogonal-Basen von $\mathcal{V}$ mit $k, k', s, s' \leq n$, so daß:

$$\begin{array}{ll|ll}
\Phi(B_i, B_i) > 0 & i = 1, \ldots, k & \Phi(C_i, C_i) > 0 & i = 1, \ldots, k' \\
\Phi(B_i, B_i) < 0 & i = k+1, \ldots, s & \Phi(C_i, C_i) < 0 & i = k'+1, \ldots, s' \\
\Phi(B_i, B_i) = 0 & i = s+1, \ldots, n & \Phi(C_i, C_i) = 0 & i = s'+1, \ldots, n
\end{array}$$

Zeige nun: $\mathfrak{D} := (B_1, \ldots, B_k, C_{k'+1}, \ldots, C_{s'})$ ist linear unabhängig.
Dazu seien $b_1, \ldots, b_k, c_{k'+1}, \ldots, c_{s'} \in \mathbb{R}$ mit

$$b_1 B_1 + \cdots + b_k B_k + c_{k'+1} C_{k'+1} + \cdots + c_{s'} C_{s'} = 0$$

Sei $\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
X := & \underbrace{b_1 B_1 + \cdots + b_k B_k}_{\Phi(X,X) \geq 0} = \underbrace{-c_{k'+1} C_{k'+1} - \cdots - c_{s'} C_{s'}}_{\Phi(X,X) \leq 0} \\
& \Rightarrow \Phi(X, X) = 0 = b_1^2 \alpha_1 + \cdots + b_k^2 \alpha_k \\
& \Rightarrow b_1 = \cdots = b_k = 0 \\
& \Rightarrow c_{k'+1} = \cdots = c_{s'} = 0 \qquad \text{(da } X = 0 \text{ und die } C_i \text{ linear unabhängig sind.)}
\end{aligned}$$

d. h. $\mathfrak{D}$ ist linear unabhängig. Also gilt:

$$\dim\langle B_1, \ldots, B_k \rangle + \dim\langle C_{k'+1}, \ldots, C_{s'} \rangle + \dim \mathrm{Rad}_\Phi(\mathcal{V}) = k + (n - k') \leq n$$

aus Symmetriegründen: $\quad k' + n - k \leq n$

$$\Rightarrow \qquad k = k' = p(\mathfrak{B}) = p(\mathfrak{C})$$

Weiter gilt: $n - s = o(\mathfrak{B}) = o(\mathfrak{C}) = n - s'$

$$\Rightarrow \qquad n(\mathfrak{B}) = n(\mathfrak{C})$$

q.e.d.

Zusammenspiel zwischen nicht ausgeartetem Skalarprodukt und linearen Abbildungen

VII.26 Definition adjungierte Abbildung

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit einem nicht ausgeartetem Skalarprodukt Φ. Sei $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung. Dann heißt

$$\alpha^{ad} = \overline{\Phi} \alpha^{tr} \overline{\Phi}^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$$

die zu α bezüglich Φ *adjungierte lineare Abbildung.*

$$V \longmapsto \Phi_V \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{V} \arrow[r, "\alpha^{ad}"] \arrow[d, "\overline{\Phi}"'] & \mathcal{V} \arrow[d, "\overline{\Phi}"] \\ \mathcal{V}^* \arrow[r, "\alpha^{tr}"'] & \mathcal{V}^* \end{tikzcd}$$

VII.27 Bemerkung

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum, Φ ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt und $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung.
$\Rightarrow \quad \alpha^{ad}$ ist diejenige eindeutig bestimmte Abbildung

$$\beta : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \qquad \text{mit} \quad \Phi(X\alpha, Y) = \Phi(X, Y\beta)$$

Beweis

Zeige β ist eindeutig bestimmt: Für jedes feste $Y \in \mathcal{V}$ ist

$$\varphi_Y : \mathcal{V} \to K : X \mapsto \Phi(X\alpha, Y) \qquad \varphi_Y \in \mathcal{V}^*$$

Da nun $\overline{\Phi} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ ein Isomorphismus ist $\Rightarrow$ es existiert genau ein $Z \in \mathcal{V}$ mit $Z\overline{\Phi} = \varphi_Y$, d. h.

$$\Phi(X\alpha, Y) = \Phi(Z, X) = \Phi(X, Z) \qquad \text{für alle} \quad X \in \mathcal{V}$$

Also ist $Z = Y\beta$, d. h. β ist eindeutig und wohldefiniert. $\checkmark$
Zeige noch $Y\beta = Y\alpha^{ad}$

$$\begin{aligned}
\Phi(X, Y\alpha^{ad}) &= \Phi(X, Y\overline{\Phi}\alpha^{tr}\overline{\Phi}^{-1}) \\
&= \Phi\left(X, \left(\alpha^{tr}(Y\overline{\Phi})\right)\overline{\Phi}^{-1}\right) \\
&= \Phi(X, \varphi_Y\overline{\Phi}^{-1}) \\
&= \Phi(X, Z) \\
&= \Phi(X\alpha, Y)
\end{aligned}$$

q.e.d.

VII.28 Satz (Matrix der Adjungierten)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum mit der Basis $\mathfrak{B}$, Φ ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt und $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung.

$${}_{\mathfrak{B}}(\alpha^{ad})_{\mathfrak{B}} = \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}({}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{B}})^{tr}\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
\alpha^{ad} &= \overline{\Phi}\alpha^{tr}\overline{\Phi}^{-1} \\
\Rightarrow \qquad {}_{\mathfrak{B}}(\alpha^{ad})_{\mathfrak{B}} &= {}_{\mathfrak{B}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*}{}_{\mathfrak{B}^*}(\alpha^{tr})_{\mathfrak{B}^*}\left({}_{\mathfrak{B}}\overline{\Phi}_{\mathfrak{B}^*}\right)^{-1} \\
&= \Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}\left({}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{B}}\right)^{tr}\Phi_{\mathfrak{B}\mathfrak{B}}^{-1} \qquad \text{(nach Satz VII.11)}
\end{aligned}$$

Beachte: Wir müssen die Matrix ${}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{B}}$ transponieren, da wir hier auch für $\mathcal{V}^*$ die Zeilenkonvention benutzen.

q.e.d.

VII.29 Definition normale, symmetrische, orthogonale Abbildung

Sei $\mathcal{V}$ ein eindlich erzeugter K-Vektorraum, Φ ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt auf $\mathcal{V}$ und $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung.

1. α heißt normal (bezüglich Φ), falls $\alpha^{ad}\alpha = \alpha\alpha^{ad}$
2. α heißt selbstadjungiert, oder symmetrisch (bezüglich Φ), falls $\alpha^{ad} = \alpha$
3. α heißt orthogonal (bezüglich Φ), falls $\alpha^{ad}\alpha = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$ (d. h. $\alpha^{ad} = \alpha^{-1}$)

VII.30 Bemerkung (Eigenschaft symmetrischer und orthogonaler Abbildungen)

Sei $\mathcal{V}$ ein eindlich erzeugter K-Vektorraum, Φ ein nicht ausgeartetes Skalarprodukt auf $\mathcal{V}$ und $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung.

1. Ist α symmetrisch oder orthogonal $\Rightarrow$ α ist normal.
2. Ist α symmetrisch $\Rightarrow \quad \Phi(X\alpha, Y) = \Phi(X, Y\alpha) \qquad$ für alle $\quad X, Y \in \mathcal{V}$
3. Ist α orthogonal $\Rightarrow \quad \Phi(X\alpha, Y\alpha) = \Phi(X, Y) \qquad$ für alle $\quad X, Y \in \mathcal{V}$

Beweis

2. Sei α symmetrisch:

$$\Phi(X\alpha, Y) = \Phi(X, Y\alpha^{ad}) = \Phi(X, Y\alpha)$$

3. Sei α orthogonal:

$$\Phi(X\alpha, Y\alpha) = \Phi(X, Y\alpha\alpha^{ad}) = \Phi(X, Y)$$

q.e.d.

Euklidische Vektorräume

VII.31 Definition euklidischer Vektorraum

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\Phi : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ ein positiv definites Skalarprodukt. Dann heißt $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein *euklidischer Vektorraum* (oder *reeller endlich dimensionaler Hilbert-Raum*).

VII.32 Gram-Schmidtsches Orthonormalisierungsverfahren

Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein euklidischer Vektorraum und $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Dann existiert eine Orthonormalbasis $\mathfrak{E} = (E_1, \ldots, E_n)$ von $\mathcal{V}$ mit

$$\langle E_1, \ldots, E_k \rangle = \langle B_1, \ldots, B_k \rangle \qquad \text{für} \quad k = 1, \ldots, n$$

Beweis

$$E_1 := \frac{1}{\sqrt{\Phi(B_1, B_1)}} \cdot B_1$$

wähle $E_2' = \alpha E_1 + B_2$, so daß $E_2' \perp E_1$, d. h.

$$0 = \Phi(E_1, \alpha E_1 + B_2) = \alpha \underbrace{\Phi(E_1, E_1)}_{1} + \Phi(E_1, B_2) = \alpha + \Phi(E_1, B_2)$$

$\Rightarrow \quad \alpha = -\Phi(E_1, B_2)$
Setze nun

$$E_2 := \frac{1}{\sqrt{\Phi(E_2', E_2')}} \cdot E_2'$$

($E_2' \neq 0$ da (E_1, E_2') linear unabhängig sind.)
etc.
Annahme: $E_1, \ldots, E_k$ für ein $k \leq n$ seien schon konstruiert.
Wähle $E_{k+1}' := \beta_1 E_1 + \cdots + \beta_k E_k + B_{k+1}$, so daß $E_{k+1}' \perp E_i$ für $i = 1, \ldots, k$, d. h. für das Skalarprodukt mit E_i ergibt sich:

$$0 = \beta_1 \cdot 0 + \cdots + \beta_{i-1} \cdot 0 + \beta_i \cdot 1 + \beta_{i+1} \cdot 0 + \cdots + \beta_k \cdot 0 + \Phi(E_i, B_{k+1})$$

also $\beta_i = -\Phi(E_i, B_{k+1})$. Setze nun

$$E_{k+1} := \frac{1}{\sqrt{\Phi(E_{k+1}', E_{k+1}')}} \cdot E_{k+1}'$$

Führe diesen Algorithmus fort bis $k = n$

q.e.d.

VII.33 Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein euklidischer Vektorraum und $X, Y \in \mathcal{V}$

$$\Rightarrow \qquad \Phi(X, Y)^2 \leq \Phi(X, X) \cdot \Phi(Y, Y)$$

Beweis

1.Fall: $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ linear abhängig , also oBdA. sei $Y = aX$ für ein $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \Phi(X, Y)^2 &= \Phi(X, aX)^2 \\ &= a^2 \Phi(X, X)^2 \\ &= \Phi(X, X) \cdot \Phi(aX, aX) \\ &= \Phi(X, X) \cdot \Phi(Y, Y) \end{aligned}$$

2.Fall: $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ linear unabhängig . Wähle ein Orthonormalbasis (E_1, E_2) von $\langle X, Y\rangle$ mit $\langle E_1\rangle = \langle X\rangle$. OBdA sei $\Phi(X, X) = 1$ also $X = E_1$ und $Y = aX + bE_2$.

$$\begin{aligned}
\Phi(X,Y)^2 &= \Phi(E_1, aE_1 + bE_2)^2 \\
&= \Big(\underbrace{a\Phi(E_1,E_1)}_{a} + \underbrace{b\Phi(E_1,E_2)}_{0}\Big)^2 \\
&= a^2 \\
&\le a^2 + b^2 \\
&= \underbrace{\Phi(X,X)}_{1}\underbrace{\Phi(Y,Y)}_{a^2+b^2}
\end{aligned}$$

q.e.d.

VII.34 Definition Länge, Winkel, Abstand

Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein euklidischer Vektorraum

1. Für $X, Y \in \mathcal{V}$, $X \neq 0 \neq Y$ ist der *Winkel* zwischen X und Y definiert als

$$\alpha := \arccos \underbrace{\left(\frac{\Phi(X,Y)}{\sqrt{\Phi(X,X)}\sqrt{\Phi(Y,Y)}}\right)}_{\in[-1,1]}$$

   (Bezeichnung: $\measuredangle(X, Y) = \alpha \in [0, \pi]$)

2. Für $X \in \mathcal{V}$ heißt $|X| := \sqrt{\Phi(X, X)}$ die *Norm* (oder *Länge*) von X.

3. Für $X, Y \in \mathcal{V}$ heißt $\mathrm{d}(X, Y) := |X - Y|$ der *Abstand* von X und Y.

$\big($zu 1. $\Phi(X, Y) = |X| \cdot |Y| \cdot \cos\big(\measuredangle(X, Y)\big)$ $\big)$

VII.35 Dreiecksungleichung

Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein euklidischer Vektorraum, $X, Y \in \mathcal{V}$. Danngilt:

$$|X + Y| \le |X| + |Y|$$

Beweis

Nach VII.33 gilt:

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow & \Phi(X,Y)^2 &\le \Phi(X,X)\Phi(Y,Y) \qquad \text{für alle} \quad X, Y \in \mathcal{V} \\
&\Leftrightarrow & 2\Phi(X,Y) &\le 2|X|\,|Y| \qquad \text{(da } \Phi \text{ positiv definit)} \\
&\Leftrightarrow & \Phi(X,X) + \Phi(Y,Y) + 2\Phi(X,Y) &\le \Phi(X,X) + \Phi(Y,Y) + 2|X|\,|Y| \\
&\Leftrightarrow & \Phi(X+Y, X+Y) &\le \Phi(X,X) + \Phi(Y,Y) + 2|X|\,|Y| \\
&\Leftrightarrow & |X+Y|^2 &\le (|X| + |Y|)^2
\end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung.

q.e.d.

VII.36 Bemerkung (Satz von Pythagoras, Eigenschaften der Abstandsfunktion)

Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein euklidisdcher Vektorraum.

1. **Satz von Pythagoras:**

$$X \perp Y \Rightarrow \Phi(X,X) + \Phi(Y,Y) = \Phi(X-Y, X-Y)$$

2. Die Abstandsfunktion d erfüllt folgende Eigenschaft

   (a) $\mathrm{d}(X,X) = 0 \qquad \mathrm{d}(X,Y) \geq 0$

   (b) $\mathrm{d}(X,Y) = \mathrm{d}(Y,X)$

   (c) $\mathrm{d}(X,Z) \leq \mathrm{d}(X,Y) + \mathrm{d}(Y,Z)$

Eine Menge $\mathcal{M}$ mit $\mathrm{d} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ mit 2. heißt *metrischer Raum.*

VII.37 Definition Orthogonalprojektion

Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein Euklidischer Vektorraum, $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$, $X \in \mathcal{V}$. $X_0 \in \mathcal{W}$ heißt *Orthogonalprojektion* von X auf $\mathcal{W}$ oder die *beste Aproximation* von X auf $\mathcal{W}$, falls gilt

$$|X - X_0| \leq |X - Y| \qquad \text{für alle} \quad Y \in \mathcal{W}$$

$|X - X_0|$ heißt dann der *Abstand von X und $\mathcal{W}$*. Die Abbildung

$$\pi : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : X \mapsto X_0$$

heißt *Orthogonalprojektion* (von $\mathcal{V}$) auf $\mathcal{W}$.

VII.38 Satz (Eigenschaft der Orthogonalprojektion)

Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein euklidischer Vektorraum, $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$.

1. Die Orthogonalprojektion π ist eine wohldefinierte (d. h. X_0 ist eindeutig), bezüglich Φ symmetrische $\big($d. h. $\Phi(X\pi, Y) = \Phi(X, Y\pi)\big)$ lineare Abbildung mit

$$\operatorname{Ker} \pi = \mathcal{W}^{\perp}, \qquad \operatorname{Bild} \pi = \mathcal{W} \quad \text{und} \qquad \pi^2 = \pi$$

2. Jede symmetrische lineare Abbildung $\pi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ mit $\pi^2 = \pi$ ist eine Orthogonalprojektion auf $\operatorname{Bild} \pi$ (entlang $\operatorname{Ker} \pi$)

Beweis

1. Φ ist positiv definit $\Rightarrow \quad \mathcal{V} = \mathcal{W} \perp \mathcal{W}^{\perp}$ also jedes $X \in \mathcal{V}$ läßt sich eindeutig darstellen als

$$X = X_{\mathcal{W}} + X_{\mathcal{W}^{\perp}} \qquad \text{mit} \quad X_{\mathcal{W}} \in \mathcal{W} \quad \text{und} \quad X_{\mathcal{W}^{\perp}} \in \mathcal{W}^{\perp}$$

   Behauptung: $X_0 = X_{\mathcal{W}}$
   Beweis:

$$|X - X_{\mathcal{W}}|^2 = |X_{\mathcal{W}^{\perp}}|^2 = \Phi(X_{\mathcal{W}^{\perp}}, X_{\mathcal{W}^{\perp}})$$

Setze $Y' = -Y + X_{\mathcal{W}}$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} |X-Y|^2 &= |X - X_{\mathcal{W}} + Y'|^2 \\ &= |X_{\mathcal{W}^\perp} + Y'|^2 \\ &= \Phi(X_{\mathcal{W}^\perp} + Y', X_{\mathcal{W}^\perp} + Y') \\ &= \Phi(X_{\mathcal{W}^\perp}, X_{\mathcal{W}^\perp}) + \underbrace{\Phi(Y', Y')}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Beachte: Da $Y' \in \mathcal{W}$ gilt $X_{\mathcal{W}^\perp} \perp Y'$, somit fallen die gemischten Terme weg $\big(\Phi(X_{\mathcal{W}^\perp}, Y') = \Phi(Y', X_{\mathcal{W}^\perp}) = 0\big)$ und $\Phi(Y', Y') = 0 \Leftrightarrow Y' = 0$. Also ist $X_0 = X_{\mathcal{W}}$ eindeutig bestimmt. Damit ist π wohldefiniert.
Zeige: π ist symmetrisch bezüglich Φ: Sei $X = X_{\mathcal{W}} + X_{\mathcal{W}^\perp}$ und $Y = Y_{\mathcal{W}} + Y_{\mathcal{W}^\perp}$

$$\begin{aligned} \Phi(X\pi, Y) &= \Phi(X_{\mathcal{W}}, Y_{\mathcal{W}} + Y_{\mathcal{W}^\perp}) \\ &= \Phi(X_{\mathcal{W}}, Y_{\mathcal{W}}) \\ &= \Phi(X_{\mathcal{W}^\perp} + X_{\mathcal{W}}, Y_{\mathcal{W}}) \\ &= \Phi(X, Y\pi) \qquad \checkmark \end{aligned}$$

2. $\pi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ ist linear mit $\pi^2 = \pi$. Da $\pi|_{\operatorname{Bild}\pi} = \operatorname{id}_{\operatorname{Bild}\pi}$ folgt: $\operatorname{Bild}\pi \cap \operatorname{Ker}\pi = \{0\}$. Also ist $\mathcal{V} = \operatorname{Bild}\pi \oplus \operatorname{Ker}\pi$ Sei nun zusätzlich π orthogonal.
Behauptung: *pi* symmetrisch $\quad \Rightarrow \operatorname{Bild}\pi \perp \operatorname{Ker}\pi$
Beweis: Sei $X \in \operatorname{Bild}\pi$ und $Y \in \operatorname{Ker}\pi$

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y) &= \Phi(X\pi, Y) \\ &= \Phi(X, \underbrace{Y\pi}_{=0}) \qquad \text{(da } \pi \text{ symmetrisch)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. Insgesamt ergibt sich:

(a) $\mathcal{V} = \operatorname{Bild}\pi \perp \operatorname{Ker}\pi$

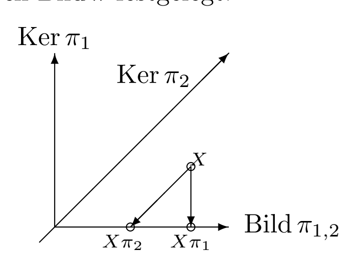
(b) π ist eine Orthogonalprojektion auf $\operatorname{Bild}\pi$

q.e.d.

VII.39 Bemerkung (Projection)

Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein euklidischer Vektorraum, $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$

1. Eine lineare nicht notwendig symmetrische Abbildung $\pi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ mit $\pi^2 = \pi$ heißt *Projektion.*
Beachte: π ist nicht eindeutig durch $\operatorname{Bild}\pi$ festgelegt.



Ferner ist $\pi' = \operatorname{id}_{\mathcal{V}} - \pi$ auch Projektion. Für π' gilt:

$$\operatorname{Bild}\pi' = \operatorname{Ker}\pi \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Ker}\pi' = \operatorname{Bild}\pi$$

2. Die Orthogonalprojektion läßt sich auf folgende 2 Arten ausrechnen:

   (a) Man wähle eine Orthonormalbasis von $\mathcal{W}$: $(E_1, \ldots, E_k)$ $\Rightarrow$ Die Orthogonalprojektion $X\pi$ von X auf $\mathcal{W}$ hat die Darstellung

   $$X\pi = \Phi(E_1, X)E_1 + \cdots + \Phi(E_k, X)E_k$$

   Die Zahlen $\Phi(E_i, X)$ heißen *Fourierkoeffizienten.*

   (b) Man wähle eine Orthonormalbasis von $\mathcal{W}^\perp$: $(E_{k+1}, \ldots, E_n)$. Die Orthogonalprojektion $X\pi$ von X auf $\mathcal{W}$ ist dann gegeben durch

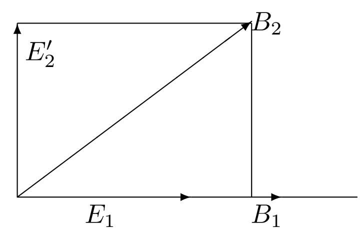
   $$X\pi = X - \big(\Phi(E_{k+1}, X)E_{k+1} + \cdots + \Phi(E_n, X)E_n\big)$$

   Beachte: $X = \Phi(X, E_1)E_1 + \cdots + \Phi(X, E_n)E_n$

3. Das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren VII.32 interpretiert sich wie folgt:

   $$E'_k = B_k - B_k\pi_{k-1}$$

   wobei π_{k-1} die Orthogonalprojektion von $\mathcal{V}$ auf $\langle B_1, \ldots, B_{k-1}\rangle$ ist.



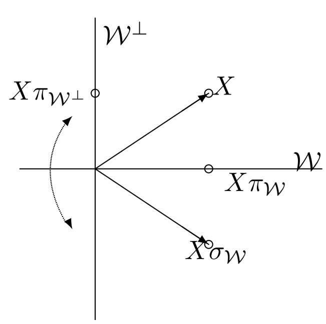
VII.40 Definition Spiegelung

Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein euklidischer Vektorraum, $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ mit $\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V} - 1$. Die Abbildung

$$\sigma_\mathcal{W} = \pi_\mathcal{W} - \pi_{\mathcal{W}^\perp}$$

heißt die *(orthogonal) Spiegelung* an $\mathcal{W}$. Im allgemeinen heißt eine Abbildung $\sigma : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ Spiegelung, falls ein $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}$ existiert mit

$$\dim \mathcal{W} = \dim \mathcal{V} - 1 \qquad \text{und} \qquad \sigma = \sigma_\mathcal{W}$$



Gegeben seien die 5 Meßwerte $a_1, \ldots, a_5$ an den Stellen $1, 2, 3, 4, 5$. Wäre die Messung genau, so lägen diese Werte auf einer Geraden, d. h. es existerien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit

$$a_i = \alpha \cdot i + \beta \qquad (i = 1, \ldots, 5)$$

Aber die Meßwerte haben Fehler, die Messungen bei 2, 3 und 4 sind doppelt so genau wie bei 1 und 5. Gesucht ist nun die beste Approximation.
Sei $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{V} = \mathbb{R}^M$ und $\mathcal{W} = \big\langle \underbrace{(1, 1, 1, 1, 1)}_{=1_M}, \underbrace{(1, 2, 3, 4, 5)}_{=\mathrm{id}_M} \big\rangle$. $(a_1, \ldots, a_5) \equiv$ Abbildung $i \mapsto a_i$. Seien $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{V}$

$$\Phi\big((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)\big) = x_1 y_1 + 2(x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4) + x_5 y_5$$

Bestimme eine Orthonormalbasis von $\mathcal{W}$:

$$\begin{aligned}
\Phi(1_M, 1_M) &= 8 \\
\Rightarrow \qquad E_1 &= \frac{1}{\sqrt{8}}(1, 1, 1, 1, 1) \\
E_2' &= \alpha E_1 + B_2 \\
\Phi(E_1, \alpha E_1 + B_2) &= \alpha \underbrace{\Phi(E_1, E_1)}_{=1} + \Phi(E_1, B_2) \ = \ 0 \\
\Rightarrow \qquad \alpha &= \frac{-\Phi(E_1, B_2)}{\underbrace{\Phi(E_1, E_1)}_{=1}} \\
E_2' &= -\frac{24}{8}(1, 1, 1, 1, 1) + (1, 2, 3, 4, 5) \\
&= (-2, -1, 0, 1, 2) \\
E_2 &= \frac{1}{\sqrt{\Phi(E_2', E_2')}} E_2' \\
&= \frac{1}{\sqrt{12}}(-2, -1, 0, 1, 2)
\end{aligned}$$

Die beste Approximation von $(a_1, \ldots, a_5)$ an $\mathcal{W}$ ist:

$$\frac{1}{\sqrt{8}}(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + 2a_4 + a_5)E_1 + \frac{1}{\sqrt{12}}(-2a_1 - 2a_2 + 2a_4 + 2a_5)E_2$$

Beispiel VII.7: Beste Approximation

VII.41 Bemerkung (orthogonale Abbildungen und Spiegelungen)

1. Spieglungen sind orthogonale Abbildungen. (D. h. sie ändern das Skalarprodukt nicht.)
2. Das Produkt orthogonaler Abbildungen ist wieder orthogonal. Die Inverse einer orthogonalen Abbildung existiert und ist wieder orthogonal. (D. h. die orthogonalen Abbildungen bilden eine Gruppe.)
3. Jede orthogonale Abbildung ist ein Produkt von endlich vielen Spiegelungen.
4. Ist $\mathcal{W} = X_0^\perp$ für ein $0 \neq X_0 \in \mathcal{V}$

$$\Rightarrow \quad \sigma_\mathcal{W} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : X \mapsto X - 2\frac{\Phi(X_0, X)}{\Phi(X_0, X_0)} X_0$$

Beweis

1. Sei $X = X_\mathcal{W} + X_{\mathcal{W}^\perp},\ Y = Y_\mathcal{W} + Y_{\mathcal{W}^\perp} \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}\Phi(X\sigma_\mathcal{W}, Y\sigma_\mathcal{W}) &= \Phi\big((X_\mathcal{W} - X_{\mathcal{W}^\perp}), (Y_\mathcal{W} - Y_{\mathcal{W}^\perp})\big)\\ &= \Phi(X_\mathcal{W}, Y_\mathcal{W}) + \Phi(X_{\mathcal{W}^\perp}, Y_{\mathcal{W}^\perp})\\ &= \Phi(X_\mathcal{W} + X_{\mathcal{W}^\perp}, Y_\mathcal{W} + Y_{\mathcal{W}^\perp})\\ &= \Phi(X, Y) \qquad \surd\end{aligned}$$

2. Seien $\alpha, \beta : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ orthogonal und $X, Y \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}\Phi(X\alpha\beta, Y\alpha\beta) &= \Phi(X\alpha, Y\alpha) && \text{(da } \beta \text{ orthogonal)}\\ &= \Phi(X, Y) && \text{(da } \alpha \text{ orthogonal)}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \alpha\beta$ ist orthogonal.
$\operatorname{Ker}\alpha = \{0\}$, denn sei $X \in \operatorname{Ker}\alpha$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \qquad 0 &= \Phi(X\alpha, X\alpha)\\ &= \Phi(X, X)\\ \Rightarrow \qquad X &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi(X\alpha^{-1}, Y\alpha^{-1}) &= \Phi(X\alpha^{-1}\alpha, Y\alpha^{-1}\alpha) && \text{(da } \alpha \text{ orthogonal)}\\ &= \Phi(X, Y)\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \alpha^{-1}$ ist orhtogonal.
(d. h. die orthogonalen Abbildungen von $\mathcal{V}$ bilden eine Untergruppe der Gruppe aller invertierbaren linearen Abbildungen von $\mathcal{V}$.)

3. Beweis nur für $\dim = 2$:
Sei $\mathfrak{B} = (E_1, E_2)$ eine Ortnormalbasis von $\mathcal{V}$ und $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ orthogonal mit

$${}_\mathfrak{B}\alpha_\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$1 = \Phi(E_1, E_1) = \Phi(E_1\alpha, E_1\alpha) = a^2 + b^2$$

$\Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 1 \qquad \Rightarrow \quad$ es existiert ein $\varphi \in [0, 2\pi)$, so daß $a = \cos\varphi$ und $b = \sin\varphi$

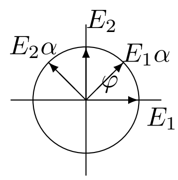
$$0 = \Phi(E_1, E_2) = \Phi(E_1\alpha, E_2\alpha) = ac + bd$$

$\Rightarrow \quad (c, d)$ ist ein vielfaches von $(-b, a)$. Ebenso wie oben ist $c^2 + d^2 = 1$. Es gibt also 2 Möglichkeiten:

(a)

$$ {}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{B}} = d(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} $$

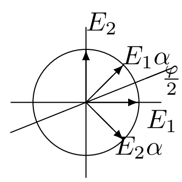
Die Matrix stellt eine Drehung um den Winkel φ dar. Es gilt: $\varphi = \measuredangle(X, X\alpha)$ ist unabhängig von $0 \neq X \in \mathcal{V}$



(b)

$$ {}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{B}} = s(\varphi) := \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} $$

Diese Matrix stellt eine Spiegelung dar. Die Spiegelachse ($\mathcal{W}$) schließt mit E_1 den Winkel $\frac{\varphi}{2}$ ein.



Mit Hilfe der Additionstheoreme für Sinus und Cosinus ergibt sich:

$$ \begin{aligned} d(\varphi_1)d(\varphi_2) &= d(\varphi_1 + \varphi_2) \\ s(\varphi_1)s(\varphi_2) &= s(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} $$

VII.42 Definition orthogonale Matrix

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, falls

$$ A \cdot A^{tr} = I_n \qquad (A^{-1} = A^{tr}) $$

VII.43 Satz (Matrix einer orthogonalen Abbildung)

Sei $(\mathcal{V}, \Phi)$ ein euklidischer Vektorraum, $\mathfrak{B}$ eine Orthonormalbasis und $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linear

1. α ist orthogonal $\quad\Leftrightarrow\quad$ ${}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{B}}$ ist orthogonal.
2. Sei $\mathfrak{C}$ eine weitere Basis von $\mathcal{V}$
   $\mathfrak{C}$ ist Orthonormalbasis $\quad\Leftrightarrow\quad$ ${}_{\mathfrak{C}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}}$ ist orthogonal.

Beweis

1. Seien $X, Y \in \mathcal{V}$ beliebig

$$ \begin{aligned} & \Phi(X\alpha, Y\alpha) = \Phi(X, Y) \\ \Leftrightarrow & (X_{\mathfrak{B}}\,{}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{B}}) I_n (Y_{\mathfrak{B}}\,{}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{B}})^{tr} = X_{\mathfrak{B}} I_n Y_{\mathfrak{B}}^{tr} \\ \Leftrightarrow & \quad {}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{B}} I_n \left({}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{B}}\right)^{tr} = I_n \qquad \surd \end{aligned} $$

2. Dies folgt sofort aus 1., wenn man ${}_{\mathfrak{C}}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}}$ als ${}_{\mathfrak{B}}\alpha_{\mathfrak{B}}$ auffaßt, d. h. als Matrix einer linearen Abbildung $\alpha : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Orthogonale Abbildungen überführen Orthogonalbasen in Orthogonalbasen und umgekehrt, d. h. eine lineare Abbildung, die eine Orthogonalbasis in eine Orthogonalbasis überführt ist orthogonal.

q.e.d.

Kapitel VIII

Determinanten

Vorbemerkung über die symmetrische Gruppe

VIII.1 Definition symmetrische Gruppe

Sei M eine Menge. Dann heißt

$$S_M := \{\pi \mid \pi : M \to M \quad \text{ist bijektiv }\}$$

Zusammen mit der Komposition

$$S_M \times S_M \to S_M : (\pi, \rho) \mapsto \pi\rho$$

die *symmetrische Gruppe* von M. Ist $M = \{1, \ldots, n\}$, so schreibt man auch S_n statt S_M.

VIII.2 Bemerkung (über S_n)

1. S_n ist eine Gruppe.
2. S_n hat $n!$ Elemente.

Beweis

1.
   - $S_n \neq \emptyset \quad$ denn $\quad \mathrm{id} \in S_n$.
   - Zeige Assoziativität: Dazu seien $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in S_n$ und $m \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned} m\big((\pi_1\pi_2)\pi_3\big) &= \big(m(\pi_1\pi_2)\big)\pi_3 \\ &= \big((m\pi_1)\pi_2\big)\pi_3 \\ &= (m\pi_1)(\pi_2\pi_3) \\ &= m\big(\pi_1(\pi_2\pi_3)\big) \end{aligned}$$

   - 1–Element: id : $\qquad \pi\,\mathrm{id} = \mathrm{id}\,\pi = \pi$
   - Inverses zu $\pi \in S_n$:

$$\pi^{-1} : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} : i \mapsto j \qquad \text{falls} \quad j\pi = i$$

   Dies ist wohldefiniert, da π bijektiv ist.

$$\Rightarrow \qquad \pi^{-1}\pi = \pi\pi^{-1} = \mathrm{id}$$

2. $\pi \in S_n$ ist eindeutig festgelegt durch $(1\pi, 2\pi, \ldots, n\pi)$. Da π bijektiv ist gibt es

   für $\mathbf{1\pi}$ n Möglichkeiten

   für $\mathbf{2\pi}$ $n-1$ Möglichkeiten

   für $\mathbf{3\pi}$ $n-2$ Möglichkeiten

   $\vdots$

   für $\mathbf{n\pi}$ eine Möglichkeit

   Insgesamt gibt es also $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten.

q.e.d.

VIII.3 Definition Zykel

Seien $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ k verschiedene Elemente. Dann bezeichnet $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ die Permutation σ von $\mathcal{S}_n$ mit $i_1\sigma = i_2, \ldots, i_k\sigma = i_1$ und $l\sigma = l$ mit $l \in \{1, \ldots, n\} - \{i_1, \ldots, i_k\}$. Man nennt $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ einen *k-Zykel*. 2-Zykel heißen auch *Transpositionen*.
klar: $(i_1, i_2, \ldots, i_k) = (i_2, \ldots, i_k, i_1)$

VIII.4 Lemma (Disjunkte Zykelschreibweise für Permutationen)

$\pi \in \mathcal{S}_n$. Dann kann π als Produkt von (höchstens n) disjunkten Zykeln geschrieben werden. Diese sind bis auf ihre Reihenfolge eindeutig. (Konvention: 1-Zykel werden nicht hingeschrieben.)

Beweis

Sei k_{i_1} minimal mit $i_1\pi^{k_{i_1}} = i_1$. Setze $\pi_1 := (i_1, i_1\pi, i_1\pi^2, \ldots, i_1\pi^{k_{i_1}-1})$.
Sei $i_2 \in \{1, \ldots, n\} - \{i_1, \ldots, i_1\pi^{k_{i_1}-1}\}$ $\pi_2 = (i_2, i_2\pi, \ldots, i_2\pi^{k_{i_2}-1})$
entsprechend: $\pi_3 = (i_3, i_3\pi, \ldots, i_3\pi^{k_{i_3}-1})$
d. h. nach endlich vielen Schritten:

$$\pi = \pi_1\pi_2 \cdots \pi_s$$

klar: π_i sind eindeutig durch π bestimmt, $\pi_i\pi_j = \pi_j\pi_i$ da Zykel nach Konstruktion disjunkt.

q.e.d.

VIII.5 Bemerkung (Produkt von Transpositionen)

Jedes $\pi \in S_n$ ist Produkt von Transpositionen.

Beweis

Für Zykel der Form $(i_1, \ldots, i_k)$ gilt:

$$(i_1, \ldots, i_k) = (i_1, i_2)(i_1, i_3) \cdots (i_1, i_k)$$

Da nun jedes $\pi \in S_n$ Produkt (= Hintereinanderausführung) disjunkter Zykel ist, folgt die Behauptung.

q.e.d.

1. Seien $\pi, \rho \in S_6$:

$$\pi : \begin{array}{rcl} 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 5 \\ 3 & \mapsto & 1 \\ 4 & \mapsto & 4 \\ 5 & \mapsto & 6 \\ 6 & \mapsto & 2 \end{array} \qquad \rho : \begin{array}{rcl} 1 & \mapsto & 6 \\ 2 & \mapsto & 5 \\ 3 & \mapsto & 3 \\ 4 & \mapsto & 2 \\ 5 & \mapsto & 4 \\ 6 & \mapsto & 1 \end{array}$$

   Man schreibt:

$$\pi = (1,3)(2,5,6)(4) \qquad \rho = (1,6)(2,5,4)(3)$$

2.

$$\begin{aligned} \pi &= (1,2)(1,3)(1,4)(1,6) \quad \text{ist nicht disjunkt} && \text{(VIII.1)} \\ &= (1,2,3,4,6)(5) \quad \text{ist disjunkt} && \text{(VIII.2)} \end{aligned}$$

   Die Zykelzerlegung (VIII.1) ist nicht disjunkt, da die 1 in mehreren Zykeln vorkommt. Betrachtet man die einzelnen Zykel dieser Zykelzerlegungen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (1,2,3,4,5,6) &\mapsto (2,1,3,4,5,6) \\ &\mapsto (2,3,1,4,5,6) \\ &\mapsto (2,3,4,1,5,6) \\ &\mapsto (2,3,4,6,5,1) \end{aligned}$$

   Die Zykelzerlegung (VIII.2) ist dagegen disjunkt.

Beispiel VIII.1: Zykelschreibweise

VIII.6 Definition Signum-Funktion

Die *Signum-Funktion* $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$ sei definiert durch

$$\pi \operatorname{sgn} := (-1)^{\pi f} \qquad \pi f = \left|\{(i,j) \in \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,n\}\ ;\ i < j \quad \text{und} \quad i\pi > j\pi\}\right|$$

VIII.7 Satz (Eigenschaften der Signum-Funktion)

1. Sei $\{1,\dots,n\} \to \mathbb{N} : i \mapsto x_i$ eine injektive Abbildung. Dann gilt für $\pi \in S_n$

$$\pi \operatorname{sgn} = \prod_{i<j} \frac{x_j - x_i}{x_{j\pi} - x_{i\pi}}$$

2. sgn ist ein Gruppenhomomorphismus, d. h.

$$(\pi_1 \pi_2) \operatorname{sgn} = (\pi_1 \operatorname{sgn})(\pi_2 \operatorname{sgn})$$

3.

$$(i,j) \operatorname{sgn} = -1$$

4.
$$(i_1, \ldots, i_k)\,\mathrm{sgn} = \begin{cases} 1 & \text{, falls } k \text{ ungerade} \\ -1 & \text{, falls } k \text{ gerade} \end{cases}$$

5. Für $\pi \in S_n$ ist die Anzahl der Transposition mit dem Produkt π mod 2 bestimmt.

Beweis

1. Das Produkt $\prod_{i<j}(x_{j\pi} - x_{i\pi})$ hat bis aufs Vorzeichen jeden Faktor des Produktes $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$. Die Anzahl der Vorzeichenänderungen ist πf. Also
$$\pi\,\mathrm{sgn} = \frac{\prod_{i<j}(x_j - x_i)}{\prod_{i<j}(x_{j\pi} - x_{i\pi})}$$

2.
$$\begin{aligned}(\pi_1\pi_2)\,\mathrm{sgn} &= \prod_{i<j} \frac{x_j - x_i}{x_{j\pi_1\pi_2} - x_{i\pi_1\pi_2}} \\ &= \prod_{i<j} \frac{x_j - x_i}{x_{j\pi_1} - x_{i\pi_1}} \cdot \prod_{i<j} \frac{x_{j\pi_1} - x_{i\pi_1}}{x_{j\pi_1\pi_2} - x_{i\pi_1\pi_2}} \\ &= \prod_{i<j} \frac{x_j - x_i}{x_{j\pi_1} - x_{i\pi_1}} \cdot \prod_{i<j} \frac{y_j - y_i}{y_{j\pi_2} - y_{i\pi_2}} \\ &= (\pi_1\,\mathrm{sgn}) \cdot (\pi_2\,\mathrm{sgn})\end{aligned}$$

3. Sei $i < j$:
$$\begin{aligned}(i,j)f &= \big|\{(i,i+1),(i,i+2),\ldots,(i,j-1),(i,j),(i+1,j),\ldots,(j-1,j)\}\big| \\ &= (j-i) + (j-(i+1)) \qquad \text{ist ungerade}\end{aligned}$$

4.
$$\begin{aligned}(i_1,\ldots,i_k)\,\mathrm{sgn} &= \big((i_1,i_2)(i_1,i_3)\cdots(i_1,i_k)\big)\,\mathrm{sgn} \\ &= (-1)^{k-1}\end{aligned}$$

5. Folgt aus 2. und 3.

q.e.d.

VIII.8 Definition Untergruppe, Rechtsrestklasse, Vertretersystem

1. Sei $\mathcal{G}$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{G}$ heißt *Untergruppe* von $\mathcal{G}$, falls
   (a) $\mathcal{U} \neq 0$
   (b) $u_1, u_2 \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad u_1u_2 \in \mathcal{U}$
   (c) $u \in \mathcal{U} \quad \Rightarrow \quad u^{-1} \in \mathcal{U}$

   Schreibweise: $\mathcal{U} \leq \mathcal{G}$

2. Sei $\mathcal{U} \leq \mathcal{G}$ und $g \in \mathcal{G}$. Dann heißt $\mathcal{U}g = \{ug \mid u \in \mathcal{U}\}$ eine *Rechtsrestklasse* von $\mathcal{U}$ in $\mathcal{G}$.

3. $M \subseteq \mathcal{G}$ heißt *Vertretersystem* der Rechtsrestklassen von $\mathcal{U}$ in $\mathcal{G}$ oder *Rechtstransversale*, falls für alle $g \in \mathcal{G}$ gilt: $|M \cap \mathcal{U}g| = 1$, d. h. M enthält aus jeder Rechtsrestklasse genau ein Element.

- Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $\mathcal{G} = S_n$. Der *Stabilisator* von S_n wird definiert als

$$\mathrm{Stab}_{S_n}(i) := \{\pi \in S_n \mid i\pi = i\} \leq S_n$$

  Dies ist die Menge aller π, die das Element i gleichlassen.

- Sei $(i, j) \in S_n$ eine Transposition $\quad \Rightarrow \quad \big\{\mathrm{id}, (i, j)\big\} \leq S_n$.

Beispiel VIII.2: Untergruppen der Symmetrischen Gruppe

VIII.9 Satz (Bijektion zwischen Rechtsrestklassen)

Sei $\mathcal{G}$ eine *endliche* Gruppe und $\mathcal{U} \leq \mathcal{G}$. Daraus folgt, daß je zwei Rechtsrestklassen gleichviele Elemente haben. D. h. es existiert eine Bijektion zwischen je zwei Rechtsrestklassen. Insbesondere gilt:

$$|M| := \quad \text{Anzahl der Restklassen} \quad = \frac{|\mathcal{G}|}{|\mathcal{U}|}$$

$\big(\Rightarrow \qquad |\mathcal{U}| \mid |\mathcal{G}| \quad \text{d. h. } |\mathcal{U}| \text{ teilt } |\mathcal{G}|\big)$

Beweis

Sei $g \in \mathcal{G}$. Die Abbildung $\mathcal{U} \to \mathcal{U}g : u \mapsto ug$ ist eine Bijektion.
Die Inverse dazu ist: $\mathcal{U}g \to \mathcal{U} : v \mapsto vg^{-1}$.

q.e.d.

1. Die Menge $\{(n, i) \mid (i = 1, \ldots, n)\} \quad ((n, n) = \mathrm{id})$ bildet ein Vertretersystem von $\mathrm{Stab}_{S_n}(n)$ in S_n. Die i-te Restklasse ist:

$$\mathrm{Stab}_{S_n}(n) \cdot (n, i) = \{\pi \in S_n \mid n\pi = i\}$$

   Beachte: $\mathrm{Stab}_{S_n}(n) \equiv S_{n-1}$ also $|S_n| = |S_{n-1}| \cdot n \qquad \Rightarrow \qquad |S_n| = n!$

2. Jedes $g \in \mathcal{G}$ läßt sich eindeutig schreiben als $g = uv$ mit $u \in \mathcal{U} \quad (\leq \mathcal{G})$ und $v \in M$ ($=$ Rechtstransversale von $\mathcal{U}$ in $\mathcal{G}$).

Beispiel VIII.3: Rechtsrestklassen

Determinanten

VIII.10 Definition Determinante, alternierend

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum der Dimension n mit einer Basis $\mathfrak{B}$. Eine Abbildung

$$\Delta : \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{n} \to K$$

heißt *Determinante* auf $\mathcal{V}$, falls sie folgende Eigenschaften hat:

1. Δ ist multilinear, d. h. für alle $i = 1, \ldots, n$ und $x_1, \ldots, x_i, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n \in \mathcal{V}, \quad a \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} \Delta(x_1, \ldots, x_{i-1}, a \cdot x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) &= a \cdot \Delta(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \\ \Delta(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n) &= \Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \Delta(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n) \end{aligned}$$

2. Δ ist *alternierend*, d. h. falls i und j mit $i \neq j$ und $x_i = x_j$ existieren, so gilt:

$$\Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = 0$$

3. $\Delta(B_1, \ldots, B_n) = 1$, falls $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$.

(1. und 2. besagen, daß Δ eine alternierende n–Linearform ist.)

VIII.11 Satz (Eigenschaften einer Determinanten)

Δ sei eine alternierende n-Linearform auf $\mathcal{V}$. Dann gilt:

1.
$$\Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = \Delta(x_1, \ldots, x_i + a \cdot x_j, \ldots, x_n) \qquad \text{für alle } j \neq i \text{ und } a \in K$$

2.
$$\Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = -\Delta(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

3. Für eine Permutation $\pi \in S_n$ ist

$$\Delta(x_{1\pi}, \ldots, x_{n\pi}) = \pi \operatorname{sgn} \cdot \Delta(x_1, \ldots, x_n)$$

Beweis

1.
$$\Delta(x_1, \ldots, x_i + a \cdot x_j, \ldots, x_n) = \Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \underbrace{a \cdot \Delta(x_1, \ldots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{x_j}, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{x_j}, \ldots, x_n)}_{=0} \quad \checkmark$$

2. An die Stellen k setze x_k, an die Stelle i und j setze $x_i + x_j$:

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(x_1, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_i + x_j, \ldots, x_n) \\ &= \Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \Delta(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + \\ & \Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + \Delta(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \\ &= \Delta(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) + \Delta(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \qquad \checkmark \end{aligned}$$

3. π ist das Produkt von Transpositionen und sgn ist multiplikativ. Also folgt die Behauptung aus 2.

q.e.d.

Frage: Existiert die Determinante?

- Sei $\dim \mathcal{V} = 1$, $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und $\mathfrak{B}^* = \{\delta\}$ die zu $\mathfrak{B}$ duale Basis von $\mathcal{V}^*$
  $\Rightarrow \quad \delta$ ist Determinante auf $\mathcal{V}$.
- Sei $\dim \mathcal{V} = 2$, $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und $\mathfrak{B}^* = \{\delta_1, \delta_2\}$ die zu $\mathfrak{B}$ duale Basis von $\mathcal{V}^*$

$$\delta_1 \otimes \delta_2 : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to K : (x_1, x_2) \mapsto (x_1\delta_1) \cdot (x_2\delta_2)$$

ist 2–linear, aber nicht alternierend, $\delta_2 \otimes \delta_1$ ebenso.

$$\Delta = \delta_1 \otimes \delta_2 - \delta_2 \otimes \delta_1$$

ist 2–linear und alternierend

$$\Delta(B_1, B_2) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

also ist Δ eine Determinante.

Beispiel VIII.4: Determinanten

VIII.12 Satz (Eindeutigkeit einer Determinante)

Falls eine Determinante auf $\mathcal{V}$ existiert, so ist sie eindeutig bestimmt, wenn die Basis $\mathfrak{B}$ fest vorgegeben ist.

Beweis

Sei $\mathfrak{B} = (B_1, \dots, B_n)$ und Δ eine Determinante auf $\mathcal{V}$. Jedes $x_i \in \mathcal{V}$ läßt sich eindeutig darstellen als

$$x_i = \sum_{j_i=1}^{n} a_{ij_i} B_{j_i} \qquad \text{für} \quad a_{ij_j} \in K$$

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1, \dots, x_n) &= \Delta\Big(\sum_{j_1=1}^{n} a_{ij_1} B_{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{ij_n} B_{j_n}\Big) \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \Delta\Big(B_{j_1}, \sum_{j_2=1}^{n} a_{2j_2} B_{j_2}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} B_{j_n}\Big. \\
&= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \Delta(B_{j_1}, \dots, B_{j_n})
\end{aligned}$$

Betrachte nun $(j_1, \dots, j_n)$ als Abbildung

$$1 \mapsto j_1 \qquad 2 \mapsto j_2 \quad \cdots \quad n \mapsto j_n$$

also $\pi : j \mapsto j_i$. Die Abbildung ist nicht bijektiv genau dann, wenn zwei j_i gleich sind. Daraus folgt aber daß $\Delta(B_{j_1}, \dots, B_{j_n}) = 0$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\pi \in S_n} a_{11\pi} \cdots a_{nn\pi} \Delta(B_{1\pi}, \dots, B_{n\pi}) \\
&= \sum_{\pi \in S_n} a_{11\pi} \cdots a_{nn\pi} \cdot \pi \,\mathrm{sgn}
\end{aligned}$$

q.e.d.

VIII.13 Satz (Existenz der Determinante)

Die Determinante existiert.

Beweis

Für $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{V}^*$ $\quad(\alpha_i : \mathcal{V} \to K$ linear) definiere eine multilineare Abbildung

$$\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_n : \mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V} \to K : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1\alpha_1)(x_2\alpha_2)\cdots(x_n\alpha_n)$$

Die n-linearen Abbildungen $\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V} \to K$ bilden einen K-Teilraum von $K^{\mathcal{V}\times\cdots\times\mathcal{V}}$. Sei nun $(\delta_1, \ldots, \delta_n) = \mathfrak{B}^*$ die Dualbasis zu $\mathfrak{B}$.

$$\Delta := \sum_{\pi \in S_n} (\pi \operatorname{sgn}) \cdot \delta_{1\pi} \otimes \cdots \otimes \delta_{n\pi}$$

ist n-linear und ist alternierend:

$$\begin{aligned}
\Delta(x_1, \ldots, \overset{\overset{i}{\downarrow}}{x}, \ldots, \overset{\overset{j}{\downarrow}}{x}, \ldots, x_n) &= \sum_{\pi \in S_n} (\pi \operatorname{sgn}) \cdot (x_1\delta_{1\pi})\cdots(x\delta_{i\pi})\cdots(x\delta_{j\pi})\cdots(x_n\delta_{n\pi}) \\
&= \sum_{\rho \in V} (\rho \operatorname{sgn}) \cdot \Big((x_1\delta_{1\rho})\cdots(x\delta_{i\rho})\cdots(x\delta_{j\rho})\cdots(x_n\delta_{n\rho}) \\
&\qquad -(x_1\delta_{1\rho})\cdots(x\delta_{j\rho})\cdots(x\delta_{i\rho})\cdots(x_n\delta_{n\rho})\Big) \\
&= 0
\end{aligned}$$

wobei V eine Rechtstransversale von $\{\mathrm{id}, (i,j)\} \leq S_n$ in S_n ist. Außerdem:

$$\Delta(B_1, \ldots, B_n) = \sum_{\pi \in S_n} \pi \operatorname{sgn} \underbrace{(B_1\delta_{1\pi})\cdots(B_n\delta_{n\pi})}_{=0 \text{ außer } \pi=\mathrm{id}} = 1$$

q.e.d.

VIII.14 Folgerung (Teilraum der Linearformen)

Die alternierenden n-Linearformen auf $\mathcal{V}$ bilden einen 1–dimensionalen Teilraum von $K^{\overbrace{\mathcal{V}\times\cdots\times\mathcal{V}}^{n}}$

Beweis

Aus Satz VIII.12 folgt, daß der Teilraum höchstens 1–dimensional ist und aus Satz VIII.13 wissen wir daß er mindestens 1–dimensional ist.

q.e.d.

VIII.15 Laplacescher Entwicklungssatz

Sei $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und $\mathfrak{B}^* = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ die zu $\mathfrak{B}$ duale Basis

$$\psi : \mathcal{V} \to \langle B_1, \ldots, B_{n-1}\rangle : a_1B_1 + \cdots + a_nB_n \mapsto a_1B_1 + \cdots + a_{n-1}B_{n-1}$$

ist Projektion von $\mathcal{V}$ auf $\langle B_1, \ldots, B_{n-1}\rangle$ mit Kern $\langle B_n\rangle$
Sei Δ_{n-1} Determinante von $\langle B_1, \ldots, B_{n-1}\rangle$ bezüglich $(B_1, \ldots, B_{n-1})$. Es gilt:

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j}(x_j\delta_n) \cdot \Delta_{n-1}(x_1\psi, \ldots, \widehat{x_j\psi}, \ldots, x_n\psi) \tag{VIII.3}$$

Beweis

Wegen der Existenz und Eindeutigkeit prüfe nur die definierenden Eigenschaften der Determinante nach.

1. Sei $x_k = ax'_k + bx''_k$. Prüfe im i-ten Summanden von (VIII.3) die Linearität nach:

   $\mathbf{i \neq k}$: ψ ist linear und Δ_{n-1} ist in der relevanten Komponente linear.

   $\mathbf{i = k}$: δ_n ist linear.

2. und 3. ebenso

2. Beweis

Arbeite mit $\mathrm{Stab}_{S_n}(n) \equiv S_{n-1}$ und einem Vertretersystem von $\mathrm{Stab}_{S_n}(n)$ in S_n

$$\underbrace{|S_n| = n! \qquad |\,\mathrm{Stab}_{S_n}(n)| = (n-1)!}$$

Falls man restklassenweise zusammenfaßt erhält man n Teilsummen.

q.e.d.

VIII.16 Bemerkung

Statt n kann man in der letzten Formel ein beliebiges k, $1 \leq k \leq n$ nehmen, d. h.

$$\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} (x_i \delta_k) \Delta_{n-1}(x_1\psi, \ldots, \widehat{x_j\psi}, \ldots, x_n\psi)$$

wobei $\psi : a_1B_1 + \cdots + a_nB_n \mapsto a_1B_1 + \cdots + \widehat{x_jB_k} + \cdots + x_n\psi)$ und Δ_{n-1} ist die Deteminante auf $\langle B_1, \ldots, \widehat{B_k}, \ldots, B_n\rangle$ bezüglich der Basis $(B_1, \ldots, \widehat{B_k}, \ldots, B_n)$

Beweis

Für $k = n$ ist dies schon bewiesen.
Sei nun $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ und $\mathfrak{B}' = (B_1, \ldots, B_{k-1}, B_n, B_{k+1}, \ldots, B_{n-1}, B_k)$. Dann ist $\Delta_{\mathfrak{B}} = -\Delta_{\mathfrak{B}'}$.
Jetzt wende $k = n$ an auf $\Delta_{\mathfrak{B}'}$ und gehe zu $\Delta_{\mathfrak{B}}$ zurück.

q.e.d.

VIII.17 Satz (Determinante und lineare Unabhängigkeit)

Sei Δ Determinante auf $\mathcal{V}$, $\dim \mathcal{V} = n$ und $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{V}$

$$(X_1, \ldots, X_n) \quad \text{ist linear unabhängig} \quad \Leftrightarrow \Delta(X_1, \ldots, X_n) \neq 0$$

Beweis

„$\Rightarrow$" Ist $\mathfrak{C} = (X_1, \ldots, X_n)$ linear unabhängig $\Rightarrow$ $\mathfrak{C}$ ist Basis von $\mathcal{V}$. Sei $\Delta_{\mathfrak{C}}$ die Determinante mit $\Delta_{\mathfrak{C}}(X_1, \ldots, X_n) = 1$
$\Rightarrow \quad \Delta_{\mathfrak{C}} = a\Delta \quad \text{mit} \quad 0 \neq a \in K$
$\Rightarrow \quad \Delta(X_1, \ldots, X_n) = a^{-1} \neq 0$

„$\Leftarrow$" Sei $(X_1, \ldots, X_n)$ linear abhängig. OBdA. sei $X_n = a_1X_1 + \cdots + a_{n-1}X_{n-1}$
$\Rightarrow \quad \Delta(X_1, \ldots, X_n) = \Delta(X_1, \ldots, X_{n-1}, 0) = 0 \qquad ϟ$

q.e.d.

Sei $\mathcal{V} = K^{4\times 1}$ und Δ normiert bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{S}_4$

$$
\begin{aligned}
\Delta(X_1,\ldots,X_n) &= \Delta_4\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\7\\8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\2\end{pmatrix}\right)\\
&= (-1)^5\cdot 4\cdot\Delta_3\left(\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)+\\
&\quad (-1)^6\cdot 8\cdot\Delta_3\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)+\\
&\quad (-1)^8\cdot 2\cdot\Delta_3\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\\
&= (-4)\cdot 5+8\cdot 1+2\cdot\Delta_3\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\-4\\-8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)\\
&= -20+8+2\cdot 8\\
&= 4
\end{aligned}
$$

Beispiel VIII.5: Entwicklung einer Determinanten

VIII.18 Definition Determinante einer Matrix

Die Funktion $\det : K^{n\times n}\to K$ sei definiert durch

$$\det(A) = \Delta(A_{\_1},\ldots,A_{\_n})$$

wobei $A_{\_i}$ die i-te Spalte von A ist und $\Delta = \Delta_{\mathfrak{S}_n}$ mit $\mathfrak{S}_n$ ist die Standardbasis von $K^{n\times 1}$. $\det(A)$ heißt die *Determinante der Matrix A*.

VIII.19 Satz (Determinante der Transponierten)

Es gilt $\det(A) = \det(A^{tr})$
D. h. $\det(A)$ hätte auch über die Zeilen der Matrix definiert werden können.

Beweis

Sei $\mathfrak{S}_n = (E_1,\ldots,E_n)$ und $A = (A_{ij}) = (A_{\_1},\ldots,A_{\_n})$

$$
\begin{aligned}
A_{\_i} &= \sum_{j_i=1}^{n} A_{j_i i}E_{j_i}\\
\det(A) &= \sum_{\pi\in S_n}(\pi\,\mathrm{sgn})A_{1\pi 1}\cdots A_{n\pi n}\\
&\overset{\rho=\pi^{-1}}{=} \sum_{\rho\in S_n}(\rho\,\mathrm{sgn})A_{11\rho}\cdots A_{nn\rho}\\
&= \det(A^{tr})
\end{aligned}
$$

q.e.d.

VIII.20 Folgerung (Entwicklung nach der k-ten Spalte)

Sei (A°_{ik}) die Matrix, die durch Streichen der i-ten Zeile und k-ten Spalte hervorgeht. Dann gilt:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+i} A_{ik} \det(A^{\circ}_{ik})$$

Beweis

Wende den Entwicklungssatz nach der k-ten Zeile auf A^{tr} an.

q.e.d.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (A^{\circ}_{23}) = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix} \\ \det A &= (-1)^4 \cdot 0 \cdot \det(A^{\circ}_{13}) + (-1)^5 \cdot 1 \cdot \det(A^{\circ}_{23}) + \\ & (-1)^6 \cdot 0 \cdot \det(A^{\circ}_{33}) + (-1)^7 \cdot 0 \cdot \det(A^{\circ}_{43}) \end{aligned}$$

Beispiel VIII.6: Entwicklung einer Determinante nach Spalten

VIII.21 Satz

Sei $A \in K^{n \times n}$. $A^{\circ} := \big((-1)^{i+j} \det(A^{\circ}_{ij})\big) \quad (\in K^{n \times n})$
$\Rightarrow \qquad AA^{\circ tr} = \det(A) \cdot I_n$

Beweis

Wir haben schon bei der Entwicklung nach der i-ten Zeile gesehen:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} A_{ij} (-1)^{i+j} \det(A^{\circ}_{ij})}_{i\text{-tes Diagonalelement von } A(A^{\circ})^{tr}} \qquad = \det A$$

Es ist für $k \neq i$:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{kj} (-1)^{i+j} \det(A^{\circ}_{ij}) = \det(A^{\text{-}k}) = 0$$

wobei $A^{\text{-}k}$ die Matrix ist, die aus A hervorgeht durch Ersetzen der j-ten Zeile durch die k-te Zeile. (Sind zwei Zeilen gleich, daraus folgt, daß die Determinante gleich 0 ist.)

q.e.d.

VIII.22 Cramersche Regel

Seien $A \in K^{n\times n}$, $B \in K^{n\times 1}$ und $AX = B$ ein lineares Gleichungssystem. Ist $\det A \neq 0$ so hat das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung $\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ mit

$$X_i = \frac{\det(A_{\_1}, \dots, \overset{i}{B}, \dots, A_{\_n})}{\det A}$$

Beweis

Es ist $X = A^{-1}B$ also $X \in K^{n\times 1}$ eindeutig bestimmt.

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^{n} X_i A_{\_i} \\ \det(A_{\_1}, \dots, \overset{i}{B}, \dots, A_{\_n}) &= \det(A_{\_1}, \dots, X_i A_{\_i}, \dots, A_n) \\ &= X_i \cdot \det(A) \end{aligned}$$

q.e.d.

VIII.23 Determinantenmultiplikationssatz

Seien $A, B \in K^{n\times n}$. Dann gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Beweis

Sei $\mathcal{V} = K^{n\times 1}$ (Spaltenraum), dann ist die Abbildung

$$\Delta_A : \underbrace{\mathcal{V} \times \cdots \times \mathcal{V}}_{n} \to K : (X_1, \dots, X_n) \mapsto \det(AX_1, \dots, AX_n)$$

alternierend und multilinear, also ein Vielfaches von Δ. (Sei Δ normiert bezüglich der Standardbasis $\mathfrak{S}_n = (E_1, \dots, E_n)$) Die Frage ist nun, welches Vielfache?
$\Delta_A(E_1, \dots, E_n) = \det(A)$ also $\Delta_A = \det(A) \cdot \Delta$ also gilt:

$$\det(AB) = \Delta_A(B_{\_1}, \dots, B_{\_n}) = \det A \cdot \det B$$

q.e.d.

VIII.24 Folgerung (generelle lineare Gruppe)

Die generelle lineare Gruppe $\mathrm{Gl}_n(K) = Gl(n, K) = \{X \in K^{n\times n} \mid \det(X) \neq 0\}$ ist eine Gruppe (bezüglich der Matrizenmultiplikation) und

$$\det : \mathrm{Gl}_n(K) \to K^* = K\backslash\{0\}$$

ist ein Gruppenhomorphismus mit der speziellen linearen Gruppe $\mathrm{Sl}_n(K) = \mathrm{Sl}(n, K) =$
$\{X \in K^{n\times n} \mid \det(X) = 1\}$ als Kern.

VIII.25 Definition Gruppenhomomorphismus

Seien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ Gruppen (multiplikativ geschrieben). Die Abbildung $\varepsilon : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ heißt *Gruppenhomomorphismus*, falls sie das Rechnen überträgt, d. h. seien $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$

$$\Rightarrow \qquad (\underbrace{g_1 \cdot g_2}_{\text{in } \mathcal{G}})\varepsilon = \underbrace{(g_1\varepsilon) \cdot (g_2\varepsilon)}_{\text{in } \mathcal{H}} \qquad (\Rightarrow \quad (g^{-1}\varepsilon) = (g\varepsilon)^{-1})$$

$\operatorname{Ker}\varepsilon := \{g \in \mathcal{G} \mid g\varepsilon = 1\}$ heißt der Kern von ε. ($\operatorname{Ker}\varepsilon$ ist eine Untergruppe von $\mathcal{G}$.)

VIII.26 Defintion Determinante einer Abbildung

Es sei $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ eine Basis von $\mathcal{V}$, Δ eine Determinante auf $\mathcal{V}$ und $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung.

$$\det\varphi := \frac{\Delta(B_1\varphi, \ldots, B_n\varphi)}{\Delta(B_1, \ldots, B_n)} \tag{VIII.4}$$

VIII.27 Satz (Eigenschaften der Determinante)

1. $\det\varphi$ ist unabhängig von
   (a) der Wahl von Δ und
   (b) der Wahl der Basis.
2. Ist $\mathfrak{B}$ Basis von $\mathcal{V}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\det\varphi = \det({}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}})$

Beweis

1. (a) Seien $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ Basen von $\mathcal{V}$. $\Delta_{\mathfrak{B}_1} = a\Delta_{\mathfrak{B}_2}$ mit $a = a(\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2) \in K\backslash\{0\}$. Aber a kürzt sich in der Gleichung (VIII.4) raus, d. h. $\det\varphi$ ist unabhängig von Δ.
   (b) Sei $\mathfrak{B}' = (B_1,', \ldots, B_n')$ eine weitere Basis von $\mathcal{V}$ mit $B_i' = \sum_{j=1}^n a_{ij}B_j$. Daraus folgt, daß $\det(a_{ij})$ sowohl im Nenner als auch im Zähler von (VIII.4) auftaucht, also ist $\det\varphi$ unabhängig von der Basis.
2. Sei oBdA. $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und $\Delta = \Delta_{\mathfrak{B}}$. Im Zähler von (VIII.4) steht: $\det({}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}}) \cdot 1$ und im Nenner steht 1.

q.e.d.

VIII.28 Bemerkung (Invarianten)

Bisher kannten wir zwei Invarianten von linearen Abbildungen $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, nämlich

1. Die Spur $\operatorname{Sp}\varphi := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ wobei $(a_{ij}) = {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}}$ für eine Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathcal{V}$.
2. $\det\varphi = \det{}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}}$

Invariant heißt hier unabhängig von der Wahl der Basis.

Betrachte folgende zwei Matrizen und deren Quadrate:

$$B := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$C := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Quadrate der Abbildungen sind gleich, aber es existiert kein $A \in \mathrm{Gl}_2(K)$ mit

$$A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

denn die Spur und die Determinante der beiden Matrizen sind nicht gleich: $\det B = -1$ aber $\det C = 1$ und $\operatorname{Sp} B = 0$ aber $\operatorname{Sp} C = -2$.

Beispiel VIII.7: Spur und Determinante

Interpretetion der Determinante im Falle reeller Vektorräume

VIII.29 Definition Parallelepiped, Volumen

Sei $\mathcal{V}$ ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit der Basis $\mathfrak{B}$ und $\Delta = \Delta_{\mathfrak{B}}$ die bezüglich $\mathfrak{B}$ normierte Determinante.

1. Für $X_1, \ldots, X_n \in \mathcal{V}$ heißt

   $$\mathrm{PE}(X_1, \ldots, X_n) := \{a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n \mid 0 \leq a_i \leq 1 \quad i = 1, \ldots, n\}$$

   das von $X_1, \ldots, X_n$ aufgespannte *Parallelepiped*.

   $$\mathrm{Vol}(X_1, \ldots, X_n) := |\Delta(X_1, \ldots, X_n)|$$

   heißt das *Volumen* von $\mathrm{PE}(X_1, \ldots, X_n)$ (bezüglich $\mathfrak{B}$ normiertes n-dimensionale Volumen).

2. Auf der Menge der Basen von $\mathcal{V}$ sei eine Äquivalenzrelation $\sim$ (gleichorientiert) definiert durch

   $$\mathfrak{C} = (C_1, \ldots, C_n) \sim \mathfrak{D} = (D_1, \ldots, D_n) \quad :\Leftrightarrow \quad \Delta(C_1, \ldots, C_n) \cdot \Delta(D_1, \ldots, D_n) > 0$$

VIII.30 Bemerkung (orientierte Volumenverzerrung)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter Vektorraum und $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung. Dann gibt $\det(\varphi)$ eine *orientierte Volumenverzerrung* wieder, d. h.

1. $\det \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ ist kein Isomorphismus, d. h. $\operatorname{Bild} \varphi \underset{\neq}{<} \mathcal{V}$
2. $\det \varphi > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ bildet jede Basis auf eine gleichorientierte Basis ab.
3. $\det \varphi < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi$ bildet jede Basis auf eine andersorientierte Basis ab.
4. Es gilt:

   $$|\det \varphi| = \frac{\mathrm{Vol}(B_1\varphi, \ldots, B_n\varphi)}{\mathrm{Vol}(B_1, \ldots, B_n)}$$

   mit $\mathfrak{B} = (B_1, \ldots, B_n)$ ist eine Basis.

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&0&1&3\\8&4&0&0\\1&2&4&3\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}-3&2&3&4\\2&0&1&3\\0&4&0&0\\-3&2&4&3\end{pmatrix}\\
&= (-1)^5\cdot 4\cdot\det\begin{pmatrix}-3&3&4\\2&1&3\\-3&4&3\end{pmatrix}+0\\
&= -4\cdot\det\begin{pmatrix}-9&3&-5\\0&1&0\\-11&4&-9\end{pmatrix}\\
&= -4\cdot(-1)^4\cdot\det\begin{pmatrix}-9&-5\\-11&-9\end{pmatrix}\\
&= -4\cdot(81-55)
\end{aligned}
$$

Beispiel VIII.8: Berechnung der Determinante einer Matrix

Betrachte 2-dimensionale orthogonale Abbildungen in dem 2-dimensionalen orthogonalen euklidischen Vektorraum $(\mathcal{V},\Phi)$. Sei $\varphi:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ eine orthogonale Abbildung und $\mathfrak{B}$ eine Orthonormalbasis.

${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$	${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ \sin\alpha & -\cos\alpha\end{pmatrix}$
Determinante $=1$	Determinante $=-1$
Spur $=2\cos\alpha$	Spur $=0$
Drehung um $\measuredangle\alpha$	Spiegelung
Volumen und Orientierung bleiben erhalten.	Volumen bleibt und Orientierung ändert sich.

Beispiel VIII.9: Drehung und Spiegelung

VIII.31 Definition Drehung

Sei $(\mathcal{V},\Phi)$ ein euklidischer Vektorraum und $\varphi:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ eine orthogonale Abbildung. (Insbesondere: $\det\varphi=\pm1$)
Ist $\det\varphi=+1$, so heißt φ *eigentlich orthogonal* oder *Drehung*.

VIII.32 Satz (Drehachse)

Sei $(\mathcal{V},\Phi)$ ein 3–dimensionaler euklidischer Vektorraum und $\varphi:\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ eine Drehung. Dann hat φ eine Drehachse, d. h. es existiert ein $X\in\mathcal{V},\quad X\neq 0$ mit $X\varphi=X$. Weiter existiert eine Orthonormalbasis $\mathfrak{B}$ von $\mathcal{V}$ mit

$$
{}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha & 0\\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

Diese Matrix hat die Spur $2\cos\alpha+1$.

Beweis

$$\begin{aligned} \text{es existiert} \quad X \neq 0 \quad X\varphi = X \quad &\Leftrightarrow \quad \operatorname{Ker}(\operatorname{id} - \varphi) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad \det(\operatorname{id} - \varphi) = 0 \end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{C}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{V}$. Daraus folgt, daß $A = {}_{\mathfrak{C}}\varphi_{\mathfrak{C}}$ eine orthogonale Matrix ist, d. h. $A^{tr} = A^{-1}$. φ ist Drehung, daraus folgt, daß $\det A = 1$:

$$\begin{aligned} \det(A - I) &= \det(A^{tr} - I) \\ &= \det(A^{-1} - I) \\ &= \det(A) \cdot \det(A^{-1} - I) \\ &= \det\bigl(A \cdot (A^{-1} - I)\bigr) \\ &= \det(I - A) \\ &= (-1)^3 \cdot \det(A - I) \\ \Rightarrow \qquad \det(A - I) &= 0 \end{aligned}$$

Wähle nun $X \in \operatorname{Ker}(\operatorname{id} - \varphi)$. Dann ist $\langle X \rangle^\perp$ ein 2–dimensionaler Vektorraum.

$$\langle X \rangle^\perp \varphi = \langle X\varphi \rangle^\perp = \langle X \rangle^\perp$$

Sei (B_1, B_2) Orthonormalbasis von $\langle X \rangle^\perp$, $B_3 = \frac{1}{\sqrt{\Phi(X,X)}} \cdot X$. Dann ist $\mathfrak{B} = (B_1, B_2, B_3)$ eine Basis von $\mathcal{V}$ mit

$${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

q.e.d.

Kapitel IX

Eigenwerte und Eigenvektoren

IX.1 Definition Eigenwert, –vektor, –raum

Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung und K ein beliebiger Körper. $X \in \mathcal{V}$ heißt *Eigenvektor* von φ, falls

1. $X \neq 0$
2. $X\varphi = a \cdot X \quad$ für ein $\quad a \in K$

a heißt dann *Eigenwert* (von φ zum Eigenvektor X). Ist a Eigenwert, so heißt
$E_a(\varphi) = \{X \in \mathcal{V} \mid X\varphi = aX\}$ *Eigenraum* zum Eigenwert a.

IX.2 Bemerkung

Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung, K ein beliebiger Körper, a ein Eigenwert und $E_a(\varphi)$ ein Eigenraum zum Eigenwert a.

1. $E_a(\varphi) = \operatorname{Ker}(a \cdot \operatorname{id}_{\mathcal{V}} - \varphi)$
2. a ist Eigenwert von $\varphi \quad \Leftrightarrow \quad a \cdot \operatorname{id}_{\mathcal{V}} - \varphi$ hat den Eigenwert 0 $\big($d. h. $\operatorname{Ker}(a \operatorname{id}_{\mathcal{V}} - \varphi) \neq \{0\}\big) \quad \Leftrightarrow$ $\det(a \operatorname{id}_{\mathcal{V}} - \varphi) = 0$

Zur Erinnerung

$K[X]$ ist der Polynomring in X über K. Genauso wie $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ eingebettet werden kann, kann der Ring $K[X]$ in den Körper $K(X) = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in K[X] \,,\; q \neq 0\}$ eingebettet werden. Dabei gilt:

$$\frac{p}{q} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{q}} \quad \Leftrightarrow \quad p\tilde{q} = \tilde{p}q$$

$K(X)$ heißt der Körper der *rationalen Funktionen* in X über K.

IX.3 Definition Charakteristisches Polynom, Hauptminor

1. Sei $A \in K^{n \times n}$. Dann heißt $p_A(x) := \det(x \cdot I_n - A) \in K[X]$ das *charakteristische Polynom* von A.
2. Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine Lineare Abbildung und $\mathfrak{B}$ eine Basis von $\mathcal{V}$. $p_\varphi(x) := p_{{}_\mathfrak{B}\varphi_\mathfrak{B}}(x)$ heißt das *charakteristische Polynom* von φ.
3. Sei $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $|J| = m \geq 1$ und $A \in K^{n \times n}$. Dann heißt $\det(A_{ij})_{i,j \in J}$ ein m–ter *Hauptminor* von A.

1. Sei $\mathcal{V}$ ein 2–dimensionaler Vektorraum mit der Basis $\mathfrak{B} = (B_1, B_2)$ und $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linear mit ${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   $\varphi^2 = \mathrm{id}_{\mathcal{V}} \quad \Rightarrow \quad$ ist a Eigenwert von $\varphi \quad \Rightarrow \quad a^2$ ist Eigenwert von $\varphi^2 = \mathrm{id}$, d. h. $a^2 = 1$
   $\Rightarrow \quad a = 1$ oder $a = -1$
   Wenn in K gilt $1 \neq -1$, so existieren 2 Eigenwerte: Eigenvektor $1 : B_1 + B_2$ und Eigenvektor $2 : B_1 - B_2$

2. Sei $\mathfrak{B}$ eine Basis aus Eigenvektoren von φ.
$$\Rightarrow \qquad {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$
   Die a_i $(i = 1, \ldots, n)$ sind die Eigenwerte von φ.

Beispiel IX.1: Eigenwerte

IX.4 Satz (charakteristisches Polynom & Eigenwerte)

1. Das charakteristische Polynom von A ist wohldefiniert.
2. Die Definition von $p_\varphi(x)$ ist unabhängig von der Basis $\mathfrak{B}$.
3. $a \in K$ ist Eigenwert von φ, genau dann wenn a Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist, d. h. $(x - a) | p_\varphi(x)$
4. $p_A(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \mp \cdots + (-1)^n a_n$
   mit $a_i =$ Summe der i–ten Hauptminoren von A. Insbesondere: $a_1 = \mathrm{Sp}(A)$ und $a_n = \det(A)$

Beweis

1. Wie oben gesehen ist $K[X] \subset K(X)$, also ist $p_A(x) \in K(X)$. Sei $B = xI_n - A = (B_{ij})$. Dann ist
$$p_A(x) = \sum_{\pi \in S_n} (\pi \,\mathrm{sgn}) \cdot B_{11\pi} \cdots B_{nn\pi}$$
   Da $B_{ii\pi} \in K[X]$ und $K[X]$ ein Ring ist, folgt $p_A(x) \in K[X]$.

2. Sei $A = {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}}$, $B = {}_{\mathfrak{B}'}\varphi_{\mathfrak{B}'}$ und $C = {}_{\mathfrak{B}'}\mathrm{id}_{\mathfrak{B}}$
$$\Rightarrow \qquad B = C \cdot A \cdot C^{-1}$$
   Dann gilt:
$$\begin{aligned} \det(xI_n - A) &= \det C \cdot \det(xI_n - A) \cdot \det C^{-1} \\ &= \det(xI_n - CAC^{-1}) \\ &= \det(xI_n - B) \end{aligned}$$

3. Sei $A = {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}}$
$$\begin{aligned} a \quad \text{ist Eigenwert von} \quad \varphi \quad &\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(a \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{V}} - \varphi) \neq \{0\} \\ &\Leftrightarrow \quad \det(a \cdot I_n - A) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p_\varphi(a) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (x - a) | p_A(x) \end{aligned}$$

4. Sei $I_n = (E_{\_1}, \ldots, E_{\_n})$ und $A = (A_{\_1}, \ldots, A_{\_n})$

$$
\begin{aligned}
\det(xI_n - A) &= \det(xE_{\_1} - A_{\_1}, xE_{\_2} - A_{\_2}, \ldots, xE_{\_n} - A_{\_n}) \\
&= x \cdot \det(E_{\_1}, xE_{\_2} - A_{\_2}, \ldots, xE_{\_n} - A_{\_n}) \\
&\quad - \det(A_{\_1}, xE_{\_2} - A_{\_2}, \ldots, xE_{\_n} - A_{\_n}) \\
\cdots &= x^n \cdot \det(E_{\_1}, \ldots, E_{\_n}) + \\
&\quad x^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \det(E_{\_1}, \ldots, E_{\_i-1}, -A_{\_i}, E_{\_i+1}, \ldots, E_{\_n}) + \qquad \text{(IX.1)} \\
&\quad x^{n-2} \sum_{i<j} \det(E_{\_1}, \ldots, E_{\_i-1}, -A_{\_i}, E_{\_i+1}, \ldots, -A_{\_j}, \ldots, E_{\_n}) + \text{(IX.2)} \\
&\quad \cdots + \det(-A_{\_1}, \ldots, -A_{\_n}) \\
&= \sum_{i=0}^{n} x^{n-i} (-1)^i \sum_{\substack{|J|=i \\ J \subseteq \{1,\ldots,n\}}} \det B_j \\
&= x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_n
\end{aligned}
$$

Betrachte nun das i–te Summenglied von (IX.1):

$$
\det \begin{pmatrix}
1 & & 0 & -A_{1i} & & & \\
& \ddots & & \vdots & & 0 & \\
& & 1 & \vdots & & & \\
& & & -A_{ii} & & & \\
& & & \vdots & 1 & & \\
& 0 & & \vdots & & \ddots & \\
& & & -A_{ni} & 0 & & 1
\end{pmatrix} = -A_{ii}
$$

Also ergibt sich für die Summe:

$$
(IX.1) = \sum_{i=1}^{n} -A_{ii} = -\operatorname{Sp}(A) = -a_1
$$

Betrachte nun das i–te Summenglied von (IX.2):

$$
\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix}
1 & & 0 & -A_{1i} & & & & -A_{1j} & & & \\
& \ddots & & \vdots & & 0 & & \vdots & & & \\
& & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\
& & & -A_{ii} & & & & -A_{ij} & & 0 & \\
& & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
& 0 & & -A_{ji} & & & 1 & -A_{jj} & & & \\
& & & \vdots & & & & \vdots & 1 & & \\
& & & \vdots & & 0 & & \vdots & & \ddots & \\
& & & -A_{ni} & & & & -A_{nj} & & & 1
\end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} -A_{ii} & -A_{ij} \\ -A_{ji} & -A_{jj} \end{pmatrix} \\
&= \det \begin{pmatrix} A_{ii} & A_{ij} \\ A_{ji} & A_{jj} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

dies ist der $\{i,j\}$–Hauptminor. Allgemeiner: Sei $J \subseteq \{1,\ldots,n\}$ $\det(B_1,\ldots,B_n)$ ist der $(-1)^{|J|}J$–Hauptminor von A mit

$$B_i = \begin{cases} -A_{\_i} & \text{, falls } \quad i \in J \\ E_i & \text{, falls } \quad i \notin J \end{cases}$$

J–Hauptminor von A: $\det(A_{ij})_{i,j\in J}$

q.e.d.

Die Fibonacci-Reihe ist definiert durch $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ und $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Betrachte nun folgende Abbildung:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (a_n, a_{n+1}) \mapsto (a_{n+1}, a_{n+2})$$

Sei $\mathfrak{S}_2$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Dann gilt für die Matrix der Abbildung:

$$A := {}_{\mathfrak{S}_2}\varphi_{\mathfrak{S}_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechne nun die Eigenwerte der Abbildung:

$$\det(xI_2 - A) = \det \begin{pmatrix} x & -1 \\ -1 & x-1 \end{pmatrix} = x(x-1) - 1 = x^2 - x - 1$$

Also hat φ die Eigenwerte $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Bestimme den Eigenvektor zum Eigenwert x_1, d. h. gesucht $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, so daß

$$(x,y) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & -1 \\ -1 & \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = (0,0)$$

$\Rightarrow$ Der Eigenvektor ist Vielfaches von $\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$. Analog erhält man zum Eigenwert x_2 den Eigenvektor $\left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Die Matrix von φ bezüglich der Basis aus den Eigenvektoren $\left(\left(1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)$ ist $\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Die Matrix von φ bezüglich der Eigenvektoren läßt sich leichter potenzieren und damit lassen sich die Glieder der Fibonacci-Reihe auch einfacher berechnen.

Beispiel IX.2: Berechnung der Glieder der Fibonaccireihe

IX.5 Satz (linear unabhängige Eigenvektoren)

Seien $a_1,\ldots,a_k$ verschiedene Eigenwerte einer linearen Abbildung $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ und $X_1^{(i)},\ldots,X_{n_i}^{(i)}$ seien linear unabhängige Eigenvektoren zum Eigenwert a_i. (Beachte: ${}^{(i)}$ ist ein Index und keine Potenz.)
$\Rightarrow$ $(X_1^{(1)},\ldots,X_{n_1}^{(1)},X_1^{(2)},\ldots,X_{n_2}^{(2)},\ldots,X_1^{(k)},\ldots,X_{n_k}^{(k)})$ ist linear unabhängig.

Beweis

Seien $a_l^{(i)} \in K$ und $X^{(i)}$ aus dem Eigenraum von φ bezüglich a_i mit

$$\sum_{i=1}^{k} \underbrace{\sum_{l=1}^{n_i} a_l^{(i)} X_l^{(i)}}_{=:X^{(i)} \in E_{a_i}(\varphi)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} X^{(i)} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} a_i \cdot X^{(i)} = 0 \qquad \text{nach Anwenden von } \varphi \tag{IX.3}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \cdot X^{(i)} = 0 \qquad \text{nach Anwenden von } \varphi \tag{IX.4}$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} a_i^{k-1} \cdot X^{(i)} = 0 \qquad \text{nach Anwenden von } \varphi \tag{IX.5}$$

Sei nun $A = (a_i^j)_{\substack{i=1,\dots,k \\ j=0,\dots,k-1}}$. (Beachte: hier sind die a_i^j Potenzen der Eigenwerte.) Fasse nun die Gleichungen (IX.3),(IX.4), ... , (IX.5) formal zusammen :

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ a_1 & \dots & a_k \\ a_1^2 & \dots & a_k^2 \\ & \vdots & \\ a_1^{k-1} & \dots & a_k^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(k)} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(k)} \end{pmatrix} = 0$$

Da die a_i Eigenwerte sind gilt:

$$\det A = \prod_{i>j} (a_i - a_j) \neq 0$$

(Diese Determinante wird auch als Vandermondsche Determinante bezeichnet.) $\Rightarrow$ A ist invertierbar.

$$\Rightarrow \quad A^{-1} A \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(k)} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d. h.} \quad \begin{pmatrix} X^{(1)} \\ \vdots \\ X^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{d. h.} \quad X^{(1)} = \dots = X^{(k)} = 0$$

Da $X^{(i)} = \sum_{l=1}^{n_i} a_l^{(i)} X_l^{(i)}$ und die $X_l^{(i)}$ linear unabhängig sind folgt $a_l^{(i)} = 0$ für $l = 1, \dots, n_i$ d. h. $(X_1^{(i)}, \dots, X_{n_k}^{(k)})$ ist linear unabhängig.

q.e.d.

IX.6 Definition Eigenvektorbasis

Eine Basis aus Eigenvektoren bezüglich φ heißt *Eigenvektorbasis* (bezüglich φ). ($\mathfrak{B}$ ist Eigenvektorbasis genau dann, wenn ${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}}$ in Diagonalgestalt ist.)

IX.7 Satz (Existenz einer Eigenvektorbasis)

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum der Dimension n und $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung mit n verschiedenen Eigenwerten in K. Dann hat $\mathcal{V}$ eine Eigenvektorbasis.

Beweis

Zu jedem Eigenwert existiert ein Eigenvektor ($\neq 0$). Nach Satz IX.5 sind diese linear unabhängig, daraus folgt, daß sie eine Basis bilden.

q.e.d.

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum, $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung und $\mathfrak{B}$ eine Eigenvektorbasis mit

$$_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} =: \mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$$

und dem charaktistischem Polynom $p_\varphi(X) = \prod_{i=1}^n (X - a_i)$. Setze nun φ (oder $_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}}$) in $p_\varphi(X)$ ein. Dann gilt:

$$p_\varphi(\varphi) = \prod_{i=1}^n (\varphi - a_i \,\mathrm{id}_{\mathcal{V}}) = 0$$

d. h. $p_\varphi(\varphi) = 0$ falls φ eine Eigenvektorbasis hat.

Beispiel IX.3: Einsetzen einer Abbildung in das charakteristische Polynom

IX.8 Satz (Hamilton – Cayley)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung mit dem charakteristischem Polynom

$$p_\varphi(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + x^n$$

Für jede lineare Abbildung $\psi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ sei

$$p_\varphi(\psi) = b_0 \,\mathrm{id}_{\mathcal{V}} + b_1\psi + \cdots + \psi^n$$

Dann gilt $p_\varphi(\varphi) = 0$ (0–Abbildung von $\mathcal{V}$).

Beweis

Sei $A = {_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}}}$. Zeige $p_\varphi(A) = 0$.
Sei $B = B_0 + xB_1 + \cdots + x^{n-1}B_{n-1}$ mit $B_i \in K^{n\times n}$ die Matrix der Kofaktoren von $(xI_n - A)$. Dann folgt mit Satz VIII.21:

$$(xI_n - A)B = (xI_n - A)(B_0 + xB_1 + \cdots + x^{n-1}B_{n-1}) = p_\varphi(x)I_n$$

Setze $B_{-1} = 0 \quad B_n = 0 \quad \in K^{n\times n}$.

$$\Rightarrow \qquad x^i B_{i-1} - x^i B_i A = x^i b_i I_n \qquad \text{für} \quad i \in \{0, \ldots, n\}$$

Löse nach b_i auf und setze in $p_\varphi(A)$ ein:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n} b_i A^i &= \sum_{i=0}^{n} (B_{i-1} - B_i A) A^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} (B_{i-1} A^i - B_i A^{i+1}) \\
(A^\circ = I_n) \qquad &= \underbrace{B_{-1} A^\circ}_{=0} - \underbrace{B_n A^{n+1}}_{=0} \;=\; 0
\end{aligned}$$

q.e.d.

IX.9 Folgerung (Invertierbare Abbildung nach Hamilton – Cayley)

Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine invertierbare lineare Abbildung. Dann existieren $c_i \in K$ mit

$$\varphi^{-1} = c_0 \operatorname{id}_{\mathcal{V}} + c_1 \varphi + c_2 \varphi^2 + \cdots + c_{n-1} \varphi^{n-1}$$

Beweis

$p_\varphi(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n$ nach Satz IX.8 folgt

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad 0 &= \varphi^n + b_{n-1} \varphi^{n-1} + \cdots + \underbrace{b_0}_{\pm \det \varphi} \operatorname{id}_{\mathcal{V}} \\
\Rightarrow \qquad \operatorname{id}_{\mathcal{V}} &= -\frac{1}{b_0} (\varphi^n + b_{n-1} \varphi^{n-1} + \cdots + b_1 \varphi) \\
&= \underbrace{-\frac{1}{b_0} (\varphi^{n-1} + b_{n-1} \varphi^{n-2} + \cdots + b_1 \operatorname{id}_{\mathcal{V}})}_{\varphi^{-1}} \varphi
\end{aligned}$$

q.e.d.

IX.10 Definition algebraisch abgeschlossen

Der Körper K heißt *algebraisch abgeschlossen*, falls jedes Polynom aus $K[X]$ vom Grad ≥ 1 eine Nullstelle in K hat (d. h. jedes Polynom in $K[X]$ zerfällt in Linearfaktoren).

Der Körper der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ ist algebraisch abgeschlossen. Allgemein gilt: zu jedem Körper K existiert ein algebraisch abgeschlossener Körper $\overline{K}$, der K enthält.

Beispiel IX.4: algebraisch abgeschlossener Körper

IX.11 Satz (Fächerbasis)

Sei $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum und $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung. Falls $p_\varphi(x)$ in K in Linearfaktoren zerfällt, dann existiert eine Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathcal{V}$, so daß ${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}}$ untere Dreiecksgestalt hat

$${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_n \end{pmatrix}$$

wobei $a_1, \dots, a_n$ die Eigenwerte von φ sind. $\mathfrak{B}$ heißt Fächer– oder Fahnenbasis.

Beweis

Sei a_1 ein Eigenwert von φ und B_1 Eigenvektor zu a_1.

$$\langle B_1\rangle\varphi \subseteq \langle B_1\rangle$$

Wäre B_1 erster Basisvektor, dann ist die erste Zeile der Matrix: $(a_1, 0, \dots, 0)$. Betrachte die von φ induzierte Abbildung φ_1:

$$\varphi_1 : \mathcal{V}/\langle B_1\rangle \to \mathcal{V}/\langle B_1\rangle : X + \langle B_1\rangle \mapsto X\varphi + \langle B_1\rangle$$

Dann ist $p_\varphi(x) = (x - a_1) \cdot p_{\varphi_1}(x)$. Sei a_2 Eigenwert von φ_1 und $\overline{B_2} = B_2 + \langle B_1\rangle$ der zugehörige Eigenvektor. Wenn der zweite Basisvektor B_2 ist, also $\mathfrak{B} = (B_1, B_2, \dots)$, dann sieht die Matrix folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \star & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & * & & & \\ & \vdots & & * & \end{pmatrix} \qquad B_2\varphi = \star B_1 + a_2 B_2 + 0 + \cdots + 0$$

Fahre fort mit der von φ induzierten Abbildung auf $\mathcal{V}/\langle B_1, B_2\rangle$ etc. irgendwann hört der Prozeß auf, da $\mathcal{V}$ endlich ist, d. h. wir haben dann eine Fächerbasis.

q.e.d.

Sei $K = \mathbb{R}$ und ${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ daraus folgt $p_\varphi(x) = x^2 + 1 \ \in \mathbb{R}[x]$ hat keine Nullstellen in $\mathbb{R}$. Ausweg: füge die Nullstelle von $x^2 + 1$ zu $\mathbb{R}$ hinzu und rechne in dem größeren Körper $\mathbb{C}$ ($i^2 = -1$). Dann existiert eine Bassitransformation die $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auf $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ transformiert.

Zwischenexkurs über Polynomringe und Körper

Zur Erinnerung

$K[X]$ ist ein Ring. Sei $p \in K[X]$, dann ist $\mathcal{V} = K[X]/pK[X]$ ein K-Vektorraum und $\dim \mathcal{V} = \mathrm{Grad}(p)$. Die Abbildung

$$m_x : K[X] \to K[X] : q \mapsto x \cdot q$$

induziert auf $\mathcal{V}$ eine Abbildung

$$\overline{m_x} : \mathcal{V} \to \mathcal{V} : \underbrace{\overline{q}}_{q + pK[X]} \mapsto \overline{xq}$$

Weiterhin gilt: $m_{x^2} = (m_x)^2$ und $\overline{m_{x^2}} = (\overline{m_x})^2$.

IX.12 Definition Ringhomomorphismus, Ideal

Seien $\mathcal{R}_1$ und $\mathcal{R}_2$ Ringe

1. $\alpha : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ heißt *(Ring–) Homomorphismus*, falls

$$\left.\begin{array}{rcl}(a+b)\alpha &=& a\alpha + b\alpha \\ (a\cdot b)\alpha &=& a\alpha \cdot b\alpha\end{array}\right\} \quad \text{für alle} \quad a,b \in \mathcal{R}_1$$

2. $\operatorname{Ker}\alpha := \{a \in \mathcal{R}_1 \mid a\alpha = 0\}$ heißt der *Kern* von α.

3. $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{R}_1$ heißt *Ideal* von $\mathcal{R}_1$, falls gilt:

   (a) $\mathcal{I}$ ist nicht leer.

   (b) $a, b \in \mathcal{I} \Rightarrow a + b \in \mathcal{I}$

   (c) $a \in \mathcal{I},\ b \in \mathcal{R}_1 \Rightarrow a \cdot b,\ b \cdot a \in \mathcal{I}$

   Schreibweise: $\mathcal{I} \trianglelefteq \mathcal{R}_1$

Beachte: Der Kern eines Ringhomomorphismus ist ein Ideal des Urbildringes.

1. Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum, $\mathcal{R}_1 = K[X]$ und $\mathcal{R}_2 = \operatorname{End}_K(\mathcal{V}) = \{\varphi \mid \varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V} \text{ ist linear }\}$. Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung.

$$\varepsilon : K[X] \to \operatorname{End}_K(\mathcal{V}) : p(x) \mapsto p(\varphi)$$

   ist ein Einsetzungshomomorphismus. Nach dem Satz von Hamilton Cayley IX.8 ist $p_\varphi(x) \in \operatorname{Ker}\varepsilon$.

2. Sei $\mathcal{R}_1 = K[X]$ und $\mathcal{R}_2 = \operatorname{End}_K(\mathcal{V})$ mit $\mathcal{V} = K[X]/pK[X]$ für ein festes $p \in K[X]$, $\operatorname{Grad} p = n \geq 1$.

$$\varepsilon : K[X] \to \operatorname{End}_K\big(K[X]/pK[X]\big) : q \mapsto \overline{m_q}$$

   Beachte: $\overline{m_q} = q(\overline{m_x})$. Klar ist: $pK[X] \subseteq \operatorname{Ker}\varepsilon$.

Beispiel IX.5: Ringhomomorphismus

IX.13 Homomorphiesatz für Ringe

1. Sei $\varphi : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ ein Ringhomomorphismus. Dann ist $\operatorname{Ker}\varphi \trianglelefteq \mathcal{R}_1$ und $\operatorname{Bild}\varphi = \mathcal{R}_1\varphi$ ein Teilring von $\mathcal{R}_2$.

2. Ist $\mathcal{I} \trianglelefteq \mathcal{R}$ ($\mathcal{R}$ Ring), dann ist $\mathcal{R}/\mathcal{I} := \{r + \mathcal{I} \mid r \in \mathcal{R}\} = \{r + i \mid r \in \mathcal{R},\ i \in \mathcal{I}\}$ wieder ein Ring (Restklassenring). Seien $r_1, r_2 \in \mathcal{R}$:

$$r_1 + \mathcal{I} = r_2 + \mathcal{I} \Leftrightarrow r_2 - r_1 \in \mathcal{I}$$
$$(r_1 + \mathcal{I}) + (r_2 + \mathcal{I}) := (r_1 + r_2) + \mathcal{I}$$
$$(r_1 + \mathcal{I}) \cdot (r_2 + \mathcal{I}) := (r_1 \cdot r_2) + \mathcal{I}$$

3. Ist $\varphi : \mathcal{R}_1 \to \mathcal{R}_2$ ein Ringhomomorphismus, dann folgt, daß $\operatorname{Bild}\varphi$ isomorph (als Ring) zu $\mathcal{R}_1/\operatorname{Ker}\varphi$ ist.

Beweis

2. Zeige die Verknüpfungen „ + “ und „ · “ sind wohldefiniert, z. B. „ · “:
   Sei $r_1 + \mathcal{I} = r_1' + \mathcal{I}$ und $r_2 + \mathcal{I} = r_2' + \mathcal{I}$ sowie $r_j' = r_j + a_j$ für ein $a_j \in \mathcal{I}$ $(j = 1, 2)$

$$\begin{aligned} r_1' r_2' &= (r_1 + a_1)(r_2 + a_2) \\ &= r_1 r_2 + \underbrace{r_1 a_2 + a_1 r_2 + a_1 a_2}_{\in \mathcal{I}} \end{aligned}$$

   d. h. $r_1' r_2' + \mathcal{I} = r_1 r_2 + \mathcal{I}$

3. wie bei Vektorräumen

q.e.d.

$$\varepsilon : \mathbb{R}[X] \to \mathrm{End}_{\mathbb{R}}\big(\underbrace{\mathbb{R}[X]/(x^2+1)\mathbb{R}[X]}_{\mathcal{V}}\big) : q \mapsto \overline{m_q}$$

$\mathcal{V}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $\big(1 + (x^2+1)\mathbb{R}[X], x + (x^2+1)\mathbb{R}[X]\big)$.

$$\begin{aligned} \varepsilon : 1 \mapsto \mathrm{id}_{\mathcal{V}} &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ x \mapsto \overline{m_x} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\mathrm{Bild}\,\varepsilon \equiv \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$. Der Restklassenring nach dem Kern ist isomorph zu $\mathrm{Bild}\,\varphi$. Der Kern besteht aus den Vielfachen von $(x^2+1)\mathbb{R}[X]$.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ -b' & a' \end{pmatrix} &=& \begin{pmatrix} (aa' - bb') & (ab' + ba') \\ -(ab' + ba') & (aa' - bb') \end{pmatrix} \\ \equiv \quad & (a\overline{1} + b\overline{x})(a'\overline{1} + b'\overline{x}) &=& aa'\overline{1} + ab'\overline{x} + ba'\overline{x} + bb' \underbrace{\overline{x}^2}_{=-\overline{x}} \\ & &=& (aa' - bb')\overline{1} + (ab' + ba')\overline{x} \end{aligned}$$

Beispiel IX.6: Ringhomomorphismus mit $\mathbb{R}[X]/(x^2+1)\mathbb{R}[X]$

IX.14 Definition Körper der komplexen Zahlen

$\mathbb{C} := \mathbb{R}[X]/(x^2+1)\mathbb{R}[X]$ heißt der Körper der komplexen Zahlen. $\overline{x}$ wird mit i bezeichnet $(i^2 = -1)$.

IX.15 Bemerkung („Hauptsatz der Algebra“)

1. $(a + bi)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a - bi) \qquad$ für $\quad (a, b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$

2. Der „Hauptsatz der Algebra“:
   Der Körper der komplexen Zahlen ist algebraisch abgeschlossen.

IX.16 Definition größter gemeinsamer Teiler, teilerfremd

Sei $\mathcal{R}$ ein kommutativer Ring mit 1.

1. Seien $a, b \in \mathcal{R}$. $a|b$ (a teilt b), falls ein $c \in \mathcal{R}$ existiert mit $a \cdot c = b$. (Ist $\mathcal{R}$ ein Körper, $a \neq 0$ und $b \in \mathcal{R}$, so folgt $a|b$ mit $c = \frac{b}{a}$)
2. Seien $b, c \in \mathcal{R}$. a heißt *größter gemeinsamer Teiler* von b und c, falls gilt:
   (a) $a|b$ und $a|c$
   (b) Sei $d \in \mathcal{R}$ mit $d|b$ und $d|c$, so folgt $d|a$

   Schreibweise: $a = \text{ggT}(b, c)$
3. $b, c \in \mathcal{R}$ heißen *teilerfremd*, falls 1 ein ggT von b und c ist ($1 = \text{ggT}(b, c)$).

Betrachte $\mathbb{Z}$:
$7|14 \qquad 2 = \text{ggT}(14, 6)$ ebenso $-2 = \text{ggT}(14, 6)$

Beispiel IX.7: größter gemeinsamer Teiler

IX.17 Der Euklidische Algorithmus

Seien $p, q \in K[X]$ mit Graden ≥ 1. $p_1 = p$ und $p_2 = q$ mit $\text{Grad}(p_i) = n_i \quad i = 1, 2$ Führe folgende Schritte durch:

(1) $p_1 = a_1 p_2 + p_3 \quad$ mit $\operatorname{Grad} p_3 = n_3 < n_1, n_2$

(2) $p_2 = a_2 p_3 + p_4 \quad$ mit $\operatorname{Grad} p_4 = n_4 < n_2, n_3$

$\vdots$

(k − 1) $p_{k-1} = a_{k-1} p_k + p_{k+1} \quad$ mit $\operatorname{Grad} p_{k+1} = n_{k+1} < n_k$

(k) $p_k = a_k p_{k+1}$

Dann gilt:

1. p_{k+1} ist größter gemeinsamer Teiler von p_1 und p_2 in $K[X]$.
2. Es existieren $b_1, b_2 \in K[X]$ mit $p_{k+1} = b_1 p_1 + b_2 p_2$

Beweis

2. **(1)** $p_3 = p_1 - a_1 p_2$
   Setze **(1)** in **(2)** ein: $p_2 = a_2(p_1 - a_1 p_2) + p_4 \quad \Leftrightarrow$
   (2) $p_4 = p_2 - a_2(p_1 - a_1 p_2) = (\underbrace{1 + a_2 a_1}_{c}) p_2 - a_2 p_1$
   Setze **(2)** in **(3)** ein:
   (3) $p_5 = -a_3(c p_2 - a_2 p_1) + p_3 = d p_1 - c p_2$
   etc.
   Fahre so fort, indem man jeweils die letzten beiden Ausdrücke in die nächste Gleichung einsetzt bis

$$p_{k+1} = b_1 p_1 + b_2 p_2$$

1. - Zeige: $p_{k+1}|p_1$ und $p_{k+1}|p_2$
   Beweis:

   (k) $\Rightarrow p_{k+1}|p_k$
   (k − 1) $\Rightarrow p_{k+1}|p_{k-1}$
   (k − 2) $\Rightarrow p_{k+1}|p_{k-2}$

   $\vdots$

   bis $p_{k+1}|p_1$ und $p_{k+1}|p_2$

   d. h. p_{k+1} ist gemeinsamer Teiler von p_1 und p_2.

   - Zeige: p_{k+1} ist größter gemeinsamer Teiler. Dazu durchlaufe **(1)** bis **(k)** von oben, dann folgt die Behauptung, oder:
   Sei $a \in K[X]$ mit $a|p_1$ und $a|p_2$, dann folgt mit 2. $a|p_{k+1}$ d. h. $p_{k+1} = \mathrm{ggT}(p_1, p_2)$

q.e.d.

IX.18 Definition irreduzibel

$p \in K[X]$ $(p \neq 0)$ vom Grad $n \geq 1$ heißt *irreduzibel*, falls p nicht als Produkt von Polynomen vom Grad ≥ 1 geschrieben werden kann. (Nur triviale Faktorisierungen sind möglich: $p = a(\frac{1}{a}p)$ mit $a \in K\backslash\{0\}$.)

1. $x^2 + 1$ ist in $\mathbb{R}[X]$ ein irreduzibles Polynom. Es ist aber reduzibel in $\mathbb{C}[X]$: $(x - i)(x + i)$.
2. Sei $p \in K[X]$ vom Grad ≤ 3. p ist irreduzibel genau dann, wenn p keine Wurzel in K hat.

Beispiel IX.8: Irreduzible Polynome

IX.19 Folgerung (Körper des Restklassenringes)

Sei $p \in K[X]$ irreduzibel vom Grad ≥ 1. Dann ist der Restklassenring $K[X]/pK[X]$ ein Körper.

Beweis

$K[X]/pK[X]$ ist ein Kommutativer Ring mit 1, denn $pK[X]$ ist ein Ideal von $K[X]$.
Zeige nun, daß jedes Element $\neq 0$ in $K[X]/pK[X]$ invertierbar ist.
Dazu sei $\overline{q} = q + pK[X] \neq 0$ in $K[X]/pK[X]$. OBdA. sei $\mathrm{Grad}\, q < \mathrm{Grad}\, p = n$. Da p irreduzibel ist gilt $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$ mit dem euklidischen Algorithmus folgt, daß $a, b \in K[X]$ existieren, mit $ap + bq = 1$.
Modulo $pK[X]$ ist dies $\overline{a}\underbrace{\overline{p}}_{0} + \overline{b}\,\overline{q} = \overline{1}$ d. h. $\overline{b} = \overline{q}^{\,-1}$ in $K[X]/pK[X]$.

q.e.d.

IX.20 Lemma (ggT und algebraisch abgeschlossene Körper)

Seien $p_1, p_2 \in K[X]$ und $\overline{K}$ ein algebraisch abgeschlossener Körper, der K umfaßt $(K \subseteq \overline{K})$.
$\mathrm{ggT}(p_1, p_2) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad p_1$ und p_2 haben in $\overline{K}$ keine gemeinsame Wurzeln.

Es gilt, wenn $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl ist, dann ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper. ($p\mathbb{Z}$ ist ein Ideal in $\mathbb{Z}$.)
Sei $p = 101$. Berechne in $\mathbb{Z}/101 \cdot \mathbb{Z}$ das inverse zu $\overline{11} = 11 + 101\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} 101 &= 9 \cdot 11 + 2 \\ 11 &= 5 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 &= 11 - 5 \cdot 2 \\ &= 11 - 5 \cdot (101 - 9 \cdot 11) \\ &= 46 \cdot 11 - 5 \cdot 101 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \overline{1} = \overline{46} \cdot \overline{11}$ d. h. $\overline{46} = 46 + 101\mathbb{Z} = \overline{11}^{-1}$ ist die gesuchte Zahl.

Beispiel IX.9: Körper eines Restklassenringes von $\mathbb{Z}$

Beweis

„$\Rightarrow$“ Annahme: es existiert eine gemeinsame Wurzel $\alpha \in \overline{K}$ von p_1 und p_2. Nach dem Euklidischen Algorithmus existieren $a_1, a_2 \in K[X]$ mit

$$a_1 p_1 + a_2 p_2 = 1$$

setze nun α ein:

$$0 + 0 = 1 \qquad \lightning$$

„$\Leftarrow$“ In $\overline{K}[X]$ seien p_1 und p_2 von der Gestalt

$$p_1 = s \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \qquad p_2 = t \prod_{j=1}^{m} (x - \beta_j) \qquad s, t \in \overline{K} \backslash \{0\} \quad \alpha_i \neq \beta_j \quad \forall\, i, j$$

Zeige: sogar in $\overline{K}[X]$ ist $\mathrm{ggT}(p_1, p_2) = 1$. Falls nicht existiert ein $\gamma \in \overline{K}[X]$ mit

$$(x - \gamma) | p_1 \qquad \text{und} \qquad (x - \gamma) | p_2$$

$\Rightarrow \quad p_1(\gamma) = 0 = p_2(\gamma) \quad \Rightarrow \quad$ es existieren i_0, j_0 mit $\alpha_{i_0} = \gamma = \beta_{j_0}$ dies ist ein Widerspruch (da $\alpha_i \neq \beta_j \quad \forall\, i, j$)

IX.21 Satz (Polynom als Produkt irreduzibler Polynome)

Jedes Polynom $p \in K[X]$ vom Grad ≥ 1 läßt sich als Produkt irreduzibler Polynome p_i schreiben

$$p = \prod_{i=1}^{k} p_i$$

wobei k eindeutig ist und die p_i bis auf Reihenfolge und Multiplikation mit Elementen aus $K \backslash \{0\}$ festgelegt sind.

Beweis

1. Die Existenz der Zerlegung ist klar, da irreduzible Polynome existieren. Betrachtet man den Grad der Polynome nach jedem Schritt der Zelegung, so wird der Grad der einzelnen Teilpolynome immer kleiner.

2. Zur Eindeutigkeit:
   Vorbemerkung: $1 = \mathrm{ggT}(p, q_i) \quad i = 1,2 \quad \Rightarrow \quad 1 = \mathrm{ggT}(p, q_1 \cdot q_2)$

   Sei also $p = \prod_{i=1}^{k} p_i = \prod_{j=1}^{n} q_j$. Daraus folgt, daß p_1 im Produkt der q_i vorkommt, denn sonst wäre $\mathrm{ggT}(p_1, q_j) = 1$ für $j = 1, \ldots, n$. Daraus würde nach der Vorbemerkung folgen: $\mathrm{ggT}(p_1, q_1 \cdots q_n) = 1 \quad ↯$
   Also existiert ein i_0 mit $\mathrm{ggT}(p_1, q_{i_0}) = p_1$, da p_1 irreduzibel ist. Da aber auch q_{i_0} irreduzibel ist, folgt

   $$q_{i_0} = a_1 p_1 \qquad \text{für ein} \quad a_1 \in K \backslash \{0\}$$

   Fahre nun fort mit $\frac{p}{p_1}$ und argumentiere ebenso für p_2. Durch Induktion folgt dann die Behauptung.

q.e.d.

Anwendung auf Matrizen linearer Abbildungen

IX.22 Satz (Teilräume nach charakteristischem Polynom)

Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung, $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum und das charakteristische Polynom sei $p_\varphi(x) = p_1(x) \cdot p_2(x)$ mit $\mathrm{Grad}\, p_i \geq 1$ und $\mathrm{ggT}(p_1, p_2) = 1$.
Dann existieren Teilräume $\mathcal{V}_i \leq \mathcal{V}$ mit

$$\mathcal{V}_i \varphi \subseteq \mathcal{V}_i \quad \text{für} \quad i = 1,2 \qquad \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$$

und das charakteristische Polynom von $\varphi_i = \varphi|_{\mathcal{V}_i} : \mathcal{V}_i \to \mathcal{V}_i$ ist gleich p_i. (Ist $\mathfrak{B}_i$ eine Basis von $\mathcal{V}_i$, dann ist $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ eine Basis von $\mathcal{V}$ und ${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} {}_{\mathfrak{B}_1}\varphi_{1\mathfrak{B}_1} & 0 \\ 0 & {}_{\mathfrak{B}_2}\varphi_{2\mathfrak{B}_2} \end{pmatrix}$)

Beweis

Nach dem euklidischen Algorithmus existieren $q_1, q_2 \in K[X]$ mit $q_1 p_1 + q_2 p_2 = 1$. Sei $\pi_2 = q_1(\varphi) p_1(\varphi)$ und $\pi_1 = q_2(\varphi) p_2(\varphi)$

$$\Rightarrow \qquad \pi_1 + \pi_2 = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$$
$${}_{\mathfrak{B}}\pi_{1\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad {}_{\mathfrak{B}}\pi_{2\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

aus Hamilton-Cayley folgt:

$$\pi_1 \cdot \pi_2 = q_1(\varphi) \underbrace{p_1(\varphi) p_2(\varphi)}_{=0} q_2(\varphi) = 0$$

$$\begin{aligned} \pi_2^2 &= \pi_2(\mathrm{id}_{\mathcal{V}} - \pi_1) \\ &= \pi_2 - \pi_1 \pi_2 \\ &= \pi_2 - 0 \end{aligned}$$

Ebenso $\pi_1^2 = \pi_1$, d. h. π_i sind Projektionen. Definiere nun $\mathcal{V}_i := \mathrm{Bild}\, \pi_i = \mathcal{V} \pi_i$. Da $\pi_1 \pi_2 = \pi_2 \pi_1 = 0$, $\pi_i^2 = \pi_i$ und $\pi_1 + \pi_2 = \mathrm{id}_{\mathcal{V}}$ ist sofort klar

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \qquad \mathcal{V}_i \varphi \subseteq \mathcal{V}_i$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_1\varphi &= \mathcal{V}q_2(\varphi)p_2(\varphi)\varphi \\ &= \mathcal{V}\varphi q_2(\varphi)p_2(\varphi) \\ &\subseteq \mathcal{V}\underbrace{q_2(\varphi)p_2(\varphi)}_{\pi_1} \\ &= V_1\end{aligned}$$

Zeige: $p\varphi_i = p_i$
OBdA. sei K algebraisch abgeschlossen, d. h. alle Wurzeln von p liegen in K. Dann ist klar, falls a Eigenwert von φ und $q(x) \in K[X]$, dann ist $q(a)$ Eigenwert von $q(\varphi)$. Sei nun

$$p_1(x) = \prod_{i=1}^{k}(x - a_i) \qquad p_2(x) = \prod_{i=1}^{l}(x - b_i)$$

Dann ist $a_i \neq b_j$ für alle i, j, da nach Vorraussetzung $\mathrm{ggT}(p_1 p_2) = 1$. Weiter hat $\pi_2 = p_1(\varphi) \cdot q_1(\varphi)$ den Eigenwert $0 = q_1(a_i)p_1(a_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$ und den Eigenwert $1 = q_1(b_i)p_1(b_i)$ $(i = 1, \ldots, l)$ (Beachte: Wegen $\pi_2^2 = \pi_2$ sind alle Eigenwerte $\in \{0, 1\}$.) Also $\varphi\pi_2$ hat die Eigenwerte

- $a_i \cdot 0 \quad (i = 1, \ldots, k)$ Eigenwert auf $\operatorname{Ker} \pi_2$ und
- $b_i \cdot 1 \quad (i = 1, \ldots, k)$ Eigenwert auf $\operatorname{Bild} \pi_2$.

Da nun $\varphi_2 = \varphi|_{\mathcal{V}_2} = \varphi\pi_2|_{\mathcal{V}_2}$ folgt, daß $p_1(x) = \prod_{i=1}^{l}(x - b_i)$ das charakteristische Polynom von φ_2 ist. Entsprechend für φ_1.

q.e.d.

IX.23 Folgerung

Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung, $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum und das charakteristische Polynom sei $p_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{k} p_i(x)$ und $\mathrm{ggT}(p_i, p_j) = 1$ für $i \neq j$ mit $\operatorname{Grad} p_i \geq 1$.
Dann existieren Teilräume $\mathcal{V}_i \leq \mathcal{V}$ mit

$$\mathcal{V}_i\varphi \subseteq \mathcal{V}_i \quad \text{für} \quad i = 1, \ldots, k \qquad \mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k$$

und falls $\varphi_i = \varphi|_{\mathcal{V}_i} : \mathcal{V}_i \to \mathcal{V}_i$ so hat φ_i das charakteristische Polynom $p_i(x)$.

Beweis

1. Benutze den vorigen Satz IX.22 und Induktion (z. B. $p_\varphi(x) = p_1 \cdot \widetilde{p_1}$ etc.)

2. Direkter Beweis:

$$s_i := \prod_{j \neq i} p_j \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ggT}(s_1, \ldots, s_k) = 1$$

Daraus folgt es existieren $q_i \in K[X]$ mit $q_1 s_1 + \cdots + q_k s_k = 1$. Setze $\pi_i = q_i(\varphi)s_i(\varphi)$ und führe den Beweis wie in Satz IX.22.

q.e.d.

IX.24 Folgerung

Sei $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linear und $\mathcal{V}$ ein endlich erzeugter K-Vektorraum. φ habe das charakeristische Polynom

$$p_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{n_i}$$

mit $a_i \in K$ paarweise verschieden. Dann existiert eine Basis $\mathfrak{B}$, so daß

$$
{}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c|c}
\begin{matrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_1 \end{matrix} & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & \begin{matrix} a_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_2 \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & \begin{matrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{matrix} & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & \begin{matrix} a_k & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & a_k \end{matrix}
\end{array}\right)
\begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n_1 \\ \vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}} \\ \vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\end{matrix}}\right\} n_k \end{matrix}
$$

Beweis

$\mathrm{ggT}\big((x-a_i)^{n_i}, (x-a_j)^{n_j}\big) = 1$ für $i \neq j$. Nach der Folgerung IX.23 $\Rightarrow$ es existieren $\mathcal{V}_i$ mit $\mathcal{V}_i\varphi \subseteq \mathcal{V}_i$ und $\varphi_i = \varphi|_{\mathcal{V}_i} : \mathcal{V}_i \to \mathcal{V}_i$ sowie $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{V}_k$ ($\Rightarrow$ 0-Blöcke). Wende auf $\mathcal{V}_i, \varphi_i$ den Satz IX.11 über die Fächerbasis an.

q.e.d.

Vereinfache die Blöcke auf der Diagonalen noch weiter:

Das Ziel ist es immer eine Basis $\mathfrak{B}$ zu finden, so daß

$$
{}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \left(\begin{array}{c|c|c}
\begin{matrix} a & & 0 & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & a \end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline
0 & \begin{matrix} b & & 0 & \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & b \end{matrix} & 0 \\ \hline
0 & 0 & \begin{matrix} \ddots & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{matrix}
\end{array}\right)
$$

Sei folgende Matrix gegeben:

$$ {}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad {}_{\mathfrak{B}}(\varphi - \mathrm{id})_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} $$

Definiere eine neue Basis $\mathfrak{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4)$ wie folgt:

$$ \begin{aligned} C_4 := (0,0,0,1) \quad &\overset{\varphi-\mathrm{id}}{\rightarrow} \quad (1,1,1,0) =: C_3 \\ &\overset{\varphi-\mathrm{id}}{\rightarrow} \quad (2,1,0,0) =: C_2 \\ &\overset{\varphi-\mathrm{id}}{\rightarrow} \quad (1,0,0,0) =: C_1 \\ &\overset{\varphi-\mathrm{id}}{\rightarrow} \quad (0,0,0,0) \end{aligned} $$

$$ \Rightarrow \qquad {}_{\mathfrak{C}}(\varphi - \mathrm{id})_{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad {}_{\mathfrak{C}}\varphi_{\mathfrak{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} $$

Beispiel IX.10: Vereinfachung einer Matrix

IX.25 Lemma (Kette von Teilräumen)

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum und $0 = \mathcal{V}_0 < \mathcal{V}_1 < \mathcal{V}_2 < \cdots < \mathcal{V}_{n-1} < \mathcal{V}_n = \mathcal{V}$ sei eine Kette von Teilräumen (Filtrierung). $(B_1^{(i)} + \mathcal{V}_i, \ldots, B_{n_i}^{(i)} + \mathcal{V}_i)$ sei eine Basis von $\mathcal{V}_{i+1}/\mathcal{V}_i$.
Dann ist $\mathfrak{B} = (B_1^{(1)}, \ldots, B_{n_1}^{(1)}, B_1^{(2)}, \ldots, B_{n_{n-1}}^{(n-1)})$ eine Basis von $\mathcal{V}$.

Beweis

Es gilt

$$ \dim \mathcal{V} = \sum_{i=1}^{n} \dim \mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1} $$

Daraus folgt, daß es genügt die lineare Unabhängigkeit von $\mathfrak{B}$ zu zeigen. Also zeige:

$$ \sum_{i,j} a_i^{(j)} B_i^{(j)} = 0 \qquad \overset{!}{\Rightarrow} \qquad a_i^{(j)} = 0 \quad \text{für alle} \quad i,j \tag{IX.6} $$

Betrachte die Gleichung (IX.6) modulo $\mathcal{V}_{n-1}$:

$$ \Rightarrow \qquad \sum_i a_i^{(n-1)} (B_i^{(n-1)} + \mathcal{V}_{n-1}) = 0 \qquad \Rightarrow \quad a_i^{(n-1)} = 0 \quad \text{für alle } i $$

Betrachte die Gleichung (IX.6) jetzt modulo $\mathcal{V}_{n-2}$:

$$ \Rightarrow \qquad \sum_i a_i^{(n-2)} (B_i^{(n-2)} + \mathcal{V}_{n-2}) = 0 \qquad \Rightarrow \quad a_i^{(n-2)} = 0 \quad \text{für alle } i $$

etc.

q.e.d.

IX.26 Definition Jordanblock, Blockdiagonalmatrix

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $a \in K$

1. $J_n(a) := \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & a \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$ ist der *a-Jordanblock* vom Grad n mit dem Eigenwert a.

2. Sei $A_i \in K^{n_i \times n_i}$ $(i = 1, \ldots, k)$

$$\mathrm{Diag}(A_1, \ldots, A_k) := \begin{pmatrix} A_1 & & & 0 \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & A_k \end{pmatrix}$$

heißt *Blockdiagonalmatrix*.

IX.27 Satz (Jordan-Normalform, lokaler Teil)

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum und $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ eine lineare Abbildung mit dem Polynom $p_\varphi(x) = (x - a)^n$

1. Es existiert eine Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathcal{V}$, so daß

$$_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \mathrm{Diag}\big(J_{l_1}(a), \ldots, J_{l_m}(a)\big)$$

mit $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_m$ und $n = \sum_{i=1}^m l_i$

2. Ist $\mathfrak{C}$ eine weitere Basis mit

$$_{\mathfrak{C}}\varphi_{\mathfrak{C}} = \mathrm{Diag}\big(J_{l'_1}(a), \ldots, J_{l'_{m'}}(a)\big)$$

mit $l'_1 \geq l'_2 \geq \cdots \geq l'_{m'}$ dann folgt: $m = m'$ und $l_i = l'_i \quad (i = 1, \ldots, m)$

Beweis

1. Ersetze φ durch $\varphi - a \cdot \mathrm{id}$, also oBdA. $a = 0$. Sei s minimal mit $\varphi^s = 0$ ($s \leq n$ nach Hamilton-Cayley) und $\mathcal{V}_i = \mathrm{Ker}\,\varphi^i \quad i = 0, 1, \ldots, s$ ($\varphi^0 = \mathrm{id}$). Da alles was durch φ^i auf 0 abgebildet wird, erst recht durch φ^{i+1} auf 0 abgebildet wird, gilt $\mathrm{Ker}\,\varphi^i \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi^{i+1}$ also:

$$\mathcal{V}_0 = \{0\} \leq \mathcal{V}_1 \leq \cdots \leq \mathcal{V}_{s-1} \leq \mathcal{V}_s = \mathcal{V}$$

Sei $X \in \mathcal{V}_j \quad \Rightarrow \quad X\varphi^j = 0$ also $(X\varphi)\varphi^{j-1} = 0$, d. h. $X\varphi \in \mathcal{V}_{j-1}$. Dann gilt

$$(\mathcal{V}_j)\varphi \leq \mathcal{V}_{j-1} \tag{IX.7}$$

Also induziert φ eine lineare Abbildung:

$$\mathcal{V}_j/\mathcal{V}_{j-1} \to \mathcal{V}_{j-1}/\mathcal{V}_{j-2} : V + \mathcal{V}_{j-1} \mapsto V\varphi + \mathcal{V}_{j-2}$$

Wegen (IX.7) ist diese Abbildung wohldefiniert und nach der Definition der $\mathcal{V}_i$ als $\mathrm{Ker}\,\varphi^i$ auch injektiv. Wähle nun $B_1, \ldots, B_{k_1}$ so daß

$$(B_1 + \mathcal{V}_{s-1}, \ldots, B_{k_1} + \mathcal{V}_{s-1}) \qquad \text{Basis von} \qquad \mathcal{V}/\mathcal{V}_{s-1} = \mathcal{V}_s/\mathcal{V}_{s-1}$$

$$
\begin{array}{r|l|l|l|l}
\mathcal{V}=\mathcal{V}_s & & & & \\
\mathcal{V}_{s-1} & B_1,\dots,B_{k_1} & & & \\
\mathcal{V}_{s-2} & B_1\varphi,\dots,B_{k_1}\varphi & B_{k_1+1},\dots,B_{k_2} & & \\
\mathcal{V}_{s-3} & B_1\varphi^2,\dots,B_{k_1}\varphi^2 & B_{k_1+1}\varphi,\dots,B_{k_2}\varphi & B_{k_2+1},\dots,B_{k_3} & \\
 & & \vdots & & \\
\mathcal{V}_1 & & & & \\
\mathcal{V}_0=\{0\} & B_1\varphi^{s-1},\dots,B_k\varphi^{s-1} & B_{k_1+1}\varphi^{s-2},\dots,B_{k_2}\varphi^{s-2} & \dots & B_{k_{s-1}+1},\dots,B_{k_s}
\end{array}
$$

Dann wähle $B_{k_1+1},\dots,B_{k_2}$ so daß

$$(B_1\varphi+\mathcal{V}_{s-2},\dots,B_{k_1}\varphi+\mathcal{V}_{s-2},B_{k_1+1}+\mathcal{V}_{s-2},\dots,B_{k_2}+\mathcal{V}_{s-2}) \qquad \text{Basis von} \qquad \mathcal{V}_{s-1}/\mathcal{V}_{s-2}$$

Dann wähle $B_{k_2+1},\dots,B_{k_3}$ so daß

$$(B_1\varphi^2+\mathcal{V}_{s-3},\dots,B_{k_1}\varphi^2+\mathcal{V}_{s-3},B_{k_1+1}\varphi+\mathcal{V}_{s-3},\dots,B_{k_3}\varphi+\mathcal{V}_{s-3}) \quad \text{Basis von} \quad \mathcal{V}_{s-2}/\mathcal{V}_{s-3}$$

usw. (Bilder zu Basis des Faktorraumes ergänzen).

Nach Lemma IX.25 ist $(B_1,\dots,B_{k_1},B_1\varphi,\dots,B_{k_s})$ eine Basis von $\mathcal{V}$. Wenn man obiges Diagramm von links beginnend, spaltenweise von unten nach oben liest, erhält man die Basis

$$\mathfrak{B}=(B_1\varphi^{s-1},B_1\varphi^{s-2},\dots,B_1,B_2\varphi^{s-1},\dots,B_2,\dots,B_{k_s})$$

bezüglich der die Matrix von φ folgende Gestalt hat

$$
{}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} \left.\underbrace{\begin{matrix} 0 & \dots & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{matrix}}_{s}\right\} s & 0 \\ & \ddots \\ & & \ddots \end{pmatrix}
$$

$$= \mathrm{Diag}\big(\underbrace{J_s(0),\dots,J_s(0)}_{k_1},\underbrace{J_{s-1}(0),\dots,J_{s-1}(0)}_{k_2-k_1},\dots,\underbrace{J_1(0),\dots,J_1(0)}_{k_s-k_{s-1}}\big)$$

2. Für die Eindeutigkeit der l_i in $\mathrm{Diag}\big(J_{l_1}(a),\dots,J_{l_m}(a)\big)$ genügt es zu zeigen, daß s und k_j eindeutig bestimmt sind, da die l_i aus s und k_j berechenbar sind. Sei also $\mathfrak{C}$ eine Basis mit (oBdA $a=0$)

$${}_{\mathfrak{C}}\varphi_{\mathfrak{C}} = \mathrm{Diag}\big(\underbrace{J_t(0),\dots,J_t(0)}_{k'_1},\underbrace{J_{t-1}(0),\dots,J_{t-1}(0)}_{k'_2-k'_1},\dots,\underbrace{J_1(0),\dots,J_1(0)}_{k'_t-k'_{t-1}}\big)$$

t muß minimal sein, mit $\varphi^t=0 \;\Rightarrow\; s=t$

$k'_1 \;=\dim\mathcal{V}/\operatorname{Ker}\varphi^{t-1}=k_1$

$k'_2-k'_1 \;=\dim\operatorname{Ker}\varphi^{t-1}/\operatorname{Ker}\varphi^{t-2}=k_2-k_1$

etc.

also $k'_i=k_i$

q.e.d.

IX.28 Allgemeine Jordan-Normalform

Sei $\mathcal{V}$ ein K-Vektorraum und $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linear mit dem charakteristischen Polynom

$$p_\varphi(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{n_i}$$

Dann existiert eine Basis $\mathfrak{B}$, so daß die Matrix von φ bezüglich $\mathfrak{B}$ wie folgt aussieht:

$${}_{\mathfrak{B}}\varphi_{\mathfrak{B}} = \mathrm{Diag}\big(A_1(a_1), \ldots, A_n(a_n)\big) \quad \text{mit} \quad A_i(a_i) = \mathrm{Diag}\big(J_{l_1(a_1)}(a_i), \ldots, J_{l_{m(a_i)}(a_i)}(a_i)\big)$$

wobei $l_1(a_i) \geq \cdots \geq l_{m(a_i)}(a_i)$ eindeutig durch φ festgelegt ist.

a) Anwendung auf homogene lineare Differentialgleichungen

IX.29 Definition $\mathcal{C}^i(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$\mathcal{C}^i(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f \text{ ist } i\text{-mal stetig differenzierbar}\}$$
$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^i(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

Es ist klar, daß alle $\mathcal{C}^i(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\mathbb{R}$-Vektorräume sind und

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \leq \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$
$$\dim \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \infty$$

Der Ableitungsoperator

$$D : \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ist linear.

IX.30 Definition lineare Differentialgleichung

Sei $p(x) = \underbrace{a_n}_{\neq 0} x^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ vom Grad $n \geq 1$.

$$p(D) : \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \mapsto fp(D) := a_n f^{(n)} + a_{n-1} f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f$$
$$\mathrm{Ker}\, p(D) := \{f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}) | fp(D) = 0\}$$

$fp(D) = 0$ heißt *homogene lineare Differentialgleichung* mit konstanten Koeffizienten der Ordnung n.

IX.31 Bemerkung

1. $f \in \mathrm{Ker}\, p(D) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
2. $\big(\mathrm{Ker}\, p(D)\big) D \subseteq \mathrm{Ker}\, p(D)$

Beweis

1. OBdA sei $a_n = 1$

$$\begin{aligned} f^{(n)} &= -(a_{n-1}f^{(n-1)} + \cdots + a_0 f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ \Rightarrow f^{(n+1)} &\in \langle f^{(n-1)}, \ldots, f\rangle \Rightarrow f^{(n+1)} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \end{aligned}$$

usw. also:

$$\begin{aligned} &f^{(n+k)} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow\ &f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \end{aligned}$$

2. $Dp(D) = p(D)D$

q.e.d.

1. $p(x) = x^3$

$$f''' = 0 \quad \Rightarrow \quad f = b_2\xi^2 + b_1\xi^1 + b_0\xi^0$$

mit

$$\xi^i : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto t^i$$

2. $p(x) = x - 1$

$$f' - f = 0 \quad \Rightarrow \quad f = a \cdot \exp_1$$

mit

$$\exp_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto e^{st}$$

3. $p(x) = (x-1)^2$

$$\begin{aligned} (f' - f)' - (f' - f) &= 0 \\ f'' - 2f' + f &= 0 \end{aligned}$$

$$q(x) = x - 1 \qquad p(x) = q(x)^2$$
$$\Rightarrow \operatorname{Ker} q(D) \leq \operatorname{Ker} p(D)$$
$$f' = f \Rightarrow f = \exp_1$$
$$\tilde{q}(D) = \operatorname{Ker} p(D)/\operatorname{Ker} q(D) \to \operatorname{Ker} q(D) \text{ ist injektiv}$$
$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} p(D) \leq 2$$
$$\operatorname{Ker} p(D) = \langle \exp_1, \xi \cdot \exp_1 \rangle$$

4. $p(x) = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$

$$f'' + f = 0$$

Problem: $x^2 + 1$ hat keine reellen Eigenwerte.

Beispiel IX.11: Differentialgleichungen

IX.32 Lemma (Dimension des Kerns)

Sei $\mathcal{V}$ ein nicht notwendig endlich erzeugter K-Vektorraum, $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linear mit $\dim \operatorname{Ker} \varphi = n$.

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker}(\varphi^k) \leq kn$$

Beweis

$\mathcal{V}_i := \operatorname{Ker}(\varphi^i) \Rightarrow \{0\} \leq \mathcal{V}_1 \leq \mathcal{V}_2 \leq \cdots \leq \mathcal{V}_k$
Behauptung: φ induziert eine injektive lineare Abbildung

$$\varphi_i : \mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1} \to \mathcal{V}_{i-1}/\mathcal{V}_{i-2} : V + \mathcal{V}_{i-1} \mapsto V\varphi + \mathcal{V}_{i-2}$$

klar: φ_i ist wohldefiniert und linear

$$\begin{aligned} V + \mathcal{V}_{i-1} \in \operatorname{Ker} \varphi_i &\Rightarrow V\varphi \in \mathcal{V}_{i-2} = \operatorname{Ker} \varphi^{i-2} \\ &\Rightarrow V \in \operatorname{Ker} \varphi^{i-1} = V_{i-1} \\ &\Rightarrow V + \mathcal{V}_{i-1} = 0 \end{aligned}$$

d. h. $\operatorname{Ker} \varphi_i = \{0\} \Rightarrow \varphi_i$ ist injektiv. Also

$$\dim \mathcal{V}_k = \sum \underbrace{\dim \mathcal{V}_i/\mathcal{V}_{i-1}}_{\leq \dim \mathcal{V}_1} \leq \sum \underbrace{\dim \mathcal{V}1}_{n} = kn$$

q.e.d.

IX.33 Definition Differenzierbarkeit komplexwertiger Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto f_1(t) + if_2(t)$$

mit f_1, f_2 reelwertig, heißt n-mal stetig differenzierbar, falls $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, und es gilt:

$$f' = f_1' + if_2'$$
$$\mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}) := \{f = f_1 + if_2 | f_i \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R}), i = 1, 2\}$$
$$D : \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^{n-1}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \text{ ist der Ableitungsoperator (eigentlich } D_{\mathbb{C}})$$

IX.34 Satz (Lösungsraum)

Sei

$$p(x) = \prod_{i=1}^{k} (x - a_i)^{n_i} \in \mathbb{C}[x]$$

Polynom vom Grad $n = \sum n_i$ mit $a_i \neq a_j$ für $i \neq j$. Für

$$p(D) : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : f \mapsto fp(D)$$

gilt:

1. $\dim \operatorname{Ker} p(D) = n$

1. $a = i\beta \in \mathbb{C}$ rein imaginär, d. h. $\beta \in \mathbb{R}$. Definiere:

$$\begin{aligned} \exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : t \mapsto \cos(\beta t) + i\sin(\beta t) \\ \Rightarrow \exp_a D = \exp_a' = a \cdot \exp_a \end{aligned}$$

2. $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{C} := \exp_\alpha \cdot \exp_{i\beta}$$

$$\begin{aligned} \exp_a' &= (exp_\alpha \cdot \exp_{i\beta})' \\ &= \exp_\alpha' \cdot \exp_{i\beta} + \exp_\alpha \cdot \exp_{i\beta}' \\ &= \alpha \cdot \exp_\alpha \cdot \exp_{i\beta} + i\beta \cdot \exp_\alpha \cdot \exp_{i\beta} \\ &= a \cdot \exp_a \end{aligned}$$

3. Zitat aus der Analysis:
Für $a \in \mathbb{C}$ gilt: $f' - af = 0$ hat $\langle \exp_a \rangle_{\mathbb{C}}$ als Lösungsmenge $\subseteq \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Beispiel IX.12: Komplexwertige Funktionen

2.

$$\operatorname{Ker} p(D) = \bigoplus_{i=1}^{k} \operatorname{Ker} p_i(D)$$

mit

$$\begin{aligned} p_i(x) &= (x - a_i)^{n_i} \\ \operatorname{Ker} p_i(D) &= \langle \exp_{a_i}, \xi \cdot \exp_{a_i}, \xi^2 \cdot \exp_{a_i}, \ldots, \xi^{n_i - 1} \cdot \exp_{a_i} \rangle_{\mathbb{C}} \end{aligned}$$

Beweis

2.

$$\tilde{p}_i(x) := \frac{p(x)}{p_i(x)} = \prod_{j \neq i} (x - a_j)^{n_j}$$

$\Rightarrow$ es existieren $q_i(x) \in \mathbb{C}[x]$ mit $q_1\tilde{p}_1 + \cdots + q_k\tilde{p}_k = 1$. Sei $D = D|_{\operatorname{Ker} p(D)}$.
Setzte für $f \in \operatorname{Ker} p(D)$

$$f_i := f q_i(D)\tilde{p}_i(D) \in \operatorname{Ker} p_i(D) \qquad (\tilde{p}_i p_i = p)$$

Es gilt: $f = f_1 + \cdots + f_k$
umgekehrt: Seien $f_i \in \operatorname{Ker} p_i(D) \Rightarrow f = f_1 + \cdots + f_k \in \operatorname{Ker} p(D)$
Also: $\operatorname{Ker} p(D) = \operatorname{Ker} p_1(D) + \cdots + \operatorname{Ker} p_k(D)$
durch Nachrechnen: $\xi^s \cdot \exp_{a_i} \in \operatorname{Ker} p_i(D)$ für $s = 0, 1, \ldots, n_i - 1$
Zeige nur noch $\dim \operatorname{Ker} p_i(D) = n_i$

$$\dim \operatorname{Ker}(D - a_i \cdot \mathrm{id}) = 1 \qquad \text{(siehe Beispiel 3)}$$

Lemma IX.32 mit $\varphi = D - a_i \cdot \mathrm{id}$ liefert

$$\dim \operatorname{Ker}(D - a_i \cdot \mathrm{id})^{n_i} \leq n_i \cdot 1$$

$\Rightarrow$ Behauptung

q.e.d.

IX.35 Bemerkung (inhomogene Differentialgleichungen)

Sei $0 \neq g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ Lösung einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten: $gq(D) = 0$ für ein $q(x) \in \mathbb{C}[x]$.Die inhomogene lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten $fp(D) = g$ zu lösen, reduziert sich auf das Lösen einer inhomogenen linearen Gleichungssystems:

$$fp(D)q(D) = 0$$

($\operatorname{Ker} p(D)q(D)$ ist endlich dimensional.)

IX.36 Definition komplexe Konjugation

$$\overline{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : a + ib \mapsto a - ib \qquad \text{mit } a, b \in \mathbb{R}$$

heißt *komplexe Konjugation*.

IX.37 Bemerkung

1. $\overline{}$ ist $\mathbb{R}$-linear und $\overline{xy} = \overline{x}\,\overline{y}, x, y \in \mathbb{C}$.
2. $\overline{}$ hat 1 und -1 als Eigenwerte
$$E_1(\overline{}) = \mathbb{R} = \{z + \overline{z} | z \in \mathbb{C}\}$$
3. $f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \Rightarrow \overline{(}f) \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ und $f + \overline{f} \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
4. $\overline{}$ und $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ sind miteinander vertauschbar.

IX.38 Satz (Lösungsräume nach $p(x)$)

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$p(x) = \prod_{i=1}^{s} \underbrace{(x - a_i)^{n_i}}_{p_i \in \mathbb{R}[x]} \cdot \prod_{j=s+1}^{t} \underbrace{\big((x - b_j)(x - \overline{b_j})\big)^{n_j}}_{\tilde{p}_j \in \mathbb{R}[x]}$$

die Zerlegung in $\mathbb{C}[x]$ respektive $\mathbb{R}[x]$ mit $a_i \in \mathbb{R}$ und $b_j \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\big(p(D_\mathbb{C})\big) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &= \{f + \overline{f} | f \in \operatorname{Ker} p(D_\mathbb{C})\} \\ &= \bigoplus_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} p_i(D_\mathbb{R}) \oplus \bigoplus_{j=s+1}^{t} \operatorname{Ker} \tilde{p}_j(D_\mathbb{R}) \end{aligned}$$

mit

$$\operatorname{Ker} \tilde{p}_j(D_\mathbb{R}) = \langle \exp_{\alpha_j} \cdot \sin_{\beta_j}, \exp_{\alpha_j} \cdot \cos_{\beta_j}, \xi \cdot \exp_{\alpha_j} \cdot \sin_{\beta_j}, \xi \cdot \exp_{\alpha_j} \cdot \cos_{\beta_j}, \ldots, \xi^{n_j - 1} \cdot \exp_{\alpha_j} \cdot \cos_{\beta_j} \rangle$$

$$\begin{aligned} b_j &= \alpha_j + i\beta_j \qquad \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R} \\ \sin_a &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \sin(at) \\ \cos_a &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \cos(at) \end{aligned}$$

Beweis

Sofort aus IX.36 und IX.37 3, 4.
$^-$ läßt $\operatorname{Ker} p_i(D_{\mathbb{C}})$ als Vektorraum invariant

$$^-p_i(D) = p_i(D)^-$$

$^-$ vertauscht $\operatorname{Ker}(D_{\mathbb{C}} - b_j \cdot \mathrm{id})$ mit $\operatorname{Ker}(D_{\mathbb{C}} - \overline{b_j} \cdot \mathrm{id})$. $\Rightarrow \operatorname{Ker} \tilde{p}_j(D)$ ist $^-$-invariant.

q.e.d.

IX.39 Definition homogene lineare Differentialgleichungssysteme

Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$
$(f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})^n$ heißt Lösung von

$$F' = F \cdot A$$

falls gilt:

$$(f_1', \dots, f_n') = (f_1, \dots, f_n)A$$

Bemerkung: Höhere Ableitungen lassen sich durch Vergrößerung von A vermeiden:

$$\begin{aligned} f'' = f \to f_1' = f_2 \qquad f_2' = f'1 \\ \to (f_1', f_2') = (f_1, f_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

b) Anwendung auf lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten

IX.40 Definition lineare Rekursion

Sei $n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_{n-1} \in K$

1. $$x_{i+n} = -(a_0 x_i + a_1 x_{i+1} + \cdots + a_{n-1} x_{i+n-1}) \tag{IX.8}$$

   heißt *lineare Rekursion* der Ordnung n mit konstanten Koeffizienten.

2. $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[x]$ heißt das *zugeordnete Polynom* der Rekursion.

3. $\mathcal{L}\big(p(x)\big) := \big\{(b_j)_{j\in\mathbb{Z}^{\geq 0}} \big| x_i = b_i \text{ erfüllt IX.8}\big\}$ heißt die *Lösungsmenge* von IX.8.
   Wie üblich wird $(b_j)_{j\geq 0}$ auch geschrieben als $\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ (erzeugende Funktion oder Potenzreihe der Lösung).

IX.41 Lemma (Dimension der Lösungsmenge)

1. $\mathcal{L}\big(p(x)\big)$ ist ein n-dimeansionaler Vektorraum.

2. $\sigma : \mathcal{L}\big(p(x)\big) \to \mathcal{L}\big(p(x)\big) : (b_0, b_1, b_2, \dots) \mapsto (b_1, b_2, \dots)$ ist eine lineare Abbildung mit charakteristischem Polynom $p_\sigma(x) = p(x)$.

Beweis

1. $\alpha : \mathcal{L}\big(p(x)\big) \to K^n : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_0, \dots, a_n)$ ist ein Isomorphismus von K-Vektorräumen.
   klar: α ist linear, surjektiv, $\operatorname{Ker}\alpha = 0$

2. klar: σ ist linear
   Sei $\mathfrak{B}$ das Urbild von $\mathfrak{S}_n$ von K^n unter α

$$\alpha : \mathcal{L}\big(p(x)\big) \to K^n : (b_0, b_1, \dots) \mapsto (b_0, \dots, b_{n-1})$$

   $\big($d. h. $\mathfrak{B} = \big((1, 0, \dots, 0, -a_0, \dots), (0, 1, 0, \dots, 0, -a_1, \dots), \dots, (0, \dots, 0, 1, -a_{n-1})\big)\big)$.

$$_{\mathfrak{B}}\sigma_{\mathfrak{B}} = \begin{pmatrix} 0 & & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

   Diese Matrix gleicht der Transponierten von $\overline{m_x} : K[x]/p(x)K[x] \to K[x]/p(x)K[x]$
   $\Rightarrow$ das charakteristische Polynom ist $p_\sigma(x) = p(x)$.

q.e.d.

IX.42 Satz (Teilräume nach dem zugeordneten Polynom)

1. $p(x) = \prod_{i=1}^{k} p_i(x)$ mit $p_i(x) \in K[x]$ und $\operatorname{ggT}(p_i, p_j) = 1$ für $i \neq j$.

$$\Rightarrow \mathcal{L}\big(p(x)\big) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathcal{L}\big(p_i(x)\big)$$

2. Sei $p(x) = (x - a)^n$. Dann gilt:

$$(a_i) \in \mathcal{L}\big(p(x)\big) \Leftrightarrow \text{ es existiert ein } q(x) \in K[x] \text{ vom Grad} < n \text{ mit } a_i = q(i) \cdot a^i$$

Beweis

1. sofort aus IX.21

2. Zeige nur „$\Leftarrow$“, denn die angegebenen Folgen bilden bereits einen n-dimensionalen Vektorraum, „$\Leftarrow$“ folgt also nach IX.41.
   „$\Rightarrow$“: Zeige $(i^k a^i)_{i \geq 0} \in \mathcal{L}\big(p(x)\big)$ für $k = 0, 1, \dots, n-1$.
   Induktion über n: $n = 1$ $\quad\surd$
   Induktionsannahme: $(a_i)_{i \geq 0} \in \mathcal{L}\big(p(x)\big)$ für $a_i = i^k a_i \qquad k = 0, 1, \dots, n-1$
   Induktion:
   $(a_i)_{i \geq 0} \in \mathcal{L}\big((x-a)^{n+1}\big)$ für $a_i = i^n a^i$
   Beweis: $(a_i)_{i \geq 0}(a \cdot \operatorname{id} - \sigma) = (b_i)_{i \geq 0}$ mit

$$\begin{aligned} b_i &= a \cdot a_i - a_{i+1} \\ &= a i^n a^i - (i+1)^n a^{i+1} \\ &= -a\big((i+1)^n - i\big) a^i \\ &= -a q(i) a^i \end{aligned}$$

   mit $q(x) \in K[x]$ vom Grad $< n$. Also

$$(a_i)_{i \geq 0}(a \cdot \operatorname{id} - \sigma) \in \mathcal{L}\big((x-a)^n\big) \Rightarrow (a_i)_{i \geq 0} \in \mathcal{L}\big((x-a)^{n+1}\big)$$

IX.43 Bemerkung

1. $K\big[[x]\big]$ bildet einen kommutativen Ring mit 1 bezüglich der Multiplikation
$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j x^j\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k\right)$$
mit $c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \cdots + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$.
2. $K[x]$ ist ein Teilring von $K\big[[x]\big]$.
3. $1 - ax$ ist invertierbar in $K\big[[x]\big]$ mit dem Inversen
$$\frac{1}{1-ax} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i$$
4. $$\frac{1}{1-ax}\sigma = a \cdot \frac{1}{1-ax}$$
5. $\mathcal{L}\big((x-a)^k\big) = \left\langle \frac{1}{1-ax}, \frac{1}{(1-ax)^2}, \dots, \frac{1}{(1-ax)^{k-1}} \right\rangle_K$
6. Für $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 \in K[x]$ mit $a_0 \neq 0$ sei $\tilde{p}(x) := \frac{1}{a_0} x^n p\big(\frac{1}{x}\big) \in K[x]$ d. h.
$$p = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i) \Rightarrow \tilde{p} = \prod_{i=1}^{n} (1 - \alpha_i x)$$
Dann gilt:
$$\mathcal{L}\big(p(x)\big) = \left\{ \frac{q(x)}{p(x)} \in K\big[[x]\big] \,\middle|\, q(x) \in K[x] \text{ mit } \operatorname{Grad} q(x) < n \right\}$$

Beweis

1. Nachrechnen
2. $\surd$
3. Geometrische Reihe:
$$(1-ax)\sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} a^i x^i - \sum_{i=1}^{\infty} a^i x^i = 1$$
4. allgemein:
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right)\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} b_{i+1} x^i$$
$\Rightarrow$ Behauptung
5. **1. Beweis:** Behauptung folgt aus dem letzen Satz
2. Beweis: $(AB)\sigma = A(\beta\sigma) + b_0 A\sigma$ für $A, B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in K\big[[x]\big]$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1-ax}\right)^{(k-1)+1}\sigma = \left(\frac{1}{1-ax}\right)^{k-1}\frac{a}{1-ax} + 1 \cdot \left(\frac{1}{1-ax}\right)^{k-1}\sigma$$
Duch Induktion folgt die Behauptung.

6. Aus 5 durch Multiplikation in $K\big[[x]\big]$.

q.e.d.

Beachte: Der Schiebeoperator $\sigma : K\big[[x]\big] \to K\big[[x]\big]$ ist sehr verwandt mit dem Differenzenoperator $\Delta : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_1 - a_0, a_2 - a_1, \dots)$, denn $\Delta = \sigma - \mathrm{id}$.
Also lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten können analog zu linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten behandelt werden.

Rechnerische Bestimmung des charakteristischen Polynoms

IX.44 Definition Minimalpolynom

1. Sei k minimal, so daß $(\mathrm{id}_\mathcal{V}, \varphi, \varphi^2, \dots, \varphi^k)$ linear abhängig ist in $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{V}, \mathcal{V})$.
   $m_\varphi(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + x^k \in K[x]$ mit $a_0 \,\mathrm{id}_\mathcal{V} + a_1\varphi + a_2\varphi^2 + \cdots + \varphi^k = 0$ heißt das *Minimalpolynom* von φ.

2. Für $0 \neq V \in \mathcal{V}$ sei k minimal mit $(V, V\varphi, V\varphi^2, \dots, V\varphi^k)$ linear abhänging in $\mathcal{V}$.
   $m_{\varphi,V}(x) := a_0 + a_1 x + \cdots + x^k \in K[x]$ mit $a_0 V + a_1 V\varphi + \cdots + V\varphi^k = 0$ heißt das *Minimalpolynom* von φ bezüglich V.

IX.45 Bemerkung

1. $m_\varphi(x) | p(x)$ (Hamilton-Cayley)
2. $m_{\varphi,V}(x) | m_\varphi(x)$

IX.46 Satz (Minimalpolynom)

Sei $\mathcal{V}$ endlich erzeugt, $V \in \mathcal{V}$ und $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linear.

1. $\mathcal{W} := \langle V, V\varphi, V\varphi^2, \dots \rangle$ ist ein φ-invarianter Teilraum von $\mathcal{V}$ (d. h. $\mathcal{W} \leq \mathcal{V}, \mathcal{W}\varphi \subseteq \mathcal{W}$) der Dimension $\mathrm{Grad}\, m_{\varphi,V}(x)$.

2. Auf $\mathcal{W}$ induziert φ die lineare Abbildung $\varphi_\mathcal{W} : \mathcal{W} \to \mathcal{W} : w \mapsto w\varphi$, die $m_{\varphi,V}(x)$ als Minimalpolynom und als charakteristisches Polynom hat.

3. Auf $\mathcal{V}/\mathcal{W}$ induziert φ die lineare Abbildung $\varphi_{\mathcal{V}/\mathcal{W}} : \mathcal{V}/\mathcal{W} \to \mathcal{V}/\mathcal{W} : X + \mathcal{W} \mapsto X\varphi + \mathcal{W}$, die $\frac{p_\varphi(x)}{m_{\varphi,V}(x)}$ als charakteristisches Polynom besitzt.

Beweis

1. klar: $\mathcal{W}\varphi \subseteq \mathcal{W}$
   $\dim \mathcal{W} = \mathrm{Grad}\, m_{\varphi,V}(x)$ aus Definition von $m_{\varphi,V}(x)$

2. trivial

3. Ergänze $(V, V\varphi, \dots, V\varphi^{k-1})$ zu einer Basis $\mathfrak{B}$ von $\mathcal{V}$

$$
{}_\mathfrak{B}\varphi_\mathfrak{B} = \left(\begin{array}{cccc|c}
0 & 1 & \dots & 0 & \\
\vdots & & \ddots & \vdots & 0 \\
0 & & & 1 & \\
* & * & \dots & * & \\
\hline
 & & * & & {}_{\overline{\mathfrak{B}}}\varphi_{\mathcal{V}/\mathcal{W}}{}_{\overline{\mathfrak{B}}}
\end{array}\right)
$$

(nach Satz V.35).

$$\det\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$$

q.e.d.

IX.47 Algorithmus (Berechnung von $p_\varphi(x)$)

Gegeben: $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ linear, $\mathcal{V}$ endlich erzeugt
Gesucht: $p_\varphi(x)$
Algorithmus:

1. Setze $p = 1$.
2. Wähle $0 \neq V \in \mathcal{V}$
   Teste $(V), (V, V\varphi), (V, V\varphi, V\varphi^2), \dots$ auf lineare Abhängigkeit und berechne so eine Basis von $\mathcal{W} = \langle V, V\varphi, V\varphi^2, \dots \rangle$ und $m_{\varphi,V}(x) = m_{\varphi_\mathcal{W}}(x)$. Ersetzt p durch $p \cdot m_{\varphi,V}(x)$.
   Falls $\mathcal{W} \neq \mathcal{V}$ ersetze $\mathcal{V}$ durch $\mathcal{V}/\mathcal{W}$, φ durch $\varphi_{\mathcal{V}/\mathcal{W}}$ und fahre fort bei 2. Ansonsten ist p_φ gefunden.

Nach endlich vielen Schritten terminiert der Algorithmus mit $p = p_\varphi(x)$.

$K = \mathbb{F}_2$, $\mathcal{V} = \mathbb{F}_2^6$, φ gegeben durch ${}_{\mathfrak{S}}\varphi_{\mathfrak{S}} = A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} V &= (1,0,0,0,0,0) \\ V\varphi &= (1,0,1,0,1,1) \\ V\varphi^2 &= (0,0,0,1,0,0) \\ V\varphi^3 &= (1,0,1,1,1,1) \end{aligned}$$

Die ersten 3 Vektoren sind linear unabhängig.

$$V\varphi + V\varphi^2 + V\varphi^3 = 0 \to m_{\varphi,V}(x) = x^3 + x^2 + x$$
$$\mathcal{W} = \langle V, V\varphi, V\varphi^2 \rangle$$

$$\begin{aligned} W &= (0,1,0,0,0,0) \\ W\varphi &= (1,1,1,1,0,0) \\ W\varphi^2 &= (1,0,0,0,1,0) \\ W\varphi^3 &= (1,0,1,1,0,0) \end{aligned}$$

Die ersten 3 Vektoren sind linear unabhängig.

$$\overline{W} + \overline{W}\varphi + \overline{W}\varphi^3 = 0 \to m_{\varphi,\overline{W}}(x) = x^3 + x + 1$$

$$\Rightarrow p_\varphi(x) = (x^3 + x^2 + x)(x^3 + x + 1)$$

Beispiel IX.13: Berechnung des charakteristischen Polynoms

Verzeichnis der Beispiele

I.1	Mengen	2
I.2	Relationen	2
I.3	Abbildungen	3
I.4	bijektive Abbildungen	4
I.5	Verknüpfung, algebraische Strukturen	5
I.6	Körper	8
II.1	Vektorräume	10
II.2	Teilräume	11
II.3	Vektorraum der formalen Potenzreihen	12
II.4	Lösungsraum eines GLSH	13
II.5	Erzeugnis	15
III.1	lineare Unabhängigkeit	18
III.2	Isomorphismus	19
III.3	Konstruktion einer Basis	20
III.4	Dimension einiger Vektorräume	22
IV.1	Bestimmung von Basen	28
IV.2	Konstruktion einer Basis aus einem Erzeugendensystem	29
IV.3	Bestimmung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems	30
IV.4	Bestimmung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems	32
IV.5	Bestimmung der Lösung eines linearen Gleichungssystems	33
IV.6	Lösungsmenge	35
V.1	lineare Abbildungen	40
V.2	lineare Abbildungen	41
V.3	Anwendung des Zassenhaus-Algorithmus	47
V.4	Matrix einer Abbildung	49
V.5	Matrizen linearer Abbildungen	51
V.6	Matrixprodukt	53
V.7	Matrixprodukt mit der inversen Matrix	54
V.8	Berechnung der inversen Matrix	57
V.9	Berechnung einer Rechtsinversen	58
V.10	Transponierte Matrix	58
V.11	Berechnung einer Linksinversen	59
V.12	Die Fibonacci-Folge	63
V.13	lineare Abbildungen und ihre Matrizen	64
V.14	Matrizen in Polynomrestklasen	69
V.15	Der Körper der komplexen Zahlen	70
VI.1	lineare Funktionale	72
VI.2	Annulatoren	77

VII.1 Bilineare Abbildungen . . . 81
VII.2 Bilinearformen . . . 82
VII.3 ...morphismen . . . 91
VII.4 reziproke Basis . . . 93
VII.5 ON-Basen . . . 94
VII.6 Bestimmung einer Orthogonalbasis . . . 95
VII.7 Beste Approximation . . . 105

VIII.1 Zykelschreibweise . . . 111
VIII.2 Untergruppen der Symmetrischen Gruppe . . . 113
VIII.3 Rechtsrestklassen . . . 113
VIII.4 Determinanten . . . 115
VIII.5 Entwicklung einer Determinanten . . . 118
VIII.6 Entwicklung einer Determinante nach Spalten . . . 119
VIII.7 Spur und Determinante . . . 122
VIII.8 Berechnung der Determinante einer Matrix . . . 123
VIII.9 Drehung und Spiegelung . . . 123

IX.1 Eigenwerte . . . 126
IX.2 Berechnung der Glieder der Fibonaccireihe . . . 128
IX.3 Einsetzen einer Abbildung in das charakteristische Polynom . . . 130
IX.4 algebraisch abgeschlossener Körper . . . 131
IX.5 Ringhomomorphismus . . . 133
IX.6 Ringhomomorphismus mit $\mathbb{R}[X]/(x^2+1)\mathbb{R}[X]$ . . . 134
IX.7 größter gemeinsamer Teiler . . . 135
IX.8 Irreduzible Polynome . . . 136
IX.9 Körper eines Restklassenringes von $\mathbb{Z}$ . . . 137
IX.10 Vereinfachung einer Matrix . . . 141
IX.11 Differentialgleichungen . . . 145
IX.12 Komplexwertige Funktionen . . . 147
IX.13 Berechnung des charakteristischen Polynoms . . . 154

Index

Abbildung, 3
  adjungierte, 97
  bijektiv, 4
  Bild, 4
  bilineare, 81
  Determinante, 121
  Hintereinanderausführung, 4
  injektiv, 3
  Invarianten, 121
  Komposition, 4, 52
  Koordinatenabbildung, 19
  linear, 39
  Matrix einer, 48
  normal, 99
  orthogonal, 99
  Schwanz-ab, 40
  Spiegelung, 104
  surjektiv, 4
  symmetrisch, 99
  transponierte, 77
  Urbild, 4
  zwischen Vektorräumen, 46
Abstand, 101
adjungierte Abbildung, 97
  Matrix, 98
algebraische Struktur, 5
alternierend, 113
Annulator, 75
Approximation, 102
  Berechnung, 105
Äquivalenzklasse, 31
Äquivalenzrelation, 1, 31
Assoziativgesetz, 7
  Grundlage, 53
Automorphismus, 91

Basis, 18
  Algorithmus zur Bestimmung, 46
  Algorithmus zur Konstruktion, 27
  äquivalente Aussagen, 22
  Bestimmung, 28
  Dualbasis, 73
  Eigenvektorbasis, 129
  Fächerbasis, 131
  Fahnenbasis, 131
  Konstruktion, 20
  orthogonal, 93
  orthonormal, 93
  reziproke, 92
  Standardbasis, 22, 51
  Transformationssatz, 56
  Überführung, 27
Basisergänzungssatz, 22
Bild, 4, 39
Bilinearform, 81, 82
  Linearität in den Komponenten, 81
  symmetrische, 85
Blockdiagonalmatrix, 142

$\mathcal{C}^i(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 144
cartesisches Produkt, 1
charakteristisches Polynom, 125
Cramersche Regel, 120

definit
  negativ, 94
  positiv, 94
  Skalarprodukt, 95
Determinante, 113
  Berechnung, 123
  der Transponierten, 118
  Eigenschaften, 114, 121
  Eindeutigkeit, 115
  einer Abbildung, 121
  einer Matrix, 118
  Entwicklung, 118, 119
    nach Spalten, 119
    nach Zeilen, 116
  Existenz, 116
  linear unabhängig, 117
  Multiplikationssatz, 120
  Vandermondsche, 129
Differentialgleichung, 144
Differenzmenge, 1
Dimension, 21
direkte Summe, 90
  innere, 90
  orthogonale, 91
  Zusammenhang innere mit äußerer, 90
Distributivgesetz, 8

Drehachse, 123
Drehung, 123
Dreiecksungleichung, 101
Dualitätssatz, 75
Dualraum, 71
  Dualbasis, 73
Durchschnitsmenge, 1

Eigenraum, 125
eigentlich orthogonal, 123
Eigenvektor, 125
  linear unabhängig, 128
Eigenvektorbasis, 129
Eigenwert, 125
Einheitsmatrix, 51
Einsetzungshomomorphismus, 133
Elementare Schritte, 26
  Interpretation, 61
Endomorphismus, 91
Epimorphismus, 91
Erzeugendensystem, 16
Erzeugnis, 14
euklidischer Vektorraum, 99
eulidischer Algorithmus, 135

Fächerbasis, 131
Fahnenbasis, 131
Faktorraum, 34
  Dimension, 35
Fibonacci-Folge, 63
Fibonacci-Reihe, 128
Fourierkoeffizienten, 104

Gauß-Algorithmus, 46
Gaußscher Algorithmus, 62
Gaußsches Eliminationsverfahren, 30
gleichorientiert, 122
Gleichungssystem
  eindeutige Lösung, 120
  homogenes lineares, 11
    Dimension, 34
  lineares, 11
  Lösbarkeit, 31
  Lösungsmenge, 31
  Matrix, 31
Grammatrix, 84
  Rang, 87
größter gemeinsamer Teiler, 135
Gruppe, 8
  generelle lineare, 120
  kommutative, 8
  spezielle lineare, 120
  symmetrische, 109
  Untergruppe, 112
Gruppenhomomorphismus, 111, 121

Halbgruppe, 8
Hamilton - Cayley, 130
Hauptminor, 125
Homomorphiesatz, 42
  Anwendung, 45
  für Ringe, 133
Homomorphismus, 91

Ideal, 133
Inverse Matrix, 55
invertierbar, 54
irreduzibel, 136
isomorph, 19
Isomorphiesatz, 43
Isomorphismus, 19, 37, 91
  zwischen Matrix und Abbildung, 50

Jordan-Normalform, 142
  allgemeine, 144
Jordanblock, 142

Kaninchen-Problem, 63
Kern, 39
Klasseneinteilung, 2
Kommutativgesetz, 7
komplexe Konjugation, 148
komplexe Zahlen, 134
Komposition
  linearer Abbildungen, 52
Koordinatenabbildung, 19
Koordinatenspalte, 73
Koordinatenzeile, 73
Körper, 7
  algebraisch abgeschlossen, 131
  der rationalen Funktionen, 125
  des Restklassenringes, 136
Kronecker-Symbol, 73

Länge, 101
Laplacescher Entwicklungssatz, 116
linear, 39
  Funktionale, 71
linear abhängig, 17
linear unabhängig, 17
  Determinante, 117
lineare Rekursion, 149
Linearformen, 71
  Teilraum, 116
Linearkombination, 14
Linksinverse Matrix
  Berechnung, 59
Lösung
  eindeutige, 120

eines linearen Gleichungssystem, 11
Vektorraum der, 11
Lösungsmenge, 30
Lösungsraum, 36, 45, 77

Matrix, 32
Blockdiagonal-, 142
der Adjungierten Abbildung, 98
des Skalarproduktes, 85
Determinante, 118
einer Abbildung, 48
Einheitsmatrix, 51
Grammatrix, 84
Inverse, 55
invertierbar, 54
Matrixprodukt, 52
orthogonal, 107
symmetrische, 85
Transponierte, 58
Vereinfachung, 141
Matrixprodukt, 52
Assoziativität, 54
transponieren, 58
Menge, 1
der Bilinearformen, 84
endlich, 4
Metrischer Raum, 102
Minimalpolynom, 152
Monoid, 8
Monomorphismus, 91
multilinear, 114

n-Tupel, 17
nicht ausgeartet, 86
Norm, 101
normal
Abbildung, 99

orientierte Volumenverzerrung, 122
orthogonal, 86
Abbildung, 99
Orthogonal-Raum, 86
Orthogonalbasis, 93
Bestimmung, 95
Existenz, 94
orthogonale direkte Summe, 91
orthogonale Matrix, 107
Orthogonalprojektion, 102
Berechnung, 104
Eigenschaft, 102
Orthonormalbasis, 93
Orthonormalisierungsverfahren, 99
Interpretation, 104
othogonal
Abbildung
Eigenschaft, 99

Parallelepiped, 122
Partition, 2
Polynom
als Produkt irreduzibler Polynome, 137
charakteristisches, 125
Grad, 66
irreduzibel, 136
kommutativer Ring, 65
Polynomring und Körper, 132
Restklassen, 67
Vektorraum, 12
Polynomfunktion, 68
Nullstellen, 70
Potenzmenge, 1
Potenzreihen
Vektorraum, 12

Quotientenraum, 34

Radikal, 86
des eingeschränkten Skalarproduktes, 89
Rang, 33
Rechtsinverse Matrix
Berechnung, 57
Rechtsrestklasse, 112
Rechtsrestklassen
Bijektion, 113
reflexiv, 1
Relation, 1
Restklasse, 31
Polynom, 67
Restklassenraum, 34
reziproke Basis, 92, 93
Basiswechselmatrix, 92
Ring, 8
Divisionsring, 8
Homomorphiesatz, 133
kommutativer, 8
Polynome, 65
mit 1, 8
Polynomring und Körper, 132
Ringhomomorphismus, 133

Satz von Pythagoras, 102
Schwarzsche Ungleichung, 100
selbstadjungiert, 99
semidefinit
negativ, 94
positiv, 94
senkrecht, 86
Senkrechtraum, 86

Dimension, 89
Signum-Funktion, 111
Eigenschaften, 111
Skalarprodukt, 85
auf Restklassenraum, 88
definites, 95
Einschränkung auf Teilraum, 88
Matrix, 85
Spaltenkonvention, 59, 74, 78
Spaltenrang, 36, 37, 80
Spaltenraum, 36, 45
Spiegelung, 104, 123
Stabilisator, 113
Standardbasis, 22
Standardskalarprodukt, 93
Steinitzscher Austauschsatz, 20
Sylvesterscher Trägheitssatz, 96
symmetrisch, 1, 85
Abbildung, 99
Eigenschaft, 99
symmetrische Gruppe, 109
Anzahl der Elemente, 109

Teiler
größter gemeinsamer, 135
teilerfremd, 135
Teilmenge, 1
Teilraum, 10
der Bilinearformen, 84
der Linearformen, 116
der Polynome, 12
Schnittmenge von, 13
trivialer, 11
Transformationsgesetz, 85
transitiv, 1
Transponierte Abbildung, 77
Bild, 79
Kern, 79
Transponierte Matrix, 58
Transposition, 110
Produkt von, 110

Untergruppe, 112
Unterraum, 10
Urbild, 4

Vektoren, 9
Vektorraum, 9
der Abbildungen, 50
der formalen Potenzreihen, 12
der linearen Gleichungen, 12
der Matrizen, 33
endlich erzeugt, 19
euklidischer, 99
lineare Abbildungen, 46
Menge der Lösungen eines GLSH, 11
trivialer, 10
Vektorraumaxiome, 9
Vereinigung, 1
Verknüpfung, 5
Vertretersystem, 112
Volumen, 122
Volumenverzerrung
orientierte, 122

Winkel, 101

Zahlbereichserweiterung, 6
Zahlbereichsvergröberung, 7
Zassenhaus-Algorithmus, 46
Zeilenkonvention, 74, 78
Zeilenrang, 33, 37, 80
Zeilenraum, 33
Zeilenvektoren, 33
Zerlegung, 2
Zykel, 110
Zykelschreibweise, 110
Zykelzerlegung
disjunkt, 111
nicht disjunkt, 111