Mitschrift

Unendliche Spiele - Übung

Dipl.-Math. Philipp Rohde

Ulrich Loup

Diese Mitschrift ist eine Mitschrift und deswegen nicht unbedingt vollständig oder fehlerfrei! Das Dokument wird bis zum Ende des Semesters sukzessive erweitert. Anmerkungen bitte an die angegebene email-Adresse auf der `s-inf` Seite.

Inhaltsverzeichnis

1 Übung vom 26.10.2005

1.1 Zusammenfassung der Begriffe

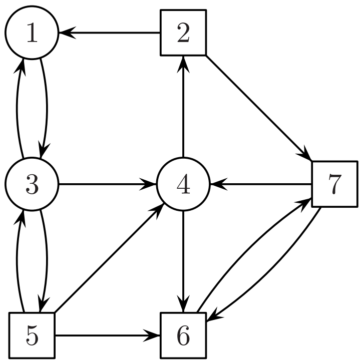
- Spielgraph $G = (Q, E)$.
- Gewinnbedingung φ (z.B. $\mathrm{Occ}(\rho) = \{2, 7\}$)
- Partie von $q \in Q$: $\rho = qq'q'' \dots$ $(\rho \in Q^\omega)$
  Spieler 0 gewinnt ρ, falls ρ die Bedingung φ erfüllt. $\varphi \rightsquigarrow \mathrm{Win} \subseteq Q^\omega$. $\rho \in \mathrm{Win} \Leftrightarrow \rho$ erfüllt φ.
- Gewinnbereiche $W_0, W_1 \subseteq Q$.
  $q \in W_i \Leftrightarrow$ Spieler i gewinnt *jede* Partie, die in q startet (bei vernunftbegabtem Spieler i).
- Determiniertheit: $Q = W_0 \cup W_1$.
  Bem.: $W_0 \cap W_1 = \emptyset$.
  Bew.: Angenommen $W_0 \cap W_1 \neq \emptyset$.
  Sei nun $q \in W_0 \cap W_1$. $\Rightarrow \exists$ Gewinnstrategie f_0 für Spieler 0 von q aus und $\exists$ Gewinnstrategie f_1 für Spieler 1 von q aus.
  Konstruiere Partie ρ induktiv:

$$\rho_0 := q, \qquad \rho_{n+1} := \begin{cases} f_0(\rho_0 \dots \rho_n) & \text{, falls } \rho_n \in Q_0 \\ f_1(\rho_0 \dots \rho_n) & \text{, falls } \rho_n \in Q_1 \end{cases}$$

  ρ ist Partie gemäß Gewinnstrategie f_0 von Spieler 0 $\Rightarrow \rho \in \mathrm{Win}$.
  ρ ist Partie gemäß Gewinnstrategie f_1 von Spieler 1 $\Rightarrow \rho \in Q^\omega \setminus \mathrm{Win}$. Widerspruch. $\square$

1.2 Beispiel 1

Gewinnbedingung φ: Spieler 0 gewinnt Partie ρ gdw. $|\mathrm{Occ}(\rho)| = 2 \vee |\mathrm{Occ}(\rho)| = 4$.



Gewinnbereiche: $W_0 = \{1, 3, 4\}$ und $W_1 = \{2, 5, 6, 7\}$
Notation: $q \to p$ bedeutet $f(wq) = p$.

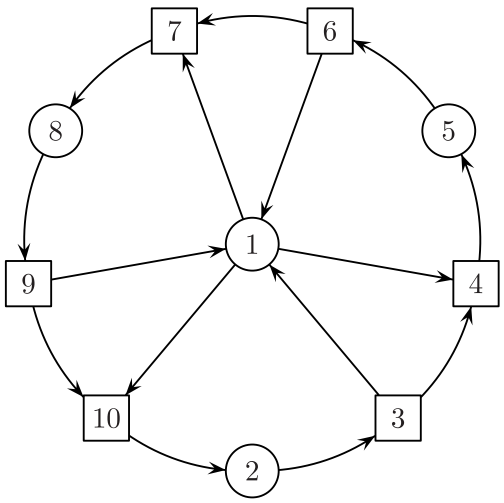
- Gewinnstrategie für 0 von $1, 3$: $\{1 \to 3, 3 \to 1, 4 \to 2\}$
- Gewinnstrategie für 1 von 2: $\{2 \to 7, 7 \to 6, 6 \to 7, 5 \to 4\}$
- Gewinnstrategie für 1 von $6, 5$: $\{6 \to 7, 7 \to 4, 2 \to 1, 5 \to 4\}$
  Partie gemäß dieser Strategie: $\mathrm{Occ}(\rho) = \{4, 6, 7\}$ oder $\{1, 2, 4, 6, 7\} \subseteq \mathrm{Occ}(\rho) \Rightarrow |\mathrm{Occ}(\rho)| \geq 5$

- Gewinnstrategie für 0 von 4: (nicht mehr positional!)

$$f(w4) = \begin{cases} 2 & \text{falls} w = \varepsilon \\ 6 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad f(w1) = 3, \qquad f(w3) = 1.$$

Für jede Partie gemäß f_0 (d.h. von Spieler 0): $\mathrm{Occ}(\rho) = \{1, 2, 3, 4\}$ oder $\mathrm{Occ}(\rho) = \{2, 4, 6, 7\}$.

1.3 Beispiel 2



φ : Spieler 0 gewinnt ρ gdw. Knoten 1 nur endlich oft oder alle Knoten unendlich oft besucht werden.
Gewinnstrategie für 0 von allen Knoten aus:

$$f(w1) = \begin{cases} 4 & \text{, falls } w = w'3 \\ 7 & \text{, falls } w = w'6 \\ 10 & \text{sonst} \end{cases}$$

Insbesondere: $w = \varepsilon \Rightarrow f_0(1) = 10$.
Zermelo 1913: Alle *endlichen* Spiele (genauer: Zwei-Personen, Nullsummenspiele mit perfekter Information) sind determiniert.[0]

2 Übung vom 02.11.2005

2.1 Aufgabe 1

(a) Start $1, 2, 4$: Spieler 0 gewinnt.
Start $5, 6, 7$: Spieler 0 gewinnt.
Start 3: Spiel 1 kann Besuch von mindestens 4 Knoten garantieren:

$$\begin{tikzcd} & & 1 \arrow[r] & 2 \\ 3 \arrow[r] & 4 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & 5 \arrow[r] & 6 \\ & & 7 \arrow[r] & 6 \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow W_0 = Q \setminus \{3\}$, $W_1 = \{3\}$
$f_0 = \{2 \to 4, 4 \to 1, 6 \to 7\}$, $f_1 = \{1 \to 2, 3 \to 4, 5 \to 6, 7 \to 6\}$.
f_i ist Gewinnstrategie für Spieler i auf W_i.

[0]Dank an Philipp Rhode für die Unterstützung mit *Gas*TEX!

(b) Gewinnstrategie für 0:

1. Zykel $2 \to 4 \to 7 \to 6$ kann stets garantiert werden.
2. Alle anderen Knoten kann Spieler 0 vom Zykel aus erreichen.
3. Von einem anderen Knoten gerät die Partie stets auf den Zykel zurück.

$\Rightarrow W_0 = Q$.

(c) (Insgesamt $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 = 126$ Einzelfälle zu widerlegen.)

1. $(2 \to 4 \vee 2 \to 5) \wedge \text{Start} \neq 3 \Rightarrow 3$ wird nie besucht.
2. $(4 \to 5 \vee 4 \to 7) \wedge \text{Start} \neq 1 \Rightarrow 1$ wird nie besucht.
3. $(2 \to 4 \vee 2 \to 5) \wedge \text{Start} = 3 \overset{2.}{\Rightarrow} 4 \to 1 \Rightarrow$ Spieler 1 kann $\text{Occ}(\rho) = \{1, 3, 4\}$ erreichen.
4. $(4 \to 5 \vee 4 \to 7) \wedge \text{Start} = 1 \overset{1.}{\Rightarrow} 2 \to 3 \Rightarrow$ Spieler 1 kann in beiden Fällen $(4 \to 5, 4 \to 7)$ Besuch von 5 verhindern.
5. $2 \to 3$ und $4 \to 1$: $\text{Start} \neq 5 \Rightarrow 5$ nie besucht, $\text{Start} = 5$ ✓

2.2 Aufgabe 2

(a) $W_0 = Q$, Gewinnstrategie: $f_0(w5) = 2,\ f_0(w6) = 1,\ f_0(w4) = \begin{cases} 3 & \text{, falls } w = w'261 \\ 7 & \text{sonst} \end{cases}$

(b) $4 \to 7$: $3 \notin \text{Inf}(\rho)$ aber $6 \in \text{Inf}(\rho)$
$4 \to 3$: Spieler 1 kann $\text{Inf}(\rho) = \{1, 3, 4\}$ garantieren.

Lemma: $\text{Attr}_0(F)$ kann für $G = (Q, Q_0, E)$ mit $F \subseteq Q$ in $\mathcal{O}(|Q| + |E|)$-Zeit berechnet werden.
Beweis: Voraussetzung: G ist repräsentiert durch seine Adjazenzliste. (Beispiel am Graphen aus der Vorlesung, Skript *Automata and Reactive Systems* Seite 69)

Vorbereitung 1: reverseÄdjazenzliste. (in $\mathcal{O}(|Q| + |E|)$)

Vorbereitung 2: Berechne Ausgangsgrad von jedem $q \in Q_1$ mit $n(q) = \text{out}(q)$ für $q \in Q_1$. (z.B.: $n(1) = 3$)

Rückwärts-Breitensuche

(1) Markiere $q \in F$.

(2) Rückwärts-Breitensuche: $q \in Q_0$ markieren.
$q \in Q_1$: Setze $n(q) := n(q) - 1$.

(3) Markiere $q \in Q_1$, falls $n(q) = 0$.

Realisierung mit einer Queue, d.h., füge jeden markierten Zustand zur Queue hinzu. Alle markierten Knoten gehören jetzt zum Gewinnbereich von Spieler 0. □

3 Übung vom 09.11.2005

3.1 Aufgabe 3

(a) Über die Attraktorkonstruktion erhält man $W_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$ und $W_1 = \{7, 9, 11, 12\}$. Die dazugehörigen Strategien sind

- $f_0 : \{2 \to 1, 4 \to 6, 5 \to 10, 8 \to 10, 9 \to 7, 11 \to 7\}$, d.h., Spieler 0 zieht immer zu der niedrigsten Attraktor-Stufe, die er erreichen kann.
- $f_1 : \{1 \to 2, 3 \to 4, 6 \to 5, 7 \to 9, 10 \to 8, 12 \to 11\}$, d.h., Spieler 1 versucht Attr_0 zu vermeiden, falls möglich (sonst zieht er beliebig).

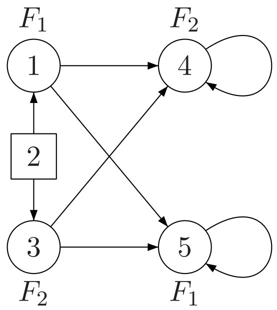
(b) – $U := \text{Attr}_0(\underbrace{F_1 \cap \text{Attr}_0(F_2)}_{=:X_1}) \cup \text{Attr}_0(\underbrace{F_2 \cap \text{Attr}_0(F_1)}_{=:X_2})$.

<u>Beh.:</u> $U \subsetneq W_0$.

$q \in U \Rightarrow q \in X_1$ oder $q \in X_2$

1. $q \rightsquigarrow F_1 \rightsquigarrow F_2$.
2. $q \overset{f_0''}{\rightsquigarrow} F_2 \overset{f_0''}{\rightsquigarrow} F_1$.

$\Rightarrow q \in W_0$. Es gibt ein Gegenbeispiel:



Seien hier $F_1 := \{1, 5\}$ und $F_2 := \{3, 4\}$. Es gilt $\text{Attr}_0(F_1) = \{1, 5\}$ und $\text{Attr}_0(F_2) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Somit ist $U = \text{Attr}_0(\{1, 5\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\}) \cup \text{Attr}_0(\{3, 4\} \cap \{1, 5\})$ $= \text{Attr}_0(\{1, 5\}) = \{1, 5\}$. Zum Gewinnbereich W_0 gehört aber auch Position 2. (Als Gegenbeispiel ist auch der Graph von Aufgabe 4 möglich.)

– $V := \text{Attr}_0(\underbrace{(F_1 \cap \text{Attr}_0(F_2))}_{=:V'} \cup \underbrace{(F_2 \cap \text{Attr}_0(F_1))}_{=:V''})$.

<u>Beh.:</u> $V = W_0$.

<u>Bew.:</u> Prinzip:

1. Definiere Strategie für Spieler 0 auf V und zeige, dass dies eine Gewinnstrategie ist. ($V \subseteq W_0$)
2. Definiere Strategie für Spieler 1 auf $Q \setminus V$ und zeige, dass dies eine Gewinnstrategie ist. ($Q \setminus V \subseteq W_1 \subseteq Q \setminus W_0 \Rightarrow V \supseteq W_0$)

Definiere folgende *positionale* Strategien:

1. Sei f_0^* Attraktor-Strategie von Spieler 0 für V.
2. Sei f_0' Attraktor-Strategie von Spieler 0 für $\text{Attr}_0(F_2)$.
3. Sei f_0'' Attraktor-Strategie von Spieler 0 für $\text{Attr}_0(F_1)$.

Definiere $f_0 : Q^*Q \to Q$ durch :

$$f_0(wq) := \begin{cases} f_0^*(q) & \text{, falls } q \in V, wq \text{ hat weder } V' \text{ noch } V'' \text{ besucht} \\ f_0'(q) & \text{, falls } q \in V, wq \text{ hat } V' \text{ besucht} \\ f_0''(q) & \text{, falls } q \in V, wq \text{ hat nicht } V' \text{ aber } V'' \text{ besucht} \\ p & \text{sonst } (p \text{ Nachfolger von } q) \end{cases}$$

Zeige: f_0 ist Gewinnstrategie von Spieler 0 auf V.

Sei ρ eine Partie gemäß f_0.

* $\rho_1 \dots \rho_n$ Präfix in $V \setminus (V' \cup V'')$. $\Rightarrow$ Fortsetzung gemäß f_0^*, garantiert
  * Wir bleiben in $\mathrm{Attr}_0(V' \cup V'')$.
  * Wir erreichen irgendwann $V' \cup V''$.

  Beachte: $V' \cup F_1 \subseteq \mathrm{Attr}_0(F_2) \Rightarrow V \cap F_1 \subseteq V'$, $V \cap F_2 \subseteq V''$.
* ρ erreicht $V' \cup V''$.

  Fall 1: $\rho_n \in V' \Rightarrow \rho_n \in F_1$

  $\Rightarrow$ Fortsetzung ab ρ_n ist gemäß f_0', garantiert
  * Wir bleiben in $\mathrm{Attr}_0(F_2)$.
  * Wir erreichen irgendwann F_2.

  Fall 2: $\rho_n \in V'' \setminus V' \Rightarrow \rho_n \in F_2$

  $\Rightarrow$ Fortsetzung gemäß f_0'', garantiert
  * Wir bleiben in $\mathrm{Attr}_0(F_1)$.
  * Wir erreichen irgendwann F_2.
  * Zwischendurch wird nicht V' besucht!

  $\Rightarrow f_0$ ist Gewinnstrategie für Spieler 0 von V.

Definiere nun Strategie f_1 für Spieler 1:

1. Sei f_1^* Konterstrategie zu V.
2. Sei f_1' Konterstrategie zu $\mathrm{Attr}_0(F_2)$.
3. Sei f_1'' Konterstrategie zu $\mathrm{Attr}_0(F_1)$.

Wie oben sind alle Strategien positional! $f_1 : Q^*Q \to Q$ ist definiert durch

$$f_1(wq) := \begin{cases} f_1^*(q) & \text{, falls } q \in Q \setminus V, wq \text{ hat weder } F_1 \text{ noch } F_2 \text{ besucht} \\ f_1'(q) & \text{, falls } q \in Q \setminus V, wq \text{ hat } F_1 \text{ besucht} \\ f_1''(q) & \text{, falls } q \in Q \setminus V, wq \text{ hat } F_2 \text{ besucht, aber nicht } F_1 \\ p & \text{sonst } (p \text{ Nachfolger von } q) \end{cases}$$

Zeige: f_1 ist Gewinnstrategie von $Q \setminus V$ aus.

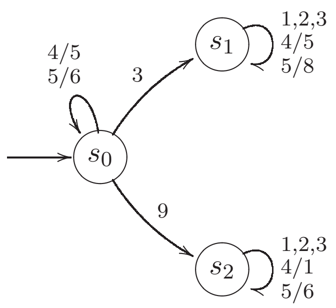
$\Rightarrow V = W_0$.

3.2 Aufgabe 4

$W_0 = \{3, 4, 5, 6, 9\}$, was sich aus der Gewinnstrategie $f_0 : Q^*Q \to Q$ mit

$$f_0(wq) := \begin{cases} 4 \to 5, 5 \to 6 & \text{, falls weder 3 noch 9 besucht wurden} \\ 4 \to 5, 5 \to 8 & \text{, falls 3 besucht wurde} \\ 4 \to 1, 5 \to 6 & \text{, falls 9 besucht wurde} \end{cases}$$

ergibt. Der Strategieautomat hat dann folgende Gestalt:



4 Übung vom 16.11.2005

Klausur: 8. Februar 2006, 16:00 bis 17:00 Uhr in AH II

4.1 Aufgabe 5

(a)

$$\rho \in \mathrm{Win} \Leftrightarrow \mathrm{Occ}(\rho) = \{1,2\} \text{ oder } \mathrm{Occ}(\rho) = \{2,3\}.$$

Angenommen Spieler 0 starte in 1, dann ist seine positionale Gewinnstrategie

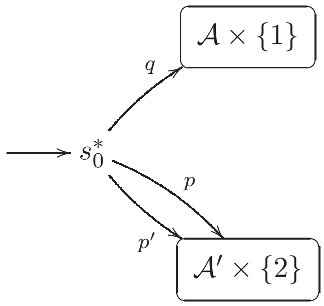
$$f_{0,1} : \{1 \to 2, 2 \to 1, 3 \to 2\}.$$

Startet er in 3, so muss er allerdings die Gewinnstrategie

$$f_{0,3} : \{1 \to 2, 2 \to 3, 3 \to 2\}$$

verwenden, welche zwar wieder positional aber $\neq f_{0,1}$ ist. Es gibt also keine uniforme Gewinnstrategie für Spieler 0.

(b) $\mathcal{A} = (S, Q, s_0, \sigma, \tau)$ Gewinnstrategie von q aus, $\mathcal{A}' = (S', Q, s_0', \sigma', \tau')$ Gewinnstrategie von q' aus. $\mathcal{B} := (S \times \{1\} \dot\cup S' \times \{2\} \dot\cup \{s_0^*\}, Q, s_0^*, \sigma^*, \tau^*)$.



$$\begin{array}{ll}
\sigma^*(s_0^*, q) = (\sigma(s_0, q), 1) & \sigma^*(s_0^*, p) = (\sigma'(s_0', p), 2) \text{ für } p \neq q \\
\sigma^*((s,1), p) = (\sigma(s,p), 1)\ \forall p \in Q & \sigma^*((s,2), p) = (\sigma'(s,p), 2) \\
\tau^*(s_0^*, q) = \tau(s_0, q) & \tau^*(s_0^*, p) = \tau'(s_0', p) \text{ für } p \neq q \\
\tau^*((s,1), p) = \tau(s,p) & \tau^*((s,2), p) = \tau'(s,p)
\end{array}$$

4.2 Aufgabe 6

(a) Für $A \subseteq Q$ definiere $\mathrm{Next}_0(A) := \{q \in Q_0 \mid \exists (q,p) \in E : p \in A\} \cup \{q \in Q_1 \mid \forall (q,p) \in E : p \in A\}$ die Menge der Positionen, von denen aus Spieler 0 sicher nach A kommt. Definiere weiter

$$V := \mathrm{Attr}_0(F \cap \mathrm{Next}_0(\mathrm{Attr}_0(F))) \quad [F \subseteq \mathrm{Attr}_0(F)].$$

Die Strategie für Spieler 0 lässt sich wie in Abbildung 1 charakterisieren, Spieler 1 verfährt wie in Abbildung 2 skizziert.

(1) $q \in \mathrm{Next}_0(\mathrm{Attr}_0(F))) \Rightarrow q \in \mathrm{Attr}_0(F)$

(2) $q \in \mathrm{Attr}_0(F) \setminus F \Rightarrow q \in \mathrm{Next}_0(\mathrm{Attr}_0(F))$

(3) $V \subseteq \mathrm{Attr}_0(F)$ (allgemein: $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{Attr}_0(A) \subseteq \mathrm{Attr}_0(B)$)

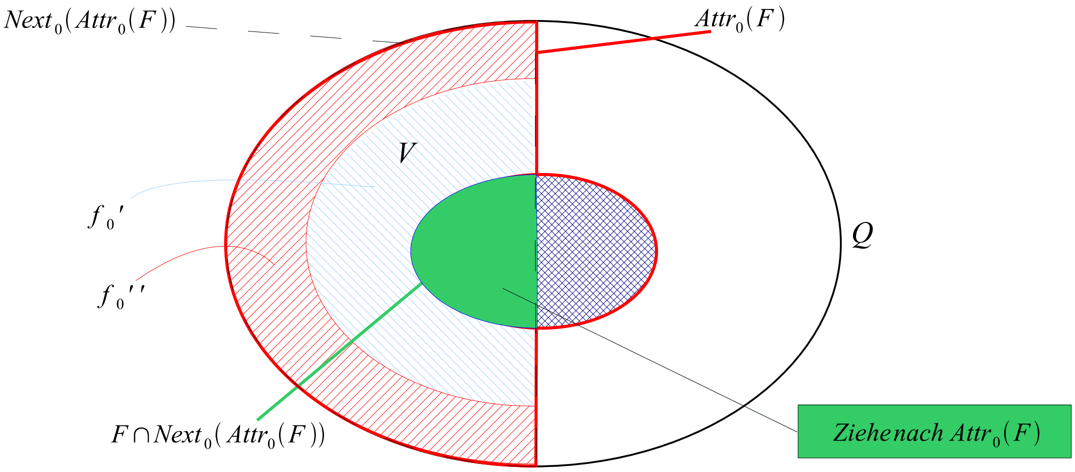


Abbildung 1: Skizze der Gewinnstrategie von Spieler 0. Es gilt $V \subseteq W_0$.

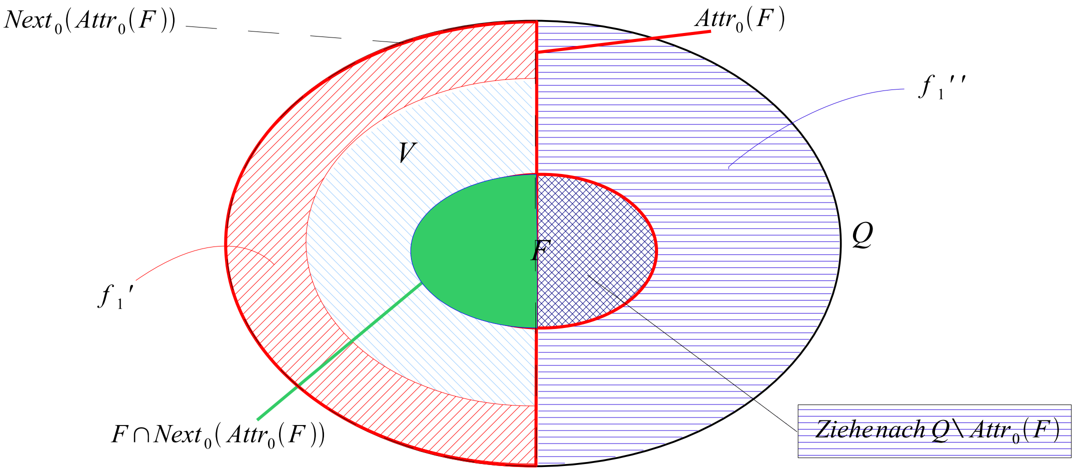


Abbildung 2: Skizze der Gewinnstrategie von Spieler 1. Es gilt $Q \setminus V \subseteq W_1$.

Sei f_0' Gewinnstrategie (Attraktorstrategie) auf $\mathrm{Attr}_0(F \cap \mathrm{Next}_0(\mathrm{Attr}_0(F)))$.
Sei f_0'' Gewinnstrategie (Attraktorstrategie) auf $\mathrm{Attr}_0(F)$.
Sei f_1' Konterstrategie zu f_0' sowie f_1'' Konterstrategie zu f_0''.

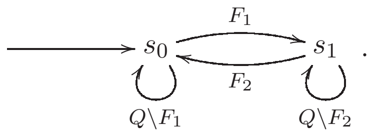
Insgesamt ergibt sich: $\left.\begin{array}{r} V \subseteq W_0 \\ Q \setminus V \subseteq W_1 \end{array}\right\} V = W_0.$

(b) Mit obiger Konstruktion selbst lösbar.

5 Übung vom 23.11.2005

5.1 Aufgabe 7

(a) Spiel (G, F_1, F_2, F_3), $G = (Q, E)$.
Gesucht: Erreichbarkeitsspiel (G', F'), $G' = (Q', E')$, so dass $(G; F_1, F_2, F_3) \leq (G', F')$.
Als Automat:



$S = \{s_0, s_1\}$, σ wie im Bild, $Q' = S \times Q$, $F' := \{(s_1, q) \mid q \in F_3\}$.
Zeige: $\rho' := (s_0, q_0)(t_1, q_1)(t_2, q_2) \ldots$ in G'. $\rho = q_0 q_1 \ldots$ in G. $\rho \in \mathrm{Win} \Leftrightarrow \rho' \in \mathrm{Win}'$.
Skizze: Partie in G:

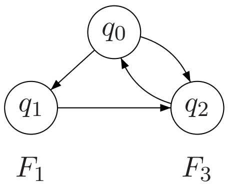
$$q_0 \sim\sim\sim \cdots \sim\sim\sim q_i - - - - - - - q_j\ ,$$

wobei $- - -\ \notin F_2$, $q_i \in F_1$ und $q_j \in F_3$. $\Leftrightarrow$ Analoge Partie in G':

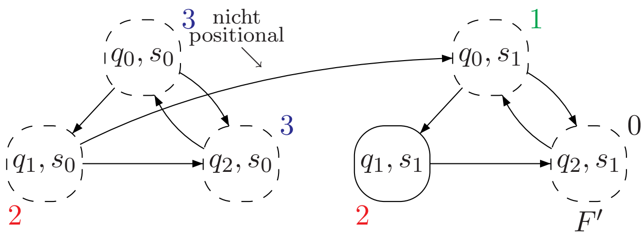
$$(s_0, q_0) \sim\sim\sim \cdots \sim\sim\sim (s_0, q_i) - - - - - - - (s_1, q_j)$$

mit $(s_1, q_j) \in F'$. (Um Missverständnisse zu vermeiden, wähle $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.)

(b) G :



$S \circ_\sigma G$:



Die farbigen Markierungen kennzeichnen die Ebenen bei der Attraktorberechnung.

5.2 Aufgabe 8

$$\begin{array}{rcl} (G, \varphi) & \leq & (G', \varphi') \\ \text{?Automatenstrategie?} & \leq & \text{Automatenstrategie} \end{array}$$

$G = (Q, E)$, $G' = (Q', E')$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}' &= (S', S \times Q, s_0', \sigma', \tau') \\ \sigma' &: S' \times (S \times Q) \to S' \\ \tau' &: S' \times (S \times Q_0) \to S \times Q \end{aligned}$$

$f_{\mathcal{A}}$ Gewinnstrategie von Spieler 0 auf G'.
Gesucht: Strategieautomat $\overline{\mathcal{A}} = (\overline{S}, \overline{Q}, \overline{s_0}, \overline{\sigma}, \overline{\tau})$, so dass $f_{\overline{\mathcal{A}}}$ Gewinnstrategie auf G.

Idee:

$$\begin{tikzcd}
Q: & q_0 & & q_1 & & q_2 & \cdots \\
Q': & s_0, q_0 \arrow[rr, bend left, "\sigma"] & & s_1, q_1 \arrow[rr, bend left, "\sigma"] & & s_2, q_2 & \cdots \\
& \bullet \arrow[rru, "\tau'"] & & \bullet \arrow[rru, "\tau'"] & & \bullet & \\
S': & s_0' \arrow[rr, bend right, "\sigma"'] & & s_1' \arrow[rr, bend right, "\sigma"'] & & s_2' & \cdots
\end{tikzcd}$$

Daher:

$$\begin{array}{ll} \overline{S} : S \times S' & \overline{\tau}((s, s'), q) = 2.\text{ Komponente von } \tau'(s', (s, q)) \\ \overline{s_0} : (s_0, s_0') & \overline{\sigma}\overline{S} \times Q \to \overline{S}, \overline{\sigma}((s, s'), q) = (\sigma(s, q), \sigma'(s', (s, q)))) \end{array}$$

Gezeigt: $(s_0, q_0)(s_1, q_1) \ldots$ gemäß $f_{\mathcal{A}'} \Leftrightarrow q_0 q_1 \ldots$ gemäß $f_{\overline{\mathcal{A}}}$.

Zusammen: Für $q_0 \in W_0$: $q_0 q_1 \ldots$ gemäß $f_{\overline{\mathcal{A}}} \Rightarrow (s_0, q_0)(s_1, q_1) \ldots$ gemäß $f_{\mathcal{A}'}$.
$\Rightarrow$ (Gewinnstrategie) $(s_0, q_0)(s_1, q_1) \ldots \in \mathrm{Win}'$
$\Rightarrow$ (Reduktion) $q_0 q_1 \ldots \in \mathrm{Win}$. □

5.3 Zusatzaufgabe

Angenommen $(G, \varphi) \leq (G', F')$.
Betrachte $\rho_1 = 212121 \ldots \in \mathrm{Win}$
Reduktion: $\rho_1' = (s_0, 2)(s_1, 1)(s_2, 2) \ldots \underbrace{(s_i, 2)}_{\in F'} \ldots$.
Definiere $\rho_2' = (s_0, 2)(s_1, 1)(s_2, 2) \ldots (s_i, 2)(s_{i+1}', 3)(s_{i+2}', 2) \ldots$.
Reduktion: $\rho_2 = 2\underline{1} \ldots 2\underline{3}232 \ldots \in \mathrm{Win}$. Widerspruch! □

6 Übung vom 30.11.2005

6.1 Aufgabe 9

Bei der Durchführung des Algorithmus zur Berechnung der Gewinnbereiche von Spieler 0 und 1 treten die folgenden Mengen auf (G sei der Spielgraph):

1. $C_5 = \{q_8\}$, $\mathrm{Attr}_1(C_5) = \{q_2, q_3, q_5, q_8\}$, weiter auf $G - \mathrm{Attr}_1(C_5) =: G'$.

2. $C_4 = \{q_6, q_7\}$, $\mathrm{Attr}_0(C_4) = \{q_4, q_6, q_7\}$, weiter auf $G' - \mathrm{Attr}_1(C_4)$.

3. $C_1 = \{q_0, q_1\}$, $\mathrm{Attr}_1(C_1) = \{q_0, q_1\} = C_1$.

Die Gewinnbereiche ergeben sich also zu

$$\begin{aligned} W_0 &= \{q_4, q_6, q_7\} \\ W_1 &= \{q_0, q_1\} \cup \{q_2, q_3, q_5, q_8\} \end{aligned}$$

und die uniformen positionalen Gewinnstrategien ergeben sich aus den Attraktorstrategien zu

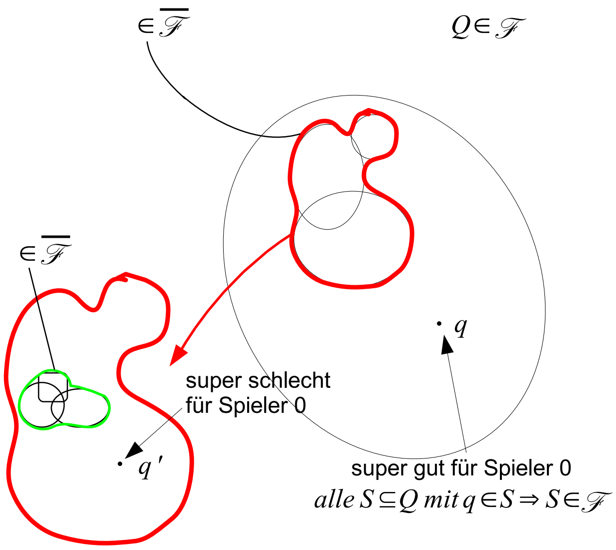
$$\begin{aligned} f_0 &: \quad q_6 \to q_4,\ q_4 \to q_7 \\ f_1 &: \quad q_1 \to q_0,\ q_3 \to q_5,\ q_2 \to q_8,\ q_8 \to q_5. \end{aligned}$$

6.2 Aufgabe 10

Gegeben: Staigner-Wagner-Spiel $(G, \mathcal{F})$ mit $G = (Q, E)$, wobei

1. $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$ abgeschlossen unter Vereinigung,
2. $\overline{\mathcal{F}} := 2^Q \setminus \mathcal{F}$ abgeschlossen unter Vereinigung.

(a) *Skizze:*



In der Zeichnung hat Position q maximale gerade Priorität p und und q' Priorität $p-1$.
Beweis:
Für $Z \subseteq Q$:

- Falls $\exists\ F \subseteq Z,\ F \in \mathcal{F}$: $\mu(Z) := \bigcup\{F \subseteq Z \mid F \in \mathcal{F}\}$.
- Falls $\exists\ F \subseteq Z,\ F \in \overline{\mathcal{F}}$: $\overline{\mu}(Z) := \bigcup\{F \subseteq Z \mid F \in \overline{\mathcal{F}}\}$.

1. Falls $\mathcal{F}$ unter Vereinigung abgeschlossen: $\mu(Z) \in \mathcal{F}$, $\mu(Z) \subseteq Z$ falls definiert.
2. $\mu(Z)$ ist $\subseteq$-maximal mit dieser Eigenschaft.

$A_0 := Q$.
Falls A_n bereits definiert, zwei Fälle:

1. $A_n \in \mathcal{F}$. Falls kein $F \subseteq A_n$, $F \in \mathcal{F}$: stopp.
   Sonst: $A_{n+1} := \overline{\mu}(A_n)$.

2. $A_n \in \overline{\mathcal{F}}$. Falls kein $F \subseteq A_n$, $F \in \mathcal{F}$: stopp.
   Sonst: $A_{n+1} := \mu(A_n)$.

Eigenschaften:

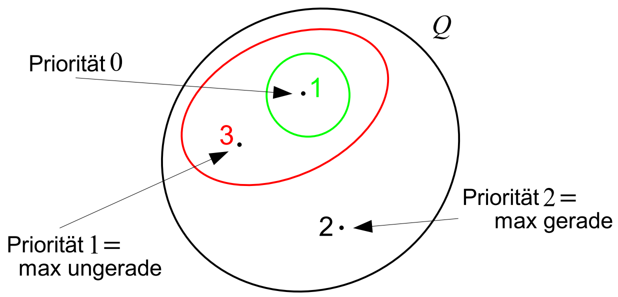
1. $Q = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots$ ist $\mathcal{F}$-alternierende Kette.
   „$\subseteq$“: nach Definition. „$=$“: $A_n \in \mathcal{F} \Leftrightarrow A_{n+1} \notin \mathcal{F}$.
2. Verfahren terminiert.
   $A_0 \supset A_1 \supset \cdots \supset A_k$, $A_{k+1} := \emptyset$.

Es gibt die beiden Fälle

1. $A_k \in \mathcal{F}$. Definiere $c(q) := k - i$ für $q \in A_i \setminus A_{i+1}$.
2. $A_k \notin \mathcal{F}$. Definiere $c(q) := k - i + 1$ für $q \in A_i \setminus A_{i+1}$.

$c(q)$ gerade $\Leftrightarrow$ $q \in A_i \setminus A_{i+1}$ mit $A_i \in \mathcal{F}$.✓
Zeige: $\max(c(\mathrm{Occ}(\rho)))$ gerade $\Leftrightarrow \mathrm{Occ}(\rho) \in \mathcal{F}$.
„$\Rightarrow$“: Sei $\max(c(\mathrm{Occ}(\rho)))$ gerade.
$\Rightarrow \exists i \leq k$: $\mathrm{Occ}(\rho) \subseteq A_i$ und $\mathrm{Occ}(\rho) \cap A_i \setminus A_{i+1} \neq \emptyset$ und $A_i \in \mathcal{F}$. $(*)$
Angenommen $\mathrm{Occ}(\rho) \notin \mathcal{F}$.
$\Rightarrow \mathrm{Occ}(\rho) \subseteq A_i \wedge \mathrm{Occ}(\rho) \in \overline{\mathcal{F}}$.
$\Rightarrow \mathrm{Occ}(\rho) \subseteq \overline{\mu}(A_i) = A_{i+1}$. Widerspruch zu $(*)$.
$\Rightarrow \mathrm{Occ}(\rho) \in \mathcal{F}$.
„$\Leftarrow$“: Analog. □

(b) *Beispiel:* $\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}\}$, $\overline{\mathcal{F}} = \{\{3\}, \{1,3\}\}$.
Skizze:



7 Übung vom 07.12.2005

7.1 Aufgabe 11

(a) $W_0 = \{8, 11, 12, 13, 14\}$, $W_1 = Q \setminus W_0$, denn:

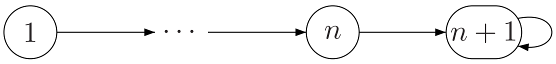
- $\mathrm{Attr}_0(F) = Q \setminus \{1, 2, 5, 9\}$ und $\mathrm{Recur}_0^1(F) = \{7, 13\}$.
- $\mathrm{Attr}_0(\mathrm{Recur}_0^1(F)) = Q \setminus \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ und $\mathrm{Recur}_0^2(F) = \{13\}$.
- $\mathrm{Attr}_0(\mathrm{Recur}_0^2(F)) = \{8, 11, 12, 13, 14\}$ und $\mathrm{Recur}_0^3(F) = \{13\}$.

Strategie für Spieler 0: $8 \to 12$, $12 \to 11$, $11 \to 13$ (Attraktorstrategie).
Strategie für Spieler 1: Falls $q \notin \mathrm{Attr}_0(\mathrm{Recur}_0^i(F))$, dann vermeide $\mathrm{Attr}_0(\mathrm{Recur}_0^i(F))$. $\Rightarrow$

> $\mathrm{Recur}_0^0(F)$: $2 \to 1$, $5 \to 9$.
>
> $\mathrm{Recur}_0^1(F)$: $4 \to 3$.
>
> $\mathrm{Recur}_0^0(F)$: $7 \to 3$, $10 \to 6$.

Hinweis: Einfache Ideen funktionieren nicht, z.B. $5 \to 6$, $7 \to 3$ (d.h. Spieler 1 bleibt in W_1). Dann kann nämlich Spieler 0 gewinnen mit $1 \to 5$, $9 \to 5$.

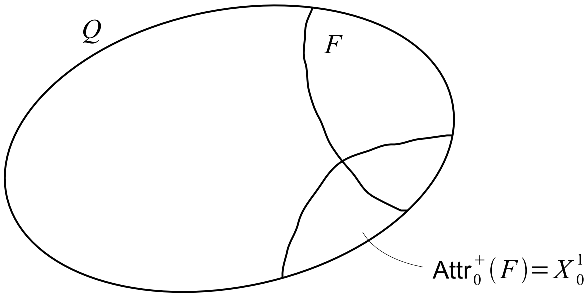
(b) $F = \{1, \ldots, n\}$.



Hier: $\mathrm{Recur}_0^i = \{1, \ldots, n - i\}$ $\forall i \leq n$.

7.2 Aufgabe 12

$\mathrm{Attr}_0^+(F) := \mathrm{Next}_0(\mathrm{Attr}_0(F))$
$\mathrm{Recur}_0^0(F) := F$, $\quad \mathrm{Recur}_0^{i+1}(F) := F \cap \mathrm{Attr}_0^+(\mathrm{Recur}_0^{i+1}(F))$ und $\mathrm{Recur}_0 := \bigcap\limits_{i \geq 1} X_0^i$.
Jetzt: $X_0^0 := F$, $\quad X_0^{i+1} := \mathrm{Attr}_0^+(X_0^j)$ und $X_0 := \bigcap\limits_{i \geq 1} X_0^i$. $X_0^2 := \mathrm{Attr}_0^+(X_0^1) = \mathrm{Next}_0(\underbrace{\mathrm{Attr}_0(X_0^1)}_{=X_0^1})$



$X_0^i = \underbrace{\mathrm{Next}_0(\ldots \mathrm{Next}_0}_{i}(X_0^1)) \ldots)$

(a) *Zu zeigen:* $X_0^n = X_0 = Q \setminus \mathrm{Attr}_1(Q \setminus \mathrm{Attr}_0(F))$.
Wir zeigen induktiv über i, dass $Q \setminus X_0^i = \mathrm{Attr}_1^i(Q \setminus \mathrm{Attr}_0(F))$ $\forall i \geq 1$ gilt.

I.A. $i = 1$:

$$\begin{aligned}
Q \setminus X_0^1 &= Q \setminus \mathrm{Attr}_0^+(F) = Q \setminus \mathrm{Next}_0(\mathrm{Attr}_0(F)) \\
&= Q \setminus (\{q \in Q_0 \mid \exists (q,p) \in E : p \in \mathrm{Attr}_0(F)\} \\
&\quad \cup \{q \in Q_1 \mid \forall (q,p) \in E : p \in \mathrm{Attr}_0(F)\}) \\
&= \{q \in Q_0 \mid \forall (q,p) \in E : p \notin \mathrm{Attr}_0(F)\} \cup \{q \in Q_1 \mid \exists (q,p) \in E : p \notin \mathrm{Attr}_0(F)\} \\
&= \mathrm{Attr}_1^1(Q \setminus \mathrm{Attr}_0(F)).
\end{aligned}$$

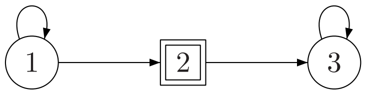
I.S. $i \to i+1$:

$$\begin{aligned}
Q \setminus X_0^{i+1} &= (Q \setminus X_0^i) \cup (X_0^i \setminus X_0^{i+1}) \\
&= (Q \setminus X_0^i) \cup \{q \in Q \mid q \in X_0^i, q \notin \mathrm{Attr}_0^+(X_0^i)\} \\
&= (Q \setminus X_0^i) \cup \{q \in Q \mid q \notin \mathrm{Attr}_0^+(X_0^i)\} \\
&= (Q \setminus X_0^i) \cup \{q \in Q \mid q \notin \mathrm{Next}_0(X_0^i)\} \\
&= \mathrm{Attr}_1^i(Q \setminus \mathrm{Attr}_0(F)) \cup \{q \in Q_0 \mid \forall (q,p) \in E : p \notin X_0^i\} \\
&\quad \cup \{q \in Q_1 \mid \exists (q,p) \in E : p \notin X_0^i\} \\
&= \mathrm{Attr}_1^i(Q \setminus \mathrm{Attr}_0(F)) \cup \{q \in Q_0 \mid \forall (q,p) \in E : p \in \mathrm{Attr}_1^i(Q \setminus \mathrm{Attr}_0(F))\} \\
&\quad \cup \{q \in Q_1 \mid \exists (q,p) \in E : p \in \mathrm{Attr}_1^i(Q \setminus \mathrm{Attr}_0(F)\} \\
&= \mathrm{Attr}_1^{i+1}(Q \setminus \mathrm{Attr}_0(F)).
\end{aligned}$$

$\square$

Merke: $\mathrm{Attr}_1^{i+1} = \mathrm{Attr}_1^i(X) \cup \mathrm{Attr}_1^1(\mathrm{Attr}_1^i(X))$ für ein $X \subseteq Q$.

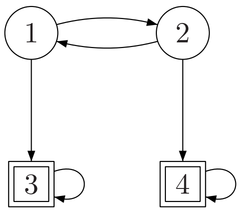
(b) Am Graphen aus Aufgabe 11: $W_0 \cap X_0 = \{6, 10\} \neq \emptyset$.
Oder kleiner:



Hier ebenfalls: $W_0 = \emptyset$ aber $X_0 = \{1\}$.

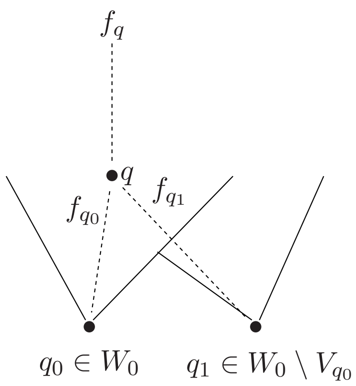
7.3 Zusatzaufgabe

1. Idee: f_q sei positionale Strategie von Q aus. Wähle $f_q(q)$ für alle $q \in Q \cap W_0$.
   Das tuts nicht! Beispiel:



$f_1: \ 1 \to 2, \ 2 \to 4$
$f_2: \ 1 \to 4, \ 2 \to 1$
aber Kombination der beiden
ist keine Gewinnstrategie

2. Besser:



D.h., falls sich die Strategien f_{q_0} und f_{q_1} in $q \in Q$ schneiden, fahre mit Strategie f_q ab Position q fort. Hier bezeichne V_0 die Menge der Knoten, die bei f_{q_0} gesehen werden (V: „Trichter“).

8 Übung vom 14.12.2005

8.1 Aufgabe 13

(a)
- unveränderter Spielgraph: $W_0 = Q$, $W_1 = \emptyset$.
  Strategie von Spieler 0*:* $q_1 \to q_2$, $q_2 \to q_5$, $q_7 \to q_3$, $q_9 \to q_5$, $q_{10} \to q_9$.
- veränderter Spielgraph (Spieler 1 Knoten zu Spieler 0 Knoten und umgekehrt):
  $W_0 = \{q_2, q_5, q_6, q_9, q_{10}\}$, $W_1 = Q \setminus W_0$.
  Strategie für Spieler 0*:* $q_5 \to q_6$, $q_6 \to q_2$.
  Strategie für Spieler 1*:* $q_1 \to q_4$, $q_7 \to q_8$.

(b) Sei (G, c) mit $G = (Q, E)$, $Q = Q_0 \cup Q_1$.
Definiere (G', c') mit $G' = (Q', E)$, $Q' = Q'_0 \cup Q'_1$, $Q'_0 := Q_1$, $Q'_1 := Q_0$ und $c' := c(q) + 1$.

Beh.: $W_i = W_{1-i}$, $i = 0, 1$.
Bew.:

1. Sei f Strategie von Spieler i in (G, c). $\Rightarrow$ f ist Strategie von Spieler $1 - i$ in (G', c').
2. Es sind in beiden Graphen gleiche Partien möglich wegen unveränderter Kantenrelation E.
3. Angenommen f ist Gewinnstrategie für Spieler 0 in (G, c) und ρ Partie gemäß f in (G, c), d.h., $\max(\mathrm{Inf}(c(\rho)))$ ist gerade.
   $\Rightarrow$ f ist Strategie für Spieler 1, ρ ist gemäß dieser Strategie in (G', c').
   $\Rightarrow$ $\max(\mathrm{Inf}(c'(\rho)))$ ist ungerade.

Die Umkehrung für Spieler 1 ist analog beweisbar. □

8.2 Aufgabe 14

(a) $(G, \mathcal{F})$ Muller-Spiel. *Annahmen:*

$$S \in \mathcal{F}, S \subseteq S' \;\Rightarrow\; S' \in \mathcal{F}. \tag{1}$$
$$S_1, S_2 \in (2^Q \setminus)F =: \overline{\mathcal{F}} \;\Rightarrow\; S_1 \cup S_2 \in \overline{\mathcal{F}}. \tag{2}$$

O.E. $\overline{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ [sonst setze $F := Q$].
Definiere $\overline{\mu} := \bigcup_{S \in \mathcal{F}} S$.
Dann folgt mit (2)

$$\overline{\mu} \in \overline{\mathcal{F}} \tag{3}$$

und $\overline{\mu}$ ist $\subseteq$-maximal mit dieser Eigenschaft:

$$S \in \overline{\mathcal{F}} \quad\Rightarrow\quad S \subseteq \overline{\mu}. \tag{4}$$

Definiere Büchi-Spiel (G, F) mit $F := Q \setminus \overline{\mu}$.

Zeige: Spieler 0 gewinnt ρ in $(G, \mathcal{F})$ $\Leftrightarrow$ Spieler 0 gewinnt ρ in (G, F) $\forall$ Partien ρ.
„$\Rightarrow$“: $\mathrm{Inf}(\rho) \in \mathcal{F}$. Angenommen Spieler 0 gewinnt (G, F) nicht, d.h., $\mathrm{Inf}(\rho) \subseteq Q \setminus F$.

$\overset{(1)}{\Rightarrow} \underbrace{Q \setminus F}_{=\overline{\mu}} \in \mathcal{F}$. Widerspruch zu (3).

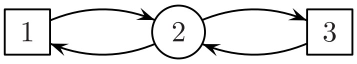
$\Rightarrow$ Spieler 0 gewinnt ρ in (G, F).

„$\Leftarrow$“: $\mathrm{Inf}(\rho) \notin \mathcal{F}$, d.h., $\mathrm{Inf}(\rho) \in \overline{\mathcal{F}}$.

$\overset{(4)}{\Rightarrow} \mathrm{Inf}(\rho) \subseteq \overline{\mu} = Q \setminus F$.

$\Rightarrow \mathrm{Inf}(\rho) \cap F = \emptyset$. Widerspruch zu Spieler 0 gewinnt das Büchi-Spiel nicht. □

Bemerkung: Beide Eigenschaften an $\mathcal{F}$ sind notwendig. Betrachte „Standardgegenbeispiel“.



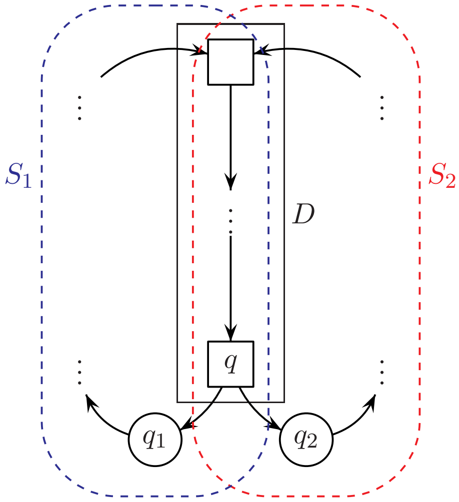
$\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}\}$. Also ist (1) erfüllt, (2) aber nicht.

$\mathcal{F} = 2^Q \setminus \{\{1, 2, 3\}\}$. Hier ist (1) nicht erfüllt, wohl aber (2).

(b) Sei Q fest und $\mathcal{F} \subseteq 2^Q$ und $\exists\, S_1, S_2 \in \mathcal{F}$ mit

- $S_1 \cup S_2 \notin \mathcal{F}$,
- $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$.

Seien S_1, S_2 wie oben. $D := S_1 \cap S_2$, $D \neq \emptyset$.



$q_1 \in S_1 \setminus S_2$. [Angenommen $S_1 \setminus S_2 = \emptyset \;\Rightarrow\; S_2 \subseteq S_1 \Rightarrow S_1 \cup S_2 = S_1 \in \mathcal{F}$.]

$q_2 \in S_2 \setminus S_1$ mit analoger Begründung. □

9 Übung vom 21.12.2005

9.1 Aufgabe 15

$\mathrm{LAR}(Q) \sim n!$ $(\sim n^n)$.

hier: $\mathrm{LAQ}(Q) \sim n^n$.

Aktualisierungs-Strategie: z.B.

- $ABCD \overset{C}{\rightsquigarrow} CABC$
- $AAAA \overset{B}{\rightsquigarrow} BAAA \overset{B}{\rightsquigarrow} \cdots \overset{B}{\rightsquigarrow} BBBB$.

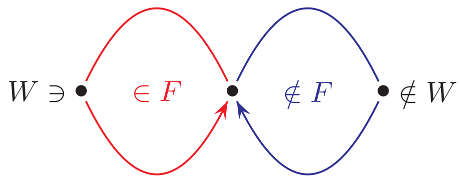
Beispiel dazu, dass die Strategie f von Spieler 0 nicht funktioniert:

Partie ρ:	A	4	A	3	A	2	B	1	B
Speicher:	$ABCD$		$AABC$		$AAAB$		$AAAA$		$BAAA$
	B	2	C	2	C	2	C	2	A
	$BBAA$		$BBBA$		$CBBB$		$CCBB$		$CCCB$
	A	2	A	2	B	2	B	2	...
	$ACCC$		$AACC$		$AAAC$		$BAAA$		...

Züge von Spieler 1: $(AAABBBCCC)^\omega$.

9.2 Aufgabe 16

Betrachte die folgenden drei Schleifen:



Wählt man die dritte Schleife (welche die rote und blaue Schleife umfasst) in $\mathcal{F}$, so können nur Positionen der roten Schleife relevant (in W) sein.
Definition von W: $\forall$ Schleifen $F \in \mathcal{F}$, $\forall$ Schleifen $F' \notin \mathcal{F}$ gilt $W \cap (F \triangle F') \neq \emptyset$.
Bemerkung:

1. $W = \emptyset \Rightarrow \mathcal{F} = \emptyset$ oder $\mathcal{F} = 2^Q$.
2. Nach Definition ist $\mathrm{Inf}(\rho)$ immer eine Schleife.

(a) $\forall\ \rho \in Q^\omega$: $\mathrm{Inf}(\rho) \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathrm{Inf}(\rho) \cap W = F \cap W$ für eine Schleife $F \in \mathcal{F}$.
Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $\mathrm{Inf}(\rho) \in \mathcal{F}$.
Dann ist $\mathrm{Inf}(\rho) \cap W = F \cap W$ für die Schleife $F = \mathrm{Inf}(\rho) \in \mathcal{F}$.
„$\Leftarrow$“: Sei $\mathrm{Inf}(\rho) \notin \mathcal{F}$. Definition von W ($\mathrm{Inf}(\rho)$ Schleife): $W \cap (\mathrm{Inf}(\rho) \triangle F) \neq \emptyset\ \forall$ Schleifen $F \in \mathcal{F}$.
$\Rightarrow \forall$ Schleifen $F \in \mathcal{F}$: $\exists q \in Q$ mit $q \in W \cap \mathrm{Inf}(\rho) \setminus F$ oder $q \in W \cap F \setminus \mathrm{Inf}(\rho)$.
$\Rightarrow \forall$ Schleifen $F \in \mathcal{F}$: $\mathrm{Inf}(\rho) \cap W \nsubseteq F \cap W$ oder $F \cap W \nsubseteq \mathrm{Inf}(\rho) \cap W$.
$\Rightarrow \forall$ Schleifen $F \in \mathcal{F}$: $\mathrm{Inf}(\rho) \cap W \neq F \cap W$. □

(b) $\mathrm{LAR}(W) := \{(q_1, \dots, q_n) \mid n = |W|, q_i \neq q_j$ für $i \neq j\}$. [$W = \emptyset$: $\mathrm{LAR}(W) = \{()\}$ und insbesondere $|\mathrm{LAR}(W)| = 1$.]

- Speicheraktualisierung: $\sigma_W : \mathrm{LAR}(W) \times Q \to \mathrm{LAR}(W)$:

$$\sigma_W((Q_0, \dots, q_n), q) := \begin{cases} (q_1, \dots, q_n), & q \notin W \\ (q, q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n), & q \in W, q_i = q \end{cases}$$

  Beispiel: $W = \{q_1, q_2\}$, $Q = W \cup \{q_3, q_4\}$: $\sigma_W((q_1, q_2), q_2) = (q_2, q_1)$.

- Treffermenge für $((q_1, \dots, q_n), q) : \begin{cases} (q_1, \dots, q_i), & q \in W, q_i = q \\ \emptyset, & \text{sonst} \end{cases}$
- Partie $\rho \in Q^\omega \rightsquigarrow \rho' \in (\mathrm{LAR}(W) \times Q)^\omega$.

– Modifiziertes LAR-Lemma: Treffermenge ist unendlich oft gleich $\mathrm{Inf}(\rho) \cap W$ und ab einer bestimmten Stelle immer Teilmenge von $\mathrm{Inf}(\rho) \cap W$. (Beweis analog zur Vorlesung.)

Reduktion: MULLER → Parität.
$S := \mathrm{LAR}(W)$, $\sigma := \sigma_W$, s_0 beliebig in $\mathrm{LAR}(W)$.
Prioritätsfunktion $c : \mathrm{LAR}(W) \times Q \to \mathbb{N}$.
Sei $(s, q) \in \mathrm{LAR}(W) \times Q$, T Treffermenge von (s, q).

$$c(s,q) = \begin{cases} 2 \cdot |T| + 2, & \text{falls } \exists \text{ Schleife } F \in \mathcal{F} \text{ mit } T = F \cap W \\ 2 \cdot |T| + 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

(Hier sind die Kosten um 2 nach oben verschoben, da auch $T = \emptyset$ möglich ist.)
Korrektheit (Skizze): Nach modifiziertem LAR-Lemma und Teil (a):

– $\mathrm{Inf}(\rho) \in \mathcal{F} \Rightarrow$ maximale Priorität ist $2 \cdot |\mathrm{Inf}(\rho) \cap W| + 2$.

– $\mathrm{Inf}(\rho) \notin \mathcal{F} \Rightarrow$ maximale Priorität ist $2 \cdot |\mathrm{Inf}(\rho) \cap W| + 1$.

□

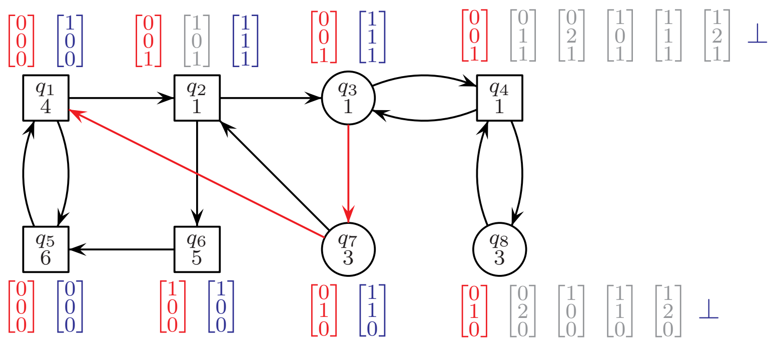
10 Übung vom 11.01.2006

10.1 Aufgabe 17

- Fortschrittsmaß:

$$\begin{array}{r} 5 \sim \\ 3 \sim \\ 1 \sim \end{array} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \in \{0,1\} \\ \in \{0,1,2\} \\ \in \{0,1,2,3\} \end{array} \quad , \qquad \perp$$

- Spielgraph mit Anfangsbewertung (rot, links), Zwischenbewertungen (grau) und Endbewertung (blau, rechts):



Der Algorithmus terminiert bei beliebig gewählter Knotenreihenfolge. Eine gute Wahl liefert jedoch eine geringere Laufzeit. Hier wird z.B. so vorgegangen:

$$q_4, q_8, \ldots, q_4, q_8, q_2, q_1, q_7, q_3, q_1, q_6, q_5$$

- Der Algorithmus liefert also $W_0 = Q \setminus \{q_4, q_8\}$ und die rot gekennzeichnete Gewinnstrategie für Spieler 0.

10.2 Aufgabe 18

(a) Büchi-Spiel $(G, F) \Rightarrow$ äquivalentes Paritätsspiel (G, c) mit

$$c(q) = \begin{cases} 1 & q \notin F \\ 2 & q \in F \end{cases}.$$

- Bewertungen: Natürliche Zahlen oder $\perp$.
- Intention: Bei Termination gibt $\mu(q)$ die Anzahl der Schritte an, bis Spieler 0 den Besuch von F garantieren kann.
- Initialisierung:

$$\mu(q) = \begin{cases} 0 & q \in F \\ 1 & q \notin F \end{cases}$$

- Update: Solange noch möglich:

  $q \in Q_0$: Wähle Nachfolger q' mit minimaler Bewertung.

  $q \in Q_1$: Wähle Nachfolger q' mit maximaler Bewertung.

  Insbesondere wird hier die normale $\leq$ - Ordnung auf $\mathbb{N}$ verwendet mit $n < \perp \ \forall n \in \mathbb{N}$.
- Neue Bewertung:

$$\mu'(q) := \begin{cases} \perp & \text{, falls } \mu(q') = \perp \\ 0 & \text{, falls } \mu(q') \neq \perp \text{ und } q \in F \\ \mu(q') + 1 & \text{, falls } \mu(q') < |Q \setminus F| \text{ und } q \notin F \\ \perp & \text{, falls } \mu(q') = |Q \setminus F| \text{ und } q \notin F \end{cases}.$$

(b) Strategie für Spieler 0 nach Termination: $X := \{q \in Q \mid \mu(q) \neq \perp\}$.
Beh.: $X \subseteq W_0$.
Strategie f: Für $q \in Q_0$, $\mu(q) \neq \perp$: Wähle Nachfolger mit minimaler Bewertung.
Zeige: f ist Gewinnstrategie von $q \in X$ aus.

- Nach Update:
  * $q \in Q_0$, $\mu(q) \neq \perp \Rightarrow \mu(f(q)) \neq \perp$.
  * $q \in Q_1$, $\mu(q) \neq \perp \Rightarrow \mu(q') \neq \perp \ \forall$ Nachfolger q'.

  $\Rightarrow$ Jede f-Partie von $q \in X$ bleibt in X.
- Nach Definition:
  * $q \notin F$, $q \in Q_0$: $\mu(f(q)) < \mu(q)$.
  * $q \notin F$, $q \in Q_1$: $\mu(q') < \mu(q) \ \forall$ Nachfolger q'.

  Insgesamt ergibt sich $\mu(q) = 0 \Leftrightarrow q \in F \cap X$. □

11 Übung vom 18.01.2006

11.1 Aufgabe 19

(a) • $T_1 = \{t \in T_{\{a,b\}} \mid t \text{ enthält genau zwei } b\}$.
Idee: 3 Zustände q_0, q_1, q_2 mit der Interpretation, dass in q_i der aktuelle Unterbaum genau i mal ein b enthält.
Büchi-Baumautomat $\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{a, b\}, q_2, \Delta, F)$

Transitionen mit a:

$$\begin{array}{c} q_2\ a \\ / \ \backslash \\ q_2 \quad q_0 \end{array},\quad \begin{array}{c} q_2\ a \\ / \ \backslash \\ q_0 \quad q_2 \end{array},\quad \begin{array}{c} q_2\ a \\ / \ \backslash \\ q_1 \quad q_1 \end{array},\quad \begin{array}{c} q_1\ a \\ / \ \backslash \\ q_1 \quad q_0 \end{array},\quad \begin{array}{c} q_1\ a \\ / \ \backslash \\ q_0 \quad q_1 \end{array},\quad \begin{array}{c} q_0\ a \\ / \ \backslash \\ q_0 \quad q_0 \end{array}.$$

Transitionen mit b:

$$\begin{array}{c} q_2\ b \\ / \ \backslash \\ q_1 \quad q_0 \end{array},\quad \begin{array}{c} q_2\ b \\ / \ \backslash \\ q_0 \quad q_1 \end{array},\quad \begin{array}{c} q_1\ b \\ / \ \backslash \\ q_0 \quad q_0 \end{array}.$$

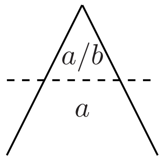
Bemerkung:

(1) Entscheidend ist der Nicht-Determinismus. (Tatsächlich würde es deterministisch nicht funktionieren!)

(2) Keine Transition für q_0, b.

(3) Formal lautet z.B. die erste Transition $(q_2, a, q_2, q_0) \in \Delta$.

- $T_2 = \{t \in T_{\{a,b\}} \mid t \text{ enthält endlich viele } b\}$.
  Idee:



Der akzeptierte Baum hat in jedem Pfad eine bestimmte Position, nach welcher kein b mehr vorkommt, so dass sich der Baum in zwei Hälften teilt. Der Automat rät nun diese Grenzlinie, wobei im oberen Baum die Beschriftung q_- (schlechter Zustand) und im oberen Baum die Beschriftung q_+ (guter Zustand) gewählt wird.
Büchi-Baumautomat $\mathcal{A} = (\{q_-, q_+\}, \{a, b\}, q_-, \Delta, \{q_+\})$ mit Δ wie folgt:

$$\begin{array}{c} q_-\ a/b \\ / \ \backslash \\ q_- \quad q_- \end{array},\quad \begin{array}{c} q_-\ a/b \\ / \ \backslash \\ q_+ \quad q_+ \end{array},\quad \begin{array}{c} q_+\ a \\ / \ \backslash \\ q_+ \quad q_+ \end{array}.$$

Je nach Wahl der zweiten Transition kann die Grenzlinie eher grob bzw. eher fein verlaufen, was auf das Ergebnis aber keinen Einfluß hat. □

(b)

$$T_3 := \left\{ t \in T_{\{a,b,c\}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{für alle Pfade } \pi \text{ enthält } t|_\pi \text{ nur endlich viele } b \text{ und} \\ \text{es gibt einen Pfad } \pi \text{, so dass } t|_\pi \text{ unendlich viele } c \text{ enthält} \end{array} \right\}$$

Idee:

(1) Speichere Label als Zustand.

(2) Konstruiere schönen Pfad durch Suchzustände.

Paritätsbaumautomat $\mathcal{A} = (Q, \{a, b, c\}, q_a^+/q_b^+/q_c^+, \Delta, c)$ mit $Q := \{q_a, q_b, q_c, \underbrace{q_a^+, q_b^+, q_c^+}_{\text{Suchzustände}}\}$, wobei auch q_a und q_c zu einem Zustand zusammengefasst werden können. Die Transitionen ergeben sich für $x, y \in \{a, b, c\}$ zu

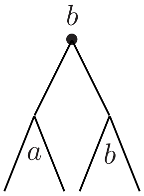
$$\begin{array}{c} q_x^+\ y \\ / \ \backslash \\ q_y^+ \quad q_y^+ \end{array},\quad \begin{array}{c} q_x^+\ y \\ / \ \backslash \\ q_y \quad q_y^+ \end{array},\quad \begin{array}{c} q_x^+\ y \\ / \ \backslash \\ q_y^+ \quad q_y \end{array},\quad \begin{array}{c} q_x^+\ y \\ / \ \backslash \\ q_y \quad q_y \end{array}.$$

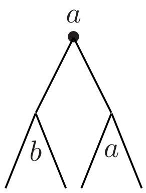
Daraus ergibt sich die Kostenfunktion

$$
\begin{aligned}
c(q_a) = c(q_c) = 0, \quad & c(q_a^+) = 1, \\
c(q_b) = 1, \quad & c(q_b^+) = 3, \\
& c(q_c^+) = 2.
\end{aligned}
$$

11.2 Aufgabe 20

(a) Die Bäume t_1, t_2 haben die folgende Form:

t_1: 

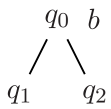
, t_2: 

.

$T := \{t_2, t_2\}$.

Angenommen es existiert ein deterministischer Muller-Baumautomat $\mathcal{A} = (Q, \{a, b\}, q_0, \Delta, \mathcal{F})$ mit $T(\mathcal{A}) = T$.

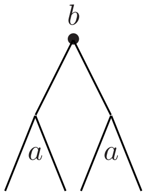
$\Rightarrow \exists$ akzeptierende Läufe ρ_1, ρ_2 auf t_1, t_2 der Form



für $q_1, q_2 \in Q$. Definiere Lauf $\rho : \{0,1\}^* \to Q$ durch

$$
\rho(u) := \begin{cases} q_0 & u = \varepsilon \\ \rho_1(u) & u = 0u', \text{ für } u' \in \{0,1\}^* \\ \rho_2(u) & u = 1u', \text{ für } u' \in \{0,1\}^* \end{cases}
$$

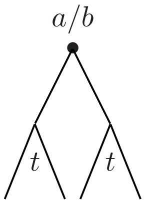
<u>Beh.:</u> ρ ist akzeptierender Lauf von $\mathcal{A}$ auf



$\notin T$.

Es ergibt sich also ein Widerspruch. $\square$

(b) Bäume aus T:

t_1: 

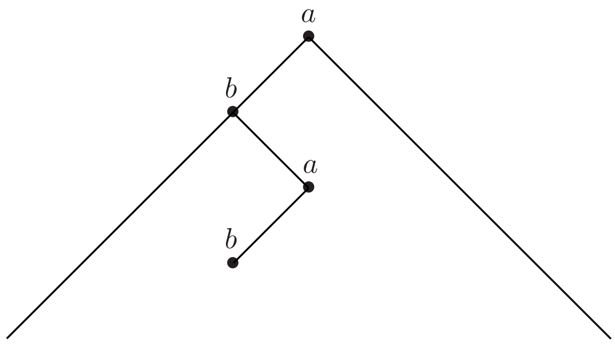
Skizze: Nach Schubfachprinzip müssen zwei verschiedene Unterbäume t existieren mit gleicher Anfangstransition. Man wendet nun die gleiche Konstruktion an und kommt so zu einem Widerspruch. $\square$

12 Übung vom 25.01.2006

12.1 Aufgabe 21

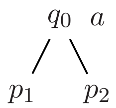
Beispiel:

- Baum t :



- Pfad $\pi = 0110\ldots \in \{0,1\}^\omega$.
- $t|_\pi = abaab\ldots \in \Sigma^\omega$.
- $\pi^\frown t|_\pi = (0,a)(1,b)(1,a)(0,a)\ldots \in (\{0,1\} \times \Sigma)^\omega$.

(a) Sei $\mathcal{A} = (Q, \{0,1\} \times \Sigma, q_0, \delta, \mathrm{Acc})$ deterministischer Wortautomat, wobei Acc Büchi-, Muller oder Paritätsbedingung ist.
Definiere Baumautomat $\hat{\mathcal{A}} = (Q, \Sigma, q_0, \hat{\delta}, \mathrm{Acc})$, wobei $\hat{\delta}$ von der Form



$$p_1 = \delta(q,(0,a))$$
$$p_2 = \delta(q,(1,a))$$

bzw. formal $\hat{\delta} = (\delta(q,(0,a)), \delta(q,(1,a)))$.
Eigenschaften:

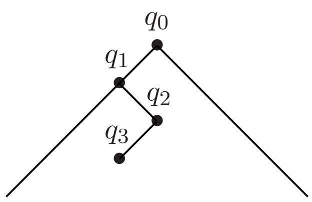
1. $\hat{\mathcal{A}}$ ist auch deterministisch.
2. Gleiche Akzeptanzbedingung wie $\mathcal{A}$.

Beispiel für die Läufe:

$\mathcal{A}$:

$$q_0 \xrightarrow{(0,a)} q_1 \xrightarrow{(1,b)} q_2 \xrightarrow{(1,a)} \ldots$$

$\hat{\mathcal{A}}$:



Sei für $\alpha \in (\{0,1\} \times \Sigma)^\omega$ ρ_α der eindeutige ($\mathcal{A}$ deterministisch) Lauf von $\mathcal{A}$ auf α. Sei für $t \in T_\Sigma$ $\hat{\rho}_t$ der eindeutige ($\hat{\mathcal{A}}$ deterministisch) Lauf von $\hat{\mathcal{A}}$ auf t.
<u>Beh.:</u> $\forall$ Pfade $\pi \in \{0,1\}^\omega$, $\forall t \in T_\Sigma$: $\rho_{\pi^\frown t|_\pi} = \hat{\rho}_{t|_\pi}$. (Beachte: Beide Seiten sind Funktionen $\mathbb{N} \to Q$.)
<u>Bew.:</u> Induktion: („$\rho_{n+1} = \delta(\rho_n, a)$“)

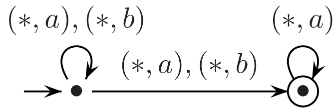
- $\rho_{\pi^\frown t|_\pi}(0) = q_0 = \hat{\rho}_{t|_\pi}(0)$.
- I.V.: Beh. gelte für n.
- $\rho_{\pi^\frown t|_\pi}(n+1) = \delta(\underbrace{\rho_{\pi^\frown t|_\pi}(n)}_{\overset{\text{I.V.}}{=} \hat{\delta}_{t|_\pi(n)}}, \underbrace{\pi^\frown t|_\pi(n)}_{=(\pi(n), t|_{\pi(n)})}) = \hat{\rho}_{t|_\pi}(n+1)$.

$\square$

Insbesondere:

$$\begin{aligned} t \in T(\hat{\mathcal{A}}) &\Leftrightarrow \forall \text{ Pfade } \pi \in \{0,1\}^\omega : \hat{\rho}_{t|_\pi} \text{ erfüllt Acc} \\ &\Leftrightarrow \forall \text{ Pfade } \pi \in \{0,1\}^\omega : \rho_{\pi^\frown t|_\pi} \text{ erfüllt Acc} \\ &\Leftrightarrow \forall \text{ Pfade } \pi \in \{0,1\}^\omega : \pi^\frown t|_\pi \in L(\mathcal{A}) = L \\ &\Leftrightarrow t \in T(L). \end{aligned}$$

(b) $L := \{\pi^\frown\alpha \in (\{0,1\} \times \Sigma)^\omega \mid \alpha \text{ enthält nur endlich viele } b, \pi \text{ beliebig}\}$, $\Sigma = \{a, b\}$.
$\mathcal{A}$:



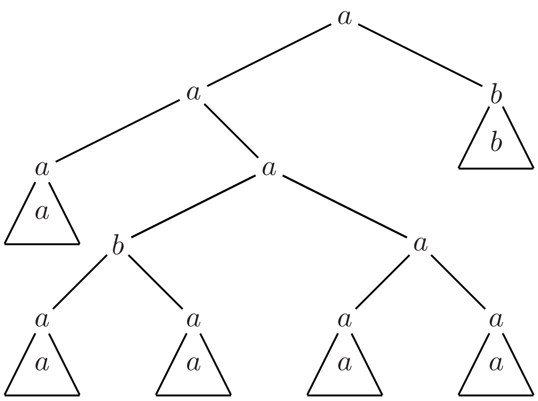
Klar: $\mathcal{A}$ nichtdeterministisch und $L(\mathcal{A}) = L$.
$T(L) = \{t \in T_\Sigma \mid \forall \text{ Pfade } \pi \in \{0,1\}^\omega : t|_\pi \text{ enthält nur endlich viele } b\}$.
Vorlesung: $T(L)$ kann durch keinen BÜCHI-Baumautomaten erkannt werden („Pumping Lemma“)!

12.2 Aufgabe 22

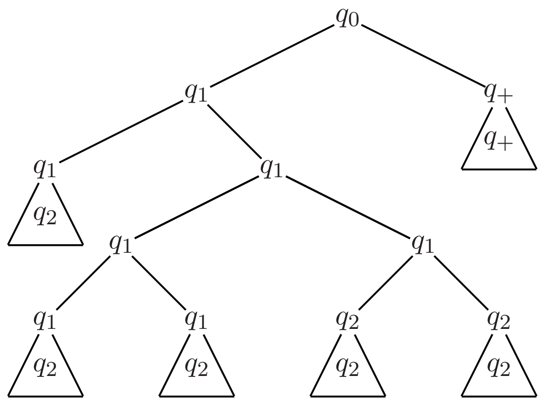
(a) $\mathcal{A}$ akzeptiert Bäume mit:

1. an der Wurzel steht a,
2. ein Teilbaum der Wurzel enthält nur endlich viele b.

(b) t_0 :



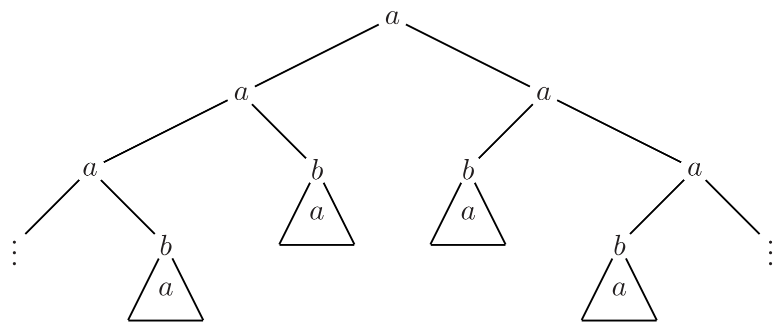
akzeptierender Lauf von $\mathcal{A}$ auf t_0 :



positionale Gewinnstrategie f_0:

- $(\varepsilon, a, q_0) \to (\varepsilon, a, \tau_0^{a,1})$,
- $(v, b, q_+) \to (v, b, \tau_+^b)$ für alle $v \in 1(0+1)^*$,
- $(v, a, q_1) \to (v, a, \tau_1^{a,1})$ für alle $v \in 0 + 01$,
- $(010, b, q_1) \to (010, b, \tau_1^b)$,
- $(v, a, q_1) \to (v, a, \tau_1^{a,2})$ für alle $00 + 011 + 0100 + 0101$,
- $(v, a, q_2) \to (v, a, \tau_2^a)$ für alle anderen v.

(c) t_1 :



positionale Gewinnstrategie f_1:

- $(\varepsilon, a, \tau_0^{a,1}) \to (0, a, q_1)$,
- $(u, a, \tau_1^{a,1}) \to (u0, a, q_1)$, $u \in 0^+$,
- $(u, b, \tau_1^{a,2}) \to (u1, b, q_2)$, $u \in 0^+$,
- $(u, b, \tau_2^b) \to (u0, a, q_\perp)$, $u \in 0^+1$,
- $(u, a, \tau_\perp^a) \to (u0, a, q_\perp)$, $u \in 0^+1(0+1)^+$.

13 Übung vom 01.02.2006

13.1 Aufgabe 23

Sei $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, \delta, c)$ ein deterministischer Paritätsbaumautomat mit $c : Q \to \{0, \dots, k\}$.
Für alle $t \in T_\Sigma$ existiert also ein eindeutiger Lauf $\rho|_t$.

$$\begin{aligned} t \in T(\mathcal{A}) \quad \Leftrightarrow \quad & \forall \text{ Pfade } \pi \in \{0,1\}^\omega : \rho_t|_\pi \text{ erfüllt die Paritätsbedingung,} \\ & \text{d.h., } \max(\mathrm{Inf}(c(\rho_t|_\pi))) \text{ ist gerade.} \end{aligned}$$

Also ist

$$t \in T_\Sigma \setminus T(\mathcal{A}) \quad \Leftrightarrow \quad \exists \text{ Pfad } \pi \in \{0,1\}^\omega : \rho_t|_\pi \text{ erfüllt die Paritätsbedingung nicht.}$$

Konstruiere Büchi Baumautomat $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, q_0, \Delta', F')$:

- informell:
  - Er rät nichtdeterministisch den Pfad wie oben.
  - Alle anderen Pfade akzeptiert er.
  - Auf π rät er
    1. eine Position,
    2. eine ungerade Priorität $0 \leq l \leq k$,

    so dass ab dieser Position
    - l unendlich oft gesehen wird (Büchi-Bedingung),
    - keine Priorität $> l$ gesehen wird (entferne entsprechende Zustände).
- formal:
  - $Q' = Q \cup Q \times \{l \mid 0 \leq l \leq k, l \text{ ungerade}\} \cup \{q_+\}$ mit $q_+ \notin Q$.
  - Für alle $\begin{array}{ccc} & q\ a & \\ / & & \backslash \\ q_1 & & q_2 \end{array} \in \Delta$ füge Transitionen zu Δ' hinzu:
    1. $\begin{array}{ccc} & q\ a & \\ / & & \backslash \\ q_1 & & q_+ \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & q\ a & \\ / & & \backslash \\ q_+ & & q_2 \end{array}$
    2. $\begin{array}{ccc} & q\ a & \\ / & & \backslash \\ q_{(1,l)} & & q_+ \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & q\ a & \\ / & & \backslash \\ q_+ & & q_{(2,l)} \end{array}$ für $0 \leq l \leq k$ ungerade.
    3. $\begin{array}{ccc} & (q,l)a & \\ / & & \backslash \\ (q_1,l) & & q_+ \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} & (q,l)a & \\ / & & \backslash \\ q_+ & & (q_2,l) \end{array}$ falls $c(q) \leq l$.
    4. $\begin{array}{ccc} & q_+\ a & \\ / & & \backslash \\ q_+ & & q_+ \end{array}$
  - $F' = \{Q_+\} \cup \{(q,l) \mid 0 \leq l \leq k, l \text{ ungerade und } c(q) = l\}$.
  - $q_0' = q_0$

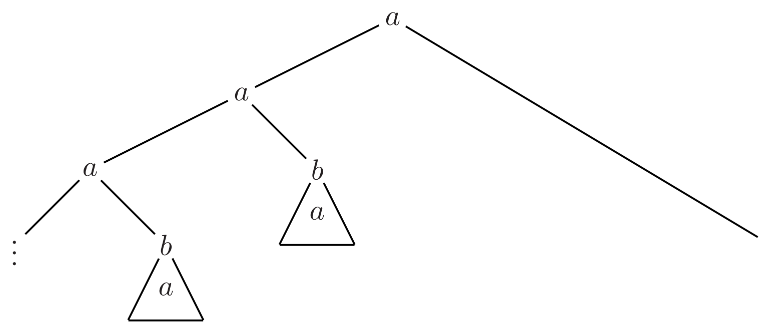
$|\mathcal{A}'| = |Q'| + |\Delta'| \in \mathcal{O}(k \cdot |\mathcal{A}|)$.

13.2 Aufgabe 24

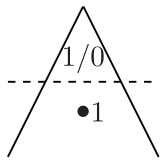
(a) $\varphi_1(X) := \exists Y(\mathrm{Path}(Y) \wedge \forall x \exists y(x \in Y \to x \sqsubseteq y \wedge y \in Y \wedge y \in X))$.
Bemerkung: $y \in X$ bedeutet hier, dass der Knoten y die Beschriftung/das Label 1 hat, da X als freie Mengenvariable genau die Knoten des Baums enthält, welche mit 1 beschriftet sind. Allgemein ist die Beschriftung ein Vektor $b \in \{0,1\}^n$, hier ist $n = 1$.

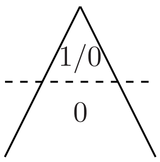
(b) $\varphi_2(X) := \forall Y[\mathrm{Path}(Y) \to \exists x(x \in X \wedge x \in Y \wedge \forall y(y \in Y \wedge x \neq y \to \neg y \in X))]$.

(c) ACHTUNG: „es existieren unendlich viele 1“ und „es existiert ein Pfad mit unendlich vielen 1“ sind *nicht* äquivalent.
Standardbeispiel: „Der Kamm“



Zwei Lösungen:

(i) Egal, wo der Schnitt ist, ich finde immer noch eine 1: 

oder 

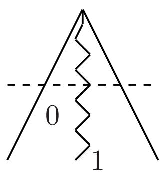
Das Komplement von „es gibt nur nur endlich viele 1“.

$t \in T_3 \quad \Leftrightarrow \quad$ „für alle Schnitte existiert südlich eine 1“

$$\varphi_3(X) := \forall Y(\underbrace{\varphi_2(X)}_{\text{„}X\text{ ist ein Schnitt“}} \to \exists y \exists z(y \in Y \wedge y \sqsubseteq z \wedge z \in X))$$

(ii) Idee: $t \in T_3 \quad \Leftrightarrow \quad$ „es existiert ein Pfad, so dass von jedem Knoten des Pfades eine 1 erreicht werden kann“

Kurzfassung des Beweises:

„$\Leftarrow$“ (Korrektheit): Angenommen t habe endlich viele 1, dann: 

„$\Rightarrow$“ (Vollständigkeit): Benutze Königs Lemma.
$B := \{u \in \{0,1\}^* \mid \exists v : u \sqsubseteq \wedge t(u) = 1, t \in T_3\}$. Eigenschaften:

* B ist ein Baum.

* B ist endlich verzweigt.
* B ist unendlich.

$\Rightarrow$ (Königs Lemma) es existiert ein unendlicher Pfad durch B. $\square$

Also ist die Formel:

$$\varphi_3'(X) = \exists Y(\mathrm{Path}(Y) \wedge \forall y \exists z(y \in Y \to y \sqsubseteq z \wedge z \in X)).$$

Zur Äquivalenz der beiden Formeln $\varphi_3(X)$ und $\varphi_3'(X)$:

1. Definiere $\psi(X) := \forall x(\varphi_3(X) \leftrightarrow \varphi_3'(X))$.
2. Konstruiere Büchi Automat $\mathcal{A}$ für ψ.
3. Teste $L(\mathcal{A}) = \emptyset$.