Skript zur Vorlesung

Theorien, Spiele, Algorithmen

gehalten von Prof. Erich Grädel
Mathemathische Grundlagen der Informatik
im Wintersemester 2003 / 2004

geTEXt von Stefan Buhr (stefan.buhr@rwth-aachen.de)
(Stand der Bearbeitung: 30. Juni 2004)

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Drei wesentliche Bestandteile der Vorlesung sind:

- algorithmische Probleme in der Logik
- Entscheidbarkeit Komplexität
- Zusammenhang zu Theorie endlicher und unendlicher Spiele

Algorithmische Probleme in der Logik

Gegeben sei eine Logik $\mathfrak{L}$, z. B.FO, MSO, ML, ...
Formeln sind endliche Wörter über einem endlichen Alphabet, d. h. wir betrachten keine infiniten Logiken.
Zunächst identifizieren wir zwei wesentliche Klassen von algorithmischen Problemen:

Erfüllbarkeit, Gültigkeit, ...

Sei $X \subseteq \mathfrak{L}$ eine Formelklasse. Dann ist das Erfüllbarkeitsproblem wie folgt definiert:

Geg.: $\psi \in X$.
Frage: Hat ψ ein Modell?

Definiere dann entsprechend:

$$\mathrm{Sat}(X) := \{\psi \in X \mid \psi \text{ erfüllbar}\}$$

analog für

$$\begin{aligned}
\mathrm{FinSat}(X) &:= \{\psi \in X \mid \psi \text{ hat endliches Modell}\} \\
\mathrm{Val}(X) &:= \{\psi \in X \mid \psi \text{ ist gültig}\} \\
\mathrm{NonSat}(X) &:= X \setminus \mathrm{Sat}(X) \\
\text{Inf-Ax}(X) &:= \mathrm{Sat}(X) \setminus \mathrm{FinSat}(X)
\end{aligned}$$

Dabei heißt eine Formel ψ genau dann *gültig*, wenn $\neg\psi$ kein Modell hat. ψ ist *Unendlichkeitsaxiom*, wenn ψ erfüllbar ist, aber keine endlichen Modelle hat.

Model-Checking-Probleme

Sei $X \subseteq \mathfrak{L}$ eine Formelklasse. Sei $\mathfrak{D}$ ein Bereich von Strukturen/Interpretationen. Dann ist das Model-Checking-Problem für X auf $\mathfrak{D}$ wie folgt definiert:

Geg.: $\psi \in X$, $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}$.
Frage: Gilt $\mathfrak{A} \models \psi$?

Strukturen $\mathfrak{A} \in \mathfrak{D}$ müssen endlich präsentierbar sein, z. B. $\mathfrak{D}$ Bereich von endlichen Strukturen.

1 Das klassische Entscheidungsproblem

Hilbert definiert das klassische Entscheidungsproblem wie folgt:
Man finde einen Algorithmus, der zu jedem $\psi \in \mathrm{FO}$ entscheidet, ob ψ erfüllbar bzw. gültig ist.
In den 20er und 30er Jahren:

- Algorithmen für $\mathrm{Sat}(X)$ und einige Fragmente $X \subseteq \mathrm{FO}$.
- Gewisse Klassen $X \subseteq \mathrm{FO}$ sind Reduktionsklassen, d. h. Sat(FO) ist reduzierbar auf $\mathrm{Sat}(X)$.

Church und Turing zeigten 1936/37, dass Sat(FO) unentscheidbar ist.

Satz 1 *Sei $X \subseteq FO$, X entscheidbar. Dann gilt:*

1) $Sat(X)$ ist co-r.e.[1]

2) $Val(X)$ ist r.e.[2]

3) $FinSat(X)$ ist r.e.

4) $NonSat(X)$ ist r.e.

5) $Inf\text{-}Ax(X)$ ist co-r.e.

Es gilt der Zusammenhang: $\psi \in \mathrm{Sat}(X) \iff \neg\psi \notin \mathrm{Val}(X)$.

Definition 1 (finite model property) X hat *FMP* („finite model property“, endliche Modelleigenschaft), wenn

$$\mathrm{Sat}(X) = \mathrm{FinSat}(X),$$

d. h. jede erfüllbare Formel $\psi \in X$ hat ein endliches Modell.

Mit Definition 1 gilt das folgende Lemma.

Lemma 1 *Sei $X \subseteq FO$ und X habe die FMP. Dann gilt:*

$$\textit{Sat}(X) \textit{ ist entscheidbar,}$$

d. h. Sat(X) ist r.e. und co-r.e.

[1] d. h. $X \setminus \mathrm{Sat}(X)$ ist rekursiv aufzählbar (*engl.* recursively enumerable))

[2] Dieses Resultat liefert der aus der Grundvorlesung „Mathematische Logik“ bekannte *Vollständigkeitssatz*.

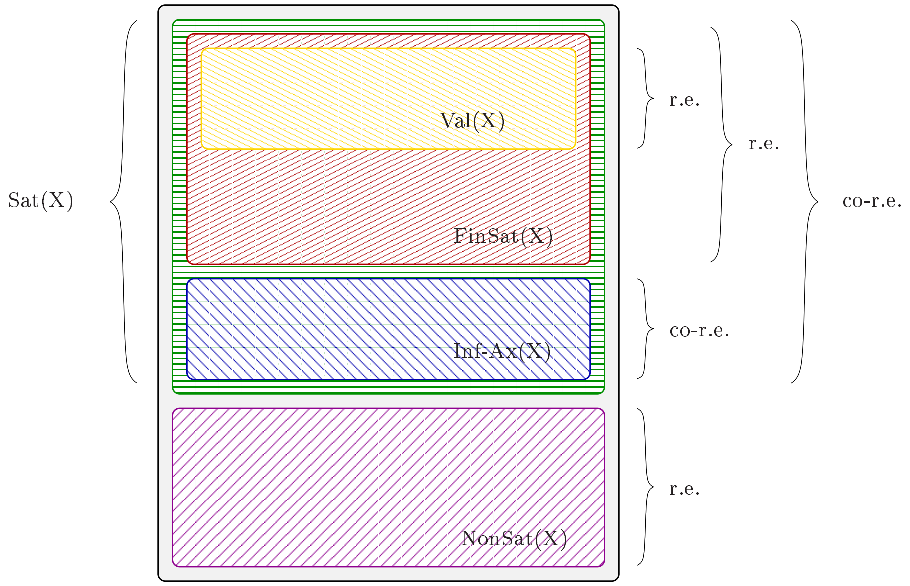


Abbildung 1: Zusammenhang zwischen den Klassen

1.1 Rekursive Untrennbarkeit

Im Folgenden führen wir den Begriff „*Rekursive Untrennbarkeit*" ein.

Definition 2 (rekursiv untrennbar) Seien $A, B \subseteq \Gamma^*$, so dass A und B disjunkt, d. h. $A \cap B = \emptyset$.
Dann heißen A und B *rekursiv untrennbar*, wenn es keine entscheidbare Menge $C \subseteq \Gamma^*$ gibt mit

$$A \subseteq C \text{ und } B \cap C = \emptyset.$$

Daraus folgt unmittelbar, dass sowohl A also auch B unentscheidbar sind.

Definition 3 Seien $A, B \subseteq \Gamma^*$, $X, Y \subseteq \Sigma^*$ und $A \cap B = \emptyset$ sowie $X \cap Y = \emptyset$.
Dann definieren wir:

$$(A, B) \leq (X, Y) \quad :\Longleftrightarrow \quad \text{es gibt eine totale berechenbare Funktion } f : \Gamma^* \to \Sigma^* \text{ mit } f(A) \subseteq X \text{ und } f(B) \subseteq Y.$$

Wir können nun das folgende Lemma angeben.

Lemma 2 *Seien A, B rekursiv untrennbar, und es gilt $(A, B) \leq (X, Y)$. Dann folgt:*

$$X \text{ und } Y \text{ sind rekursiv untrennbar.}$$

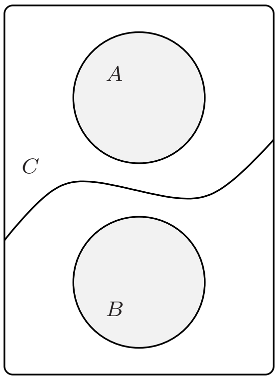


Abbildung 2: Veranschaulichung des Begriffs „*Rekursive Untrennbarkeit*“

Wir definieren die folgenden rekursiv untrennbaren Halteprobleme:

- $H_\lambda^+ := \{\rho(M) \mid M$ Akzeptor, M akzeptiert $\lambda\}$
- $H_\lambda^- := \{\rho(M) \mid M$ Akzeptor, M verwirft $\lambda\}$
- $H_\lambda^\infty := \{\rho(M) \mid M$ Akz., Berechg. v. M auf λ ist unendl. u. nicht periodisch$\}$

Um zu zeigen, dass es sich bei den gerade definierten Problem tatsächlich um rekursiv untrennbare Probleme handelt, beweisen wir den folgenden Satz.

Satz 2 H_λ^+, H_λ^- *und* H_λ^∞ *sind paarweise rekursiv untrennbar.*

Beweis Reduktion $M \longmapsto M'$ Turing-Akzeptor mit

$f_M(x) = 1$	$\Longrightarrow$	M' akzeptiert x
$f_M(x) = 0$	$\Longrightarrow$	M' verwirft x
andernfalls	$\Longrightarrow$	Berechnung von M auf λ unendlich und nicht periodisch

Bemerkung: $\rho(M) \longmapsto \rho(M')$ ist effektiv.

Nehmen wir an, C trenne zwei Mengen aus $H_\lambda^+, H_\lambda^-, H_\lambda^\infty$. Definiere

$$S_C := \{f_M : \rho(M') \in C\}$$

als nicht-triviale Klasse von turing-berechenbaren Funktionen.

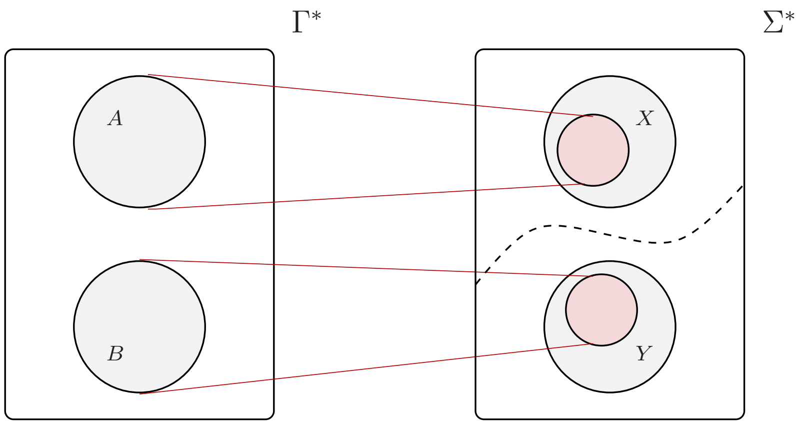


Abbildung 3: Veranschaulichung zu Lemma 2

Wenn C entscheidbar ist, dann ist auch

$$\text{code}(S_C) = \{\rho(M) \mid \rho(M') \in C\}$$

entscheidbar.
Dies ist aber offensichtlich ein Widerspruch zum Satz von Rice.

Satz 3 (Trakhtenbrot, 1950) *Es gibt eine endliche Signatur τ, so dass FinSat(FO(τ)), NonSat(FO(τ)) und Inf-Ax(FO(τ)) paarweise rekursiv untrennbar sind.*
Insbesondere sind also FinSat(FO(τ)), Sat(FO(τ)) und Val(FO(τ)) unentscheidbar.

Beweis Wir führen eine effektive Reduktion $\rho(M) \longmapsto \psi_M \in \mathrm{FO}(\tau)$ durch mit:

(a) M akzeptiert $\lambda \implies \psi_M$ hat ein endliches Modell.

(b) M verwirft $\lambda \implies \psi_M$ ist unerfüllbar.

(c) Berechnung von M auf λ ist unendlich und nicht periodisch
$\implies \psi_M$ ist Unendlichkeitsaxiom.

Sei M TM-Akzeptor mit Zustamdsmenge $Q = \{q_0, \ldots, q_r\}$, Anfangszustand q_0, Alphabet $\Sigma = \{a_0, \ldots, a_s\}$ mit $a_0 = \sqcup$ (Blank-Symbol), Endzustandsmenge $F = F^+ \cup F^-$, Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q \times \Sigma \times \{-1, 0, 1\}$.

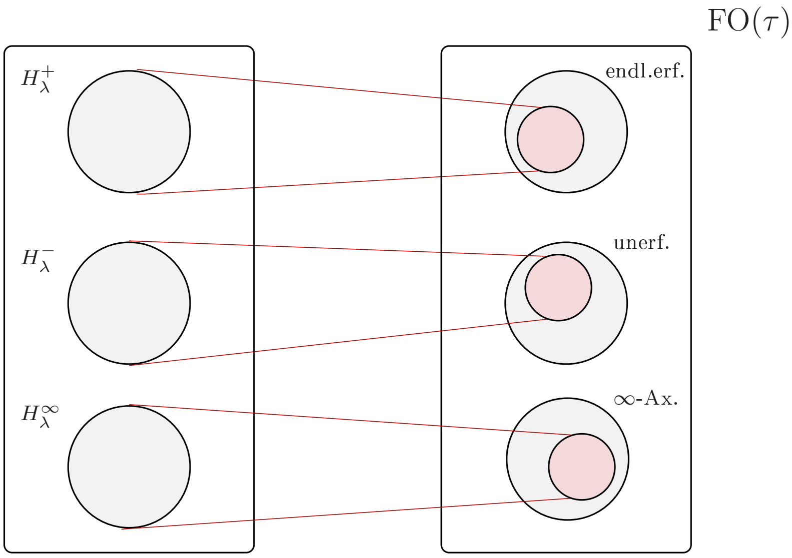


Abbildung 4: Veranschaulichung der Reduktion aus dem Beweis zu Satz 3

Sei

$$\tau = \{0, f, q, p, w\},$$

wobei f, q und p einstellige Funktionen darstellen und w eine zweistellige Funktion bezeichnet. Darüber hinaus sei $\underline{k} := \underbrace{ff\dots f}_{k\text{-mal}}0 \in T(\tau)$.

Intendiertes Modell $\mathfrak{A}_M$ von ψ_M:
Universum $A = \{0, 1, \dots, n\}$ oder $A = \mathbb{N}$ (A bezeichnet Zeitpunkte).

$$f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{wenn } t+1 \in A \\ t & \text{sonst} \end{cases}$$

$$q(t) = i \iff M \text{ befindet sich zur Zeit } t \text{ im Zustand } q_i$$

$$w(s,t) = i \iff \text{zu Zeit } t \text{ ist auf Feld } s \text{ das Symbol } a_i$$

$$p(t) : \text{Kopfposition zur Zeit t}$$

Definiere dann die Formel ψ_M wie folgt:

$$\psi_M := \text{START} \wedge \text{COMPUTE} \wedge \text{END},$$

wobei die Konjunkte im Einzelnen wie folgt definiert sind:

$$\text{START} \;:=\; q_0 = 0 \wedge p_0 = 0 \wedge \forall x (w(x,0) = 0)$$

[zu Zeit 0 ist M in der Anfangskonfiguration auf Input λ.]

$$\text{COMPUTE} \;:=\; \varphi \wedge \bigwedge_{(q_i,a_j) \stackrel{\delta}{\mapsto} (q_k,a_l,m)} \forall y (\alpha_{ij} \rightarrow \beta_{k,l,m}$$

$$\varphi \;:=\; \forall x \forall y \, (py \neq x \rightarrow w(x, fy) = w(x,y))$$

[Bandinschrift auf nicht bearbeiteten Feldern bleibt unverändert.]

$$\alpha_{ij} \;:=\; qy = \underline{i} \wedge w(py, y) = \underline{j}$$

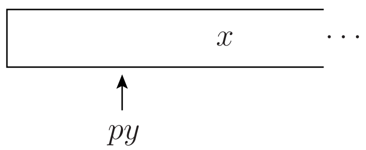
[Zur Zeit y ist M in Zustand q_i und liest Symbol a_j.]

$$\beta_{k,l,m} \;:=\; q(fy) = \underline{k} \wedge w(py, fy) = \underline{l} \wedge \text{MOVE}_m$$

$$\text{MOVE}_m \;:=\; \begin{cases} pfy = py & \text{wenn } m = 0 \\ pfy = fpy & \text{wenn } m = 1 \\ \exists z (fz = py \wedge pfy = z) & \text{wenn } m = -1 \end{cases}$$

$$\text{END} \;:=\; \bigwedge_{\substack{(q_i,a_j) \\ \text{mit } \delta(q_i,a_j) \text{ undef.} \\ \text{und } q_i \notin F^+}} \forall y \neg \alpha_{ij}$$

[Die Berechnung kann nur durch eine akzept. Konfiguration beendet werden.]



Dann gilt:

- ψ_M ist auf $\rho(M)$ effektiv konstruierbar.
- Wenn M das leere Wort akzeptiert, dann ist das intendierte Modell $\mathfrak{A}_M$ endlich, und es gilt $\mathfrak{A}_M \models \psi_M$.
- Wenn M auf λ unendlich lange rechnet, dann ist $\mathfrak{A}_M$ unendlich und $\mathfrak{A}_M \models \psi_M$.

Sei $\mathfrak{B} = (B, 0, f, q, p, w) \models \psi_M$.

Definition 4 $\mathfrak{B}$ *erzwingt* die Konfiguration (q_i, j, w) zur Zeit t (wobei $w = a_{i_0} \dots a_{i_m}$), wenn

a) $\mathfrak{B} \models q\underline{t} = \underline{i}$

b) $\mathfrak{B} \models p\underline{t} = \underline{j}$

c) für alle $k \leq m$ gilt: $\mathfrak{B} \models w(\underline{k}, \underline{t}) = \underline{i_k}$ und
für alle $k > m$ gilt: $\mathfrak{B} \models w(\underline{k}, \underline{t}) = 0$

Da $\mathfrak{B} \models \psi_M$, gilt:

- $\mathfrak{B}$ erzwingt $C_0 = (q_0, 0, \lambda)$ zur Zeit 0, da $\mathfrak{B} \models$ START.
- Wenn $\mathfrak{B}$ zur Zeit t die Konfiguration C_t erzwingt, welche nicht eine akzeptierende Konfiguration ist, dann existiert eine Konfiguration $C_{t+1} = \text{Next}(C_t)$ und $\mathfrak{B}$ erzwingt C_{t+1} zum Zeitpunkt $t + 1$.

Insbesondere kann M keine verwerfende Konfiguration erreichen. Wenn M λ verwirft, dann ist ψ_M unerfüllbar. Wenn M unendlich viele *verschiedene* Konfigurationen durchläuft, dann ist jedes $\mathfrak{B} \models \psi_M$ unendlich.

2 Das Entscheidungsproblem als Klassifikationsproblem

Wir wissen bereits, dass Sat(FO) unentscheidbar ist. Wir sind deshalb an der Beantwortung der Frage interessiert, für welche Fragmente $X \subseteq \mathrm{FO}$ Sat(X) entscheidbar ist. Analog für FinSat(X) etc.
Die Problematik dabei ist, dass es überabzählbar viele $X \subseteq \mathrm{FO}$ gibt. Für welche X soll diese Fragestellung also betrachtet werden?
Es existieren bereits eine Reihe klassischer Entscheidbarkeitsresultate aus den 20er/30er Jahren. So ist die Erfüllbarkeit beispielsweise entscheidbar für

- relationale monadische Formeln[3] [Löwenheim 1915]
- relationale Formeln der Form $\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m \varphi$ ($m, n \in \mathbb{N}$, φ quantorenfrei)[4] [Bernays-Schönfinkel 1928]
- relationale Formeln der Form $\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y \exists z_1 \ldots \exists z_m \varphi$ [Ackermann 1928]
- relationale Formeln der Form $\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y_1 \forall y_2 \exists z_1 \ldots \exists z_m \varphi$ (ohne $=$) [Gödel 1932]

Die angesprochenen Formelarten werden als klassische lösbare Fälle des Entscheidungsproblem betrachtet. Die jeweiligen Beweise können via FMP geführt werden.
Wir betrachten im Folgenden sogenannte **Präfix-Signatur-Klassen**

$$[\underbrace{\Pi}_{\text{Wort über } \{\exists,\forall,\exists^*,\forall^*\}}, (p_1, p_2, \ldots), (f_1, f_2, \ldots)]_{(=)}$$

Definition 5 Gegeben sei ein Dominosystem $\mathfrak{D} = (D, H, V)$, wobei D eine endliche Menge und $H, V \subseteq D \times D$ seien.
Darüber hinaus benötigen wir ein „Spielfeld“ S, z.B. $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oder $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ etc.

[3] Bei relationalen monadischen Formeln besteht die Signatur ausschließlich aus einstelligen Relationen.
[4] Wir schreiben diese Art von Formeln kurz als $[\exists^*\forall^*]$

Ziel ist die *Parkettierung* von S mit $\mathfrak{D}$, die wir als Funktion $p : S \to D$ darstellen werden, und zwar so, dass für alle $(x, y) \in S$:

$$\begin{aligned} &\langle p(x,y), p(x+1,y)\rangle \in H \quad \text{und} \\ &\langle p(x,y), p(x,y+1)\rangle \in V \end{aligned}$$

gilt.

Für beliebige Dominosysteme $\mathfrak{D}$ gilt dann der folgende Satz.

Satz 4 *Sei $\mathfrak{D}$ ein beliebiges Dominosystem. Dann gilt:*

$$\mathfrak{D} \text{ parkettiert } \mathbb{N} \times \mathbb{N} \iff \mathfrak{D} \text{ parkettiert } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

Beweis Die Gültigkeit der „Hin-Richtung“ $\Leftarrow$ ist unmittelbar ersichtlich.
Für die „Rück-Richtung“ $\Rightarrow$ konstruieren wir einen endlich verzweigten Baum mit beliebig langen endlichen Pfaden. Nach dem *Lemma von König* existiert dann auch ein unendlicher Pfad.
Sei $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to D$ eine Parkettierung. Dann gibt es (mindestens) ein $d \in D$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ $i, j > n$ existieren mit $p(i, j) = d$. Fixiere d.
Definiere den Raum

$$S_k := \{-k, -k+1, \dots, 0, \dots, k\}^2.$$

Definition des Baums:

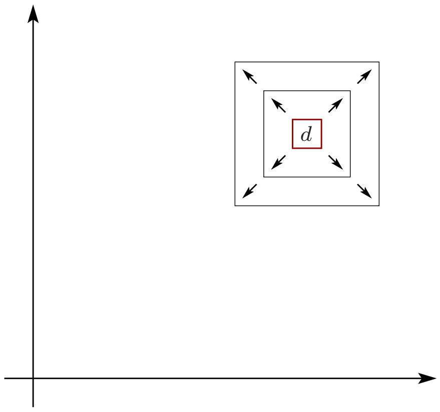
(i) Die *Knoten des Baumes* bestehen aus korrekten Parkettierungen $p_k : S_k \to D$ mit $p_k(0, 0) = d$.

(ii) Die *Wurzel* des Baums enthält die eindeutige Parkettierung $p_0 : S_0 \to D$ mit $p_0(0, 0) = d$.

(iii) Die *Kinder* von p_k sind alle Erweiterungen $p_{k+1} > p_k$, also Parkettierungen von S_{k+1}.

Der so definierte Baum besitzt dann die folgenden Eigenschaften:

- Er ist endlich verzweigt.
- Er besitzt beliebig lange Pfade, denn nach Voraussetzung existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein (i, j) mit $i, j > n$, $p(i, j) = d$. Also definiert p eine korrekte Parkettierung eines S_n, und dann existiert ein Weg der Länge n im Baum.



Nach dem Lemma von König existiert dann auch ein unendlicher Weg $p_0, p_1, p_2, \ldots$ im Baum, welcher eine Parkettierung p_∞ von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert.

Geg.: $(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Wähle $k := \max\{n, m\}$.

Setze

$$p_\infty(n, m) := p_k(n, m).$$

Eine wichtige Variante von Dominoproblemen ist das im folgenden definierte **Eckdominoproblem**:

Geg.: $\mathfrak{D}$ Dominosystem, $d_0 \in D$.

Frage: Existiert eine Parkettierung $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to D$ mit $p(0, 0) = d_0$?

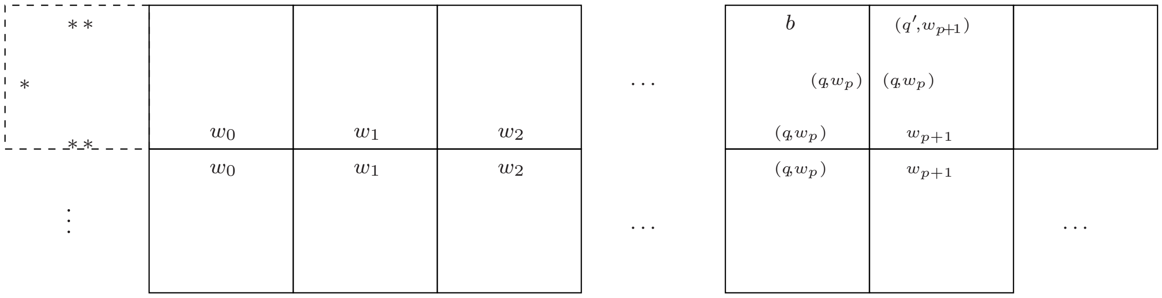
Satz 5 *Die Menge aller Dominosysteme, welche eine periodische Parkettierung erlauben und die Menge der Dominosysteme, welche gar keine Parkettierung erlauben, sind rekursiv untrennbar. Analoges gilt für Eckdominoprobleme.*

Beweis Der Beweis für den Spezialfall der Eckdominoprobleme ist relativ einfach (für diesen soll im Folgenden eine Beweisskizze angegeben werden), der Beweis für den allgemeineren Fall ist jedoch schwierig.
Idee: Totale berechenbare Funktion $f : \rho(M) \mapsto (\mathfrak{D}_M, d_0)$ mit:

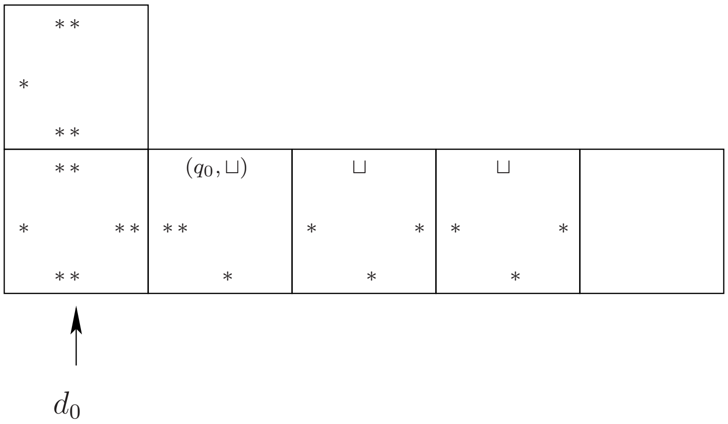
$$\begin{aligned} M \text{ akzeptiert } \lambda &\implies (\mathfrak{D}_M, d_0) \text{ erlaubt periodische Parkettierung.} \\ M \text{ verwirft } \lambda &\implies (\mathfrak{D}_M, d_0) \text{ erlaubt keine Parkettierung.} \\ \rho(M) \in H_\lambda^\infty &\implies (\mathfrak{D}_M, d_0) \text{ erlaubt eine Parkettierung, jedoch keine periodische.} \end{aligned}$$

Berechnung von M auf λ

Parkettierung von $(\mathfrak{D}_M, d_0)$:

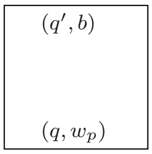


$\mathbf{t}:\quad C_t = (q, p, w_0 w_1 \dots w_m):$
$w_0 \dots w_{p-1}(q, w_p)w_{p+1} \dots w_m \sqcup \dots \sqcup$

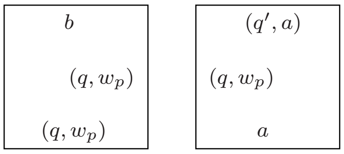


$\mathbf{0}:\quad C_0 = (q_0, 0, \lambda)$

$\delta(q_0, w_p) = (q', b, 0)$ $\quad\rightsquigarrow$



$\delta(q, w_p) = (q', b, 1)$



$\delta(q, w_p) = (q', b, -1)$ $\quad$ analog

Konstruiere $(\mathfrak{D}_M, d_0)$ so, dass:

- die erste Zeile der Parkettierung eindeutig bestimmt ist. Die Färbung der oberen Kante beschreibt die Inputkonfiguration auf λ.
- wenn die obere Kante der j-ten Zeile einer Parkettierung eine Konfiguration C von M beschreibt, und C nicht terminierend ist, die obere Kante der $(j+1)$-ten Zeile schließlich die Konfiguration Next(C) beschreibt.
- wenn die Konfiguration C verwerfend ist, die Parkettierung nicht fortgesetzt werden kann; wenn C akzeptierend ist, kann sie mit der ersten Zeile periodisch fortgesetzt werden.

Anwendung:
Sei $X \subseteq \mathrm{FO}$. X ist konservative Reduktionsklasse, wenn man für jedes Dominosystem $\mathfrak{D}$ einen Satz $\psi_{\mathfrak{D}} \in X$ konstruieren kann mit:

1) $\mathfrak{D}$ erlaubt eine periodische Parkettierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$\Longrightarrow \psi_{\mathfrak{D}} \in \mathrm{FinSat}(X)$

2) $\mathfrak{D}$ erlaubt keine Parkettierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
$\Longrightarrow \psi_{\mathfrak{D}} \in \mathrm{NonSat}(X)$

3) $\mathfrak{D}$ erlaubt eine Parkettierung, aber keine periodische
$\Longrightarrow \psi_{\mathfrak{D}} \in \text{Inf-Ax}(X)$

Beispiel 1 $[\forall\exists\forall, (0, \omega), 0]$, d. h. Formeln $\forall x \exists y \forall z \varphi$ (φ quantorenfrei, enthält nur zweistellige Relationen).

Satz 6 $[\forall\exists\forall, (0,\omega), 0]$ *ist konservative Reduktionsklasse.*

BEWEIS Konservative Reduktion $\mathfrak{D} \longmapsto \psi_{\mathfrak{D}}$, $\mathfrak{D} = (D, H, V)$.
Verwende die Relation P_d ($d \in D$) mit der intendierten Interpretation $P_d := \{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p(i,j) = d\}$.

$$\begin{aligned}\psi_{\mathfrak{D}} &= \forall x \exists y \forall z \bigwedge_{d \neq d'} (P_d xz \to \neg P_{d'} xz) \\ &\qquad \wedge \bigvee_{(d,d') \in H} (P_d xz \wedge P_{d'} yz) \wedge \bigvee_{(d,d') \in V} (P_d zx \wedge P_{d'} zy)\end{aligned}$$

1) $\mathfrak{D}$ parkettiert $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit horizontaler/vertikaler Periode h, v, d. h.

$$p(x+h, y) = p(x, y+v) = p(x, y).$$

Wähle $t := \mathrm{kgV}(h, v)$.

Es existiert die folgende Parkettierung: ${}^{\mathbb{Z}}\!/_{t\mathbb{Z}} \times {}^{\mathbb{Z}}\!/_{t\mathbb{Z}} \to D$

$\mathfrak{A} = \left({}^{\mathbb{Z}}\!/_{t\mathbb{Z}}, (P_d)_{d \in D}\right)$ mit $P_d = \{(i,j) \mid p_t(i,j) = d\}$

Dann gilt:

$$\mathfrak{A} \models \psi_{\mathfrak{D}} : \text{zu } x \text{ wähle } y := x + 1 \pmod t$$

und $\mathfrak{A}$ ist endliches Modell von $\psi_{\mathfrak{D}}$. Analog:
$\mathfrak{D}$ erlaubt (beliebige) Parkettierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \implies \psi_{\mathfrak{D}}$ hat Modell mit Universum $\mathbb{N}$.

Es bleibt zu zeigen, dass $\psi_{\mathfrak{D}}$ ein (endliches) Modell besitzt $\implies \mathfrak{D}$ erlaubt (periodische) Parkettierung von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Wir bilden die Skolem-Normalform von $\psi_{\mathfrak{D}}$:

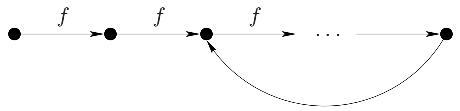
$$\begin{aligned}\psi_{\mathfrak{D}} = \forall x \forall y &\bigwedge_{d \neq d'} (P_d xz \to \neg P_{d'} xz) \\ \wedge &\bigvee_{(d,d') \in H} (P_d xz \wedge P_{d'} fx\, z) \\ \wedge &\bigvee_{(d,d') \in V} (P_d zx \wedge P_{d'} z\, fx)\end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{B} = (B, f, (P_d)_{d \in D}) \models \psi_{\mathfrak{D}}$. Definiere $p : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to D$. Wähle $b \in B$.

$$p(i, j) := d \text{ für das eindeutige } d \text{ mit } \mathfrak{B} \models P_d(f^i b, f^j b)$$

Da $\mathfrak{B} \models \varphi_{\mathfrak{D}}$ ist p korrekte Parkettierung.

Sei $\mathfrak{B}$ endlich, $b \in B$.



Wähle b so, dass

$$f^t b = b \text{ für gegebene } t \in \mathbb{N}$$

(Da $\mathfrak{B}$ endlich ist, existiert ein solches b.)
Mit solchem b ist die konst. Parkettierung periodisch.

Präfix-Signatur-Klassen $[\pi, (p_1, p_2, \ldots), (f_1, f_2, \ldots)]_{(=)}$

- π ist ein Wort über $\{\exists, \forall, \exists^*, \forall^*\}$, definierte Menge von *Präfixen*.
- $p_i \leq \omega$ beschränkt die Anzahl der Relationssymbole der Stelligkeit i.
- $f_i \leq \omega$ beschränkt die Anzahl der Funktionssymbole der Stelligkeit i.

Wir vereinbaren die folgenden abkürzenden Schreibweisen:

- (ω) für $(\omega, 0, 0, \ldots)$
- $(0, 1)$ für $(0, 1, 0, 0, \ldots)$
- *all* für „keine Einschränkung“

Beispiel 2 Entscheidbare Klassen sind u.a.

$$\text{MON : relationale monadische Formeln } : [all, (\omega), (0)]$$

Satz 7 *Sei $\varphi \in FO$ ein Satz der Signatur $\{P_1, \ldots, P_m\}$ (P_i einstellige Relationssymbole). Wenn φ ein Modell hat, dann auch eines mit $\leq qr(\varphi) \cdot 2^m$ Elementen (qr: Quantorenrang).*

$\Longrightarrow$ *FMP von MON*

$\Longrightarrow$ *Sat(MON) = FinSat(MON) ist entscheidbar in NEXPTIME (errate Beschreibung eines Modells* $\mathfrak{A}$ *mit* $\leq qr(\varphi) \cdot 2^m$ *Elementen. Prüfe, ob* $\mathfrak{A} \models \varphi$.*)*

Beweis Wir erinnern uns an die folgenden aus der Vorlesung „Mathematische Logik“ bekannten Zusammenhänge.

$$\mathfrak{A} \equiv_r \mathfrak{B} : \text{ für jeden Satz } \psi \text{ mit } \mathrm{qr}(\psi) \leq r \text{ gilt:} \quad \mathfrak{A} \models \psi \iff \mathfrak{B} \models \psi$$

Der Satz von Ehrenfeucht-Fraissé sagt aus:

$$\mathfrak{A} \equiv_r \mathfrak{B} \iff \text{II gewinnt das E.-F.-Spiel } G_r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B}).$$

Idee:

Konstruiere aus beliebigem $\mathfrak{A} = (A, P_1, \ldots, P_m)$ ein $\mathfrak{B} = (B, P'_1, \ldots, P'_m)$ mit:

$$|B| \leq r \cdot 2^m, \mathfrak{A} \equiv_r \mathfrak{B}$$

Sei $\mathfrak{A} = (A, P_1, \ldots, P_m)$. Mit jedem $a \in A$ assoziieren wir eine Farbe

$$c(a) = c_1, \ldots, c_m \in \{0,1\}^m \text{ mit}$$
$$c_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \in P_i \\ 0 & \text{falls } a \notin P_i \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ A wird in 2^m Farbklassen A_c ($c \in \{0,1\}^m$) unterteilt. Wähle B so, dass für jedes $c \in \{0,1\}^m$ gilt:

- $|A_c| \leq r \implies |B_c| = |A_c|$
  $|A_c| > r \implies |B_c| = r$
- $|B| \leq r \cdot 2^m$
- II gewinnt $G_r(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$

Wenn $\mathfrak{A} \models \varphi$, dann auch $\mathfrak{B} \models \varphi$ für $r = \mathrm{qr}(\varphi)$.

Bemerkung 1 Sat(MON) ist NEXPTIME-vollständig.

Beispiel 3 $[\exists^*\forall^*, all, (0)]_=$ (Bernays-Schönfinkel)

Satz 8 *Wenn $\exists x_1 \dots \exists x_m \forall y_1 \dots \forall y_n \varphi$ (φ relational, φ quantorenfrei) ein Modell hat, dann auch eines mit $\leq m$ Elementen.*

Beweis Sei $\mathfrak{A} \models \exists x_1 \dots \exists x_m \forall y_1 \dots \forall y_n \varphi$, d. h. es gibt $a_1, \dots, a_m \in A$:

$$\mathfrak{A} \models \underbrace{\forall y_1 \dots \forall y_n \varphi(a_1, \dots, a_m, \bar{y})}_{=:\chi}$$

τ bezeichne die Signatur von $\mathfrak{A}$ bzw. φ und $\tau \cup \{a_1, \dots, a_m\}$ die Signatur von $\mathfrak{A}, a_1, \dots, a_m$ bzw. von χ.
Wir erinnern uns, dass universelle Formeln abgeschlossen sind unter Substrukturen, d. h.:

$$\mathfrak{B} \models \chi, \mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{B} \implies \mathfrak{C} \models \chi.$$

Sei $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}, a_1, \dots, a_m$ und $\mathfrak{C} = \mathfrak{B} \restriction \{a_1, \dots, a_m\}$ die von $\{a_1, \dots, a_m\}$ induzierte Substruktur. Dann gilt offensichtlich:

$$|\mathfrak{C}| \leq m$$

und daraus folgt:

$$\mathfrak{C} \models \exists x_1 \dots \exists x_m \forall y_1 \dots \forall y_n \varphi.$$

Folgerung 1 $[\exists^*\forall^*, all, (0)]_=$ *hat die endliche Modelleigenschaft (FMP).*

- *Sat*($[\exists^*\forall^*, all, (0)]_=$) *ist NEXPTIME-vollständig.*
- *es folgt* nicht, *dass Val*($[\exists^*\forall^*, all, (0)]_=$) *entscheidbar ist.*

  Es folgt wohl, dass Val($[\forall^*\exists^*, all, (0)]_=$) *entscheidbar ist.*

  $$\varphi \rightsquigarrow \neg\varphi \text{ „dualisiert" Quantorenpräfix.}$$

- *Für die meisten anderen Klassen mit FMP ist der Beweis aufwändiger.*

Wie zeigt man, dass ein Fragment von FO zu den unentscheidbaren Fällen gehört?
Zur Beantwortung der Frage können die drei in den folgenden Unterabschnitten vorgestellten Methoden dienen.

Methode 1: Reduktionen

Definition 6 Eine *konservative Reduktionsklasse* in FO ist ein Fragment $X \subseteq \mathrm{FO}$, so dass eine total berechenbare Funktion

$$f : \mathrm{FO} \to X$$

existiert, so dass für alle $\psi \in \mathrm{FO}$ gilt:

- ψ hat ein endliches Modell $\iff$ $f(\psi)$ hat ein endliches Modell.
- ψ ist unerfüllbar $\iff$ $f(\psi)$ ist unerfüllbar.

Lemma 3 *Sei X konservative Reduktionsklasse. Dann sind FinSat(X), NonSat(X) und Inf-Ax(X) paarweise rekursiv untrennbar.*

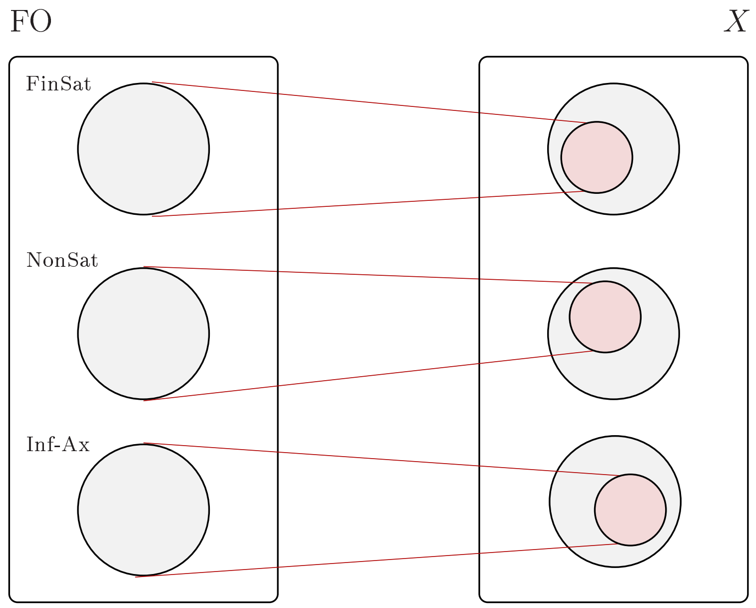


Abbildung 5: Veranschaulichung zu Lemma 3

Beispiel 4 $[\forall^*, all, all]$ ist konservative Reduktionsklasse, denn zu gegebenem $\psi \in \mathrm{FO}$ kann man effektiv die Skolem-Normalform $\psi^* \in [\forall^*, all, all]_=$ konstruieren. Es gilt für jede Menge A:

$$\psi \text{ hat Modell mit Universum } A \iff \psi^* \text{ hat Modell mit Universum } A$$

Methode 2: Variante des Satzes von Trakhtenbrot

Der Beweis in Kapitel 1 liefert Formeln

$$\psi_M \in [\exists\forall^*\exists^*, (0), (3,1)]_=$$

Modifikation dieses Beweises liefert andere konservative Reduktionsklassen, z. B.

$$[all, (0, \omega), 0].$$

Methode 3: Dominoprobleme

Unter einem Dominostein verstehen wir ein orientiertes Einheitsquadrat mit gefärbten Kanten. Ein Dominosystem ist ein Tripel $\mathfrak{D} = (D, H, V)$ mit:

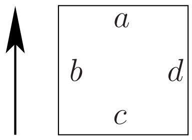


Abbildung 6: Modell eines Dominosteins

- D ist eine endliche Menge von Dominosteinen
- $H, V \subseteq D \times D$

Der Intuition folgendend definieren wir:

$$H = \{(d, d') \in D \times D \mid \text{rechte Farbe von } d = \text{linke Farbe von } d'\}$$
$$V = \{(d, d') \in D \times D \mid \text{obere Farbe von } d = \text{untere Farbe von } d'\}$$

Die zu parkettierende Fläche bezeichnen wir mit S, beispielsweise $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $S = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ oder $S = \{0, \ldots, n-1\} \times \{0, \ldots, m-1\}$.
Unter einer Parkettierung von S mit $\mathfrak{D} = (D, H, V)$ verstehen wir dann eine Abbildung

$$p : S \to D,$$

so dass für alle $(i, j) \in S$

- $\langle p(i,j), p(i+1,j)\rangle \in H$, und

- $\langle p(i,j), p(i,j+1)\rangle \in V$.

Definition 7 Eine Parkettierung p von S ist *periodisch*, wenn $h, v \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ existieren, so dass für alle $(x, y) \in S$

$$p(x+h, y) = p(x, y+v) = p(x, y).$$

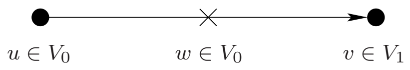
Dominoproblem für S : $\quad (S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$

Geg.: Dominosystem $\mathfrak{D} = (D, H, V)$
Frage: Gibt es eine Parkettierung von S mit $\mathfrak{D}$?
oder: Gibt es eine periodische Parkettierung von S mit $\mathfrak{D}$?

3 Model-Checking-Spiele

Notationsvereinbarung:

$$vE := \{w \in V \mid (v,w) \in E\}$$



$$\begin{array}{cc} vE \cap W_\sigma^n \neq \emptyset & vE \subseteq W_\sigma^n \\ \exists w\,((v,e) \in E \wedge w \in W_\sigma^n) & \forall w\,((v,w) \in E \rightarrow w \in W_\sigma^n) \end{array}$$

Wir präsentieren im Folgenden einen Linearzeit-Algorithmus für endliche Spiele.

Linearzeit-Algorithmus für endliche Spiele

- $win[v] = \sigma \quad (\sigma \in \{0,1\})$, wenn festgestellt wurde, dass $v \in W_\sigma$
  $win[v] = \perp$, wenn dies noch nicht ausgerechnet wurde, oder wenn $w \notin W_0 \cup W_1$
- $P[v] = Ev \quad$ (Vorgänger von v)
- $n[v] = |\{w \in vE \mid win[w] = \perp\}|$

Der *Kern des Algorithmus* besteht aus der Prozedur *propagate(v,σ)*. Diese Prozedur wird aufgerufen, wenn festgestellt wurde, dass $v \in W_\sigma$. Propagate(v,σ) speichert dies ab und untersucht, ob wir Gewinner für Vorgänger von v bestimmen können.

- $(u,v) \in E, u \in V_\sigma \implies u \in W_\sigma$ (ziehe zu v)
- $(u,v) \in E, u \in V_{1-\sigma}, win[u] = \perp$ und $n[u] = 0$.

  Dies bedeutet, dass $win[w] = \sigma$ für alle $w \in uE$ (sonst hätte der Algorithmus nach der Feststellung, dass $win[w] = 1 - \sigma$ auch festgestellt, dass $win[u] = 1 - \sigma$.)

  Also ist $win[u] = \sigma$.

Wir zeigen die *Korrektheit* des Algorithmus. Es gilt $W_\sigma := \bigcup_n W_\sigma^n$.

- $v \in W_\sigma^n$
  $v \in V_{1-\sigma}, n[v] = 0 \implies$ Algorithmus stellt fest (Schritt 2), dass $win[v] = \sigma$.
- $v \in W_\sigma^n \quad (n > 0)$
  (a) $v \in V_\sigma$ und $\exists w\,((v,w) \in E \wedge w \in W_\sigma^{n-1})$. Nach Induktionsvoraussetzung stellt der Algorithmus fest, dass $win[v] = \sigma$. Dabei ruft er Propagate[v,σ] auf, denn $v \in P[w], v \in V_\sigma$.
  Also berechnet er $win[v] = \sigma$.
  (b) $v \in V_{1-\sigma}$ und $\forall w\,((v,w) \in E \rightarrow w \in W_\sigma^{n-1})$.
  Sei w_0 der letzte Nachfolger der $w \in vE$, für den der Algorithmus festgestellt hat, dass $win[w] = \sigma$. Danach ist $n[v] = 0$. Daher wird Propagate[v,σ] aufgerufen.

Nun werfen wir einen Blick auf die *Komplexität* des Algorithmus.
Für jedes $v \in V$ wird Propagate[v,σ] höchstens ein Mal durchlaufen.
Die Schleife „$\forall u \in P[v]$“ wird daher

$$\leq \sum_v |P[v]| = |E| \text{ Mal}$$

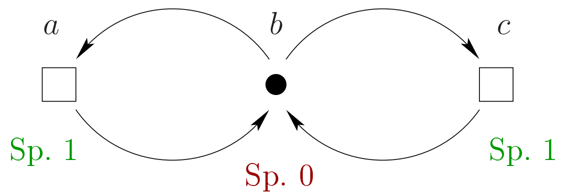
durchlaufen.
$\implies$ Laufzeit: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$.

4 Unendliche Spiele

Sei $\mathcal{G} = (V, E, Win)$ ein Spiel, $V = V_0 \cup V_1$.
Dann definiert $Win \subseteq V^\omega$ eine Gewinnbedingung für unendliche Partien.
Eine Partie ist eine endliche oder unendliche Folge $\pi = v_0 v_1 v_2 \ldots \in V^{\leq\omega}$ mit $(v_i, v_{i+1}) \in E$.
Bei *endlichen Partien* verliert der Spieler, der nicht mehr ziehen kann, während für *unendliche Partien* gilt: Spieler 0 gewinnt $\pi \iff \pi \in Win$, anderenfalls gewinnt Spieler 1 (es gibt also kein Unentschieden!).

Strategie

Betrachten wir nun *Strategien* für endliche Spiele. Ein Beispiel für eine nicht-positionale Strategie ist das folgende Spiel mit der Gewinnbedingung „a, b, c müssen jeweils unendlich oft vorkommen“. Eine Strategie für Spieler σ ist



dann

$$f : V^*V_\sigma \to V \text{ mit } (v, f(x, v)) \in E,$$

wobei V^*V_σ das Anfangsstück einer Partie bezeichnet, welche an einer Position in V_σ endet. An dieser Stelle ist Spieler σ am Zug.
f heißt *Gewinnstrategie* für Spieler σ von v aus, wenn jede in v beginnende Partie, welche konsistent ist mir f, von Spieler σ gewonnen wird.
Wir definieren dann

$$W_\sigma := \{v \mid \text{Spieler } \sigma \text{ hat Gewinnstrategie von } v \text{ aus}\}$$

Offensichtlich gilt:

$$W_0 \cap W_1 = \emptyset$$

Definition 8 $\mathcal{G} = (V, E, Win)$ ist *determiniert*, wenn $V = W_0 \cup W_1$, d. h. von jeder Position aus hat einer der Spieler eine Gewinnstrategie.

Satz 9 (Zermelo) *Sei $\mathcal{G}$ ein Spiel, in dem jede Partie endlich ist. Dann ist $\mathcal{G}$ determiniert.*

Beweis Sei $X := V \setminus (W_0 \cup W_1)$. Dann müssen wir zeigen, dass $X = \emptyset$ ist. Wir formulieren die folgende

Beh.: $v \in X \implies vE \cap X \neq \emptyset$. Daraus folgt, dass $\mathcal{G}$ eine unendliche Partie zulässt, bleibe immer in X.

Sei also $v \in X$, $v \in V_\sigma$.

(a) $vE \cap W_\sigma = \emptyset$ (sonst wäre $v \in W_\sigma$)

(b) $vE \not\subseteq W_{1-\sigma}$ (sonst wäre $v \in W_{1-\sigma}$)

Also existiert ein $w \in vE$, $w \notin W_0 \cup W_1$, also $vE \cap X \neq \emptyset$.

Bemerkung 2 (Spiele mit Unentschieden) Es reicht anzunehmen, dass alle *Gewinnpartien* endlich sind.

Satz 10 *Sei $\mathcal{G}$ ein Spiel, so dass Spieler σ eine Partie gewinnt genau dann, wenn eine Position $v \in V_{1-\sigma}$ erreicht wurde mit $vE = \emptyset$. Dann ist das Spiel determiniert im folgenden Sinn:*
von jeder Position hat entweder einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie oder bei haben eine Strategie, um ein Unentschieden zu erreichen.
(Sei $X = V \setminus (W_0 \cup W_1)$. Von $v \in X \cap V_\sigma$ kann Spieler σ in X bleiben.)

4.1 Gale-Stewart-Spiele

Der Gale-Stewart-Spielen zugrundeliegende Spielgraph $G = (V, E)$ ist der unendliche binäre Baum.

$$\mathfrak{T}^2 = (\{0,1\}^*, E), E = \{(x, x_i) \mid x \in \{0,1\}^*, i \in \{0,1\}\}$$
$$\mathfrak{T}^\omega = (\omega^*, E), E = \{(x, x_i) \mid x \in \omega^*, i \in \omega\}$$

Die Spieler ziehen abwechselnd, d. h.

$$V_0 = \{x \mid |x| \text{ gerade}\}$$
$$V_1 = \{x \mid |x| \text{ ungerade}\}$$

Satz 11 (Gale-Stewart) *Es gibt nicht-determinierte Spiele.*

Beweis Sei $B = \{0, 1\}$ oder $B = \omega$. Sei

$$T_0 = \{x \in B^* \mid |x| \text{ gerade}\}$$
$$T_1 = \{x \in B^* \mid |x| \text{ ungerade}\}$$

Sei desweiteren

$$F = \{f : T_0 \to B\} \quad \text{Strategien für Spieler 0}$$
$$G = \{g : T_1 \to B\} \quad \text{Strategien für Spieler 1}$$

Es gilt dann:

$$|F| = |G| = |\mathcal{P}(\omega)| = 2^\omega$$

Dann ist:

$$F = \{f_\alpha \mid \alpha < 2^\omega\}$$
$$G = \{g_\alpha \mid \alpha < 2^\omega\}$$

Idee: $X_\alpha, Y_\alpha \rightsquigarrow Y = \bigcup_{\alpha<2^\omega} Y_\alpha$.
Kein f_α oder g_α ist Gewinnstrategie für das Spiel mit Gewinnbedingung Y.

Exkurs: Ordinalzahlen und Wohlordnungen

Eine *Wohlordnung* (WO) ist eine lineare Ordnung $(A, <)$, welche dem Prinzip vom kleinsten Element genügt:

Jede nichtleere Teilmenge von A enthält ein kleinstes Element.

Es folgt, dass in A keine unendlichen absteigenden Ketten $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ existieren (ansonsten hätte $\{a_n \mid n \in \omega\}$ kein kleinstes Element). Umgekehrt kann man in einer Menge S ohne kleinstes Element mit Auswahlaxiom eine unendliche absteigende Kette auswählen:

1) Wähle $a_1 \in S$.

2) Dann enthält $S_1 := \{b \in S \mid b < a_1\}$ auch kein kleinstes Element. Wähle $a_2 \in S_1$.

3) ...

Ordinalzahlen (Ordinale) geben uns die Möglichkeit, Mengen beliebiger Größe „aufzuzählen" und damit Induktionsbeweise zu führen (transfinite Induktion).
Abstrakt definiert man Ordinale als transitive Mengen, die durch $\in$ linear geordnet sind.

- transitiv: wenn $y \in x$, dann $y \subseteq x$ (d. h. wenn $z \in y \in x$, dann $z \in x$)

Anschaulicher:

- 0 ist ein Ordinal.
- für jede Menge S von Ordinalen gibt es ein kleinstes Ordinal (bzgl. $<$), welches größer ist als alle Ordinale in S.

Zwei Fälle:

a) S enthält größtes Ordinal α. Dann ist das nächstgrößere Ordinal der *Nachfolger* $\alpha + 1$ von α.

b) Andernfalls ist das nächstgrößere Ordinal Limes-Ordinal.

In mengentheoretischer Darstellung:

- $0 \quad \widehat{=} \quad \emptyset$
- $\alpha + 1 \quad \widehat{=} \quad \alpha \cup \{\alpha\}$

Das Limes-Ordinal über S ist $\bigcup S$.

- $0 \quad \widehat{=} \quad \emptyset$
- $1 \quad \widehat{=} \quad \{\emptyset\}$
- $2 \quad \widehat{=} \quad \{\{\emptyset\}, \emptyset\}$

$\quad \vdots \qquad \vdots$

Für Ordinale gilt:

1) Jedes Ordinal ist die Menge aller kleineren Ordinale.

2) Die lineare Ordnung der Ordinale ist die Elementbeziehung

$$\beta < \alpha \iff \beta \in \alpha$$

3) $(\alpha, <)$ ist eine WO (für jedes Ordinal α)

Die ersten Ordinale lauten:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \ldots, 2\omega, \ldots, \omega \cdot \omega, \omega^2 + 1, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}$$

(ω ist das erste Limes-Ordinal.) Es gilt: $n = \{i \mid i < n\}$
Ordinale sind Standardrepräsentanten von WO:

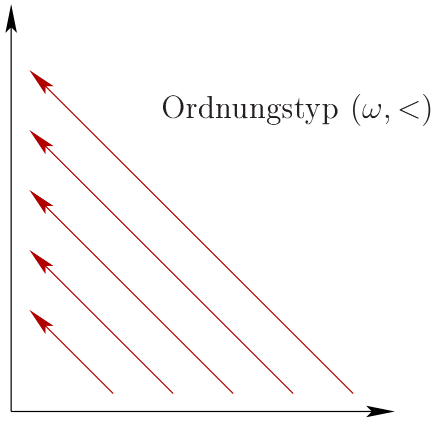
- Für jede WO $(A, <)$ existiert ein Ordinal α, so dass $(A, <) \cong \underbrace{(\alpha, <)}_{(\alpha, \in)}$.

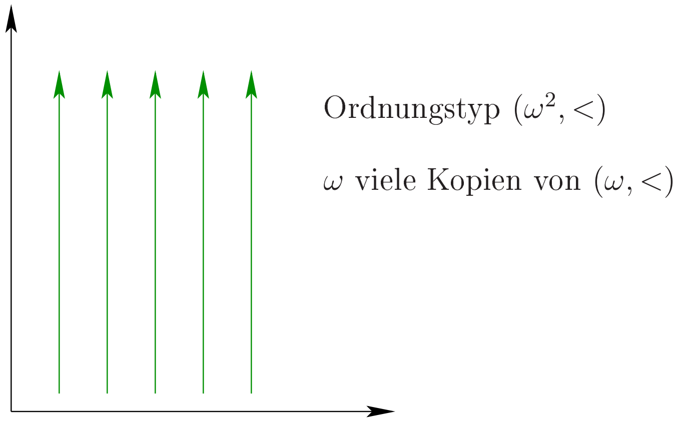
Beispiel 5 ($\boldsymbol{\omega \times \omega}$) Ordnungstypen:

Satz 12 (Zermelos WO-Satz) *Wenn man das Auswahlaxiom annimmt, dann kann man jede Menge A wohlordnen.*
(d. h. zu jedem A existiert $<$, so dass $(A, <)$ WO)

Folgerung 2 *Für jede Menge A existiert Ordinal α, so dass wir A aufzählen können:*

$$A = \{a_\beta \mid \beta < \alpha\}$$





Das kleinste Ordinal, das wir für $\mathcal{P}(\omega)$ (oder für $\mathbb{R}$ oder für die Menge aller Strategien von Spieler 0) nennen wir 2^ω.
Wir werden im Folgenden die Menge der Strategien beider Spieler aufzählen:

$$\begin{aligned} F &= \{f_\alpha \mid \alpha < 2^\omega\} \quad \text{Strategien von Sp. 0} \\ G &= \{g_\alpha \mid \alpha < 2^\omega\} \quad \text{Strategien von Sp. 1} \end{aligned}$$

Auf jeder Stufe $\alpha < 2^\omega$ werden wir mit Mengen X_α, Y_α von *kleinerer* Kardinalität als F und G operieren.
$\rightsquigarrow$ Beweis mit transfiniter Induktion.

- fixiere X_0, Y_0
- ausgehend von X_α, Y_α definieren wir $X_{\alpha+1}$, $Y_{\alpha+1}$ (für alle $\alpha < 2^\omega$)
- für Limes-Ordinale $\alpha < 2^\omega$ setzen wir

$$X_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$$
$$Y_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} Y_\beta$$

Satz 13 *Es gibt nicht-determinierte Spiele.*

Beweis Der folgende Beweis benutzt das Auswahlaxiom (AC). Sei $B = \{0,1\}$ oder $B = \omega$.

$$\begin{aligned} T_0 &= \{x \in B^* \mid |x| \text{ gerade}\} \\ T_1 &= \{x \in B^* \mid |x| \text{ ungerade}\} \\ F &= \{f : T_0 \to B\} \quad \text{Strategien von Spieler 0} \\ G &= \{g : T_1 \to B\} \quad \text{Strategien von Spieler 1} \end{aligned}$$

Ziel: „Konstruktion" einer Gewinnbedingung $Y \subseteq B^\omega$, so dass kein $f \in F$ und kein $g \in G$ Gewinnbedingung ist für das Gale-Stewart-Spiel mit Gewinnbedingung Y.

- Betrachte

$$\begin{aligned} F &= \{f_\alpha \mid \alpha < 2^\omega\} \\ G &= \{g_\alpha \mid \alpha < 2^\omega\} \end{aligned}$$

  Sei $f\hat{\ }g \in B^\omega$ die durch f und g eindeutig bestimmte Partie.
  Konstruiere $X_\alpha, Y_\alpha \subseteq B^\omega$ mit

  - $X_\alpha \cap Y_\alpha = \emptyset$
  - $|X_\alpha|, |Y_\alpha| < 2^\omega$
  - $\forall \beta < \alpha$ existiert ein $f \in F : f\hat{\ }g_\beta \notin X_\alpha$
  - $\forall \beta < \alpha$ existiert ein $g \in G : f_\beta\hat{\ }g \notin Y_\alpha$

- $X_0 = Y_0 = \emptyset$
- für Limes-Ordinale λ sei

$$X_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} X_\beta,\ Y_\lambda = \bigcup \beta < \lambda Y_\beta$$

- zu $f_{\alpha+1}$ existiert ein $g \in G$ mit $f_{\alpha+1}\hat{\ }g \notin X_\alpha \cup Y_\alpha$.
  Wähle solches g und setze

$$X_{\alpha+1} := X_\alpha \cup \{f_{\alpha+1}\hat{\ }g\}$$

  Zu $g_{\alpha+1}$ existiert ein $f \in F$ mit $f\hat{\ }g_{\alpha+1} \notin X_{\alpha+1} \cup Y_\alpha$.
  Wähle solches f und setze

$$Y_{\alpha+1} := Y_\alpha \cup \{f\hat{\ }g_{\alpha+1}\}$$

- Sei nun $Win := Y := \bigcup_{\alpha<2^\omega} Y_\alpha$.

Angenommen, f sei Gewinnstrategie für Spieler 0. Es gibt dann ein α mit $f = f_\alpha$. Es gibt aber ein g mit $f_\alpha\hat{\ }g \in X_\alpha$, also $f_\alpha\hat{\ }g \notin Y$. Die Partie $f_\alpha\hat{\ }g$ wird von Spieler 1 gewonnen. Widerspruch.
Angenommen, g sei Gewinnstrategie für Spieler 1. Es gibt dann ein α mit $g = g_\alpha$. Es existiert aber ein f mit $f\hat{\ }g_\alpha \in Y_\alpha$, d. h. Spieler 0 gewinnt die Partie $f\hat{\ }g_\alpha$. Widerspruch.

Wir führen im Folgenden einen zweiten Beweis via Ultrafiltern. Dazu betrachten wir in einem Exkurs zunächst *Filter und Ultrafilter*.

Exkurs: Filter und Ultrafilter

Sei I eine nichtleere Menge. Eine nichtleere Menge $F \subseteq \mathcal{P}(I)$ heißt *Filter*, wenn gilt

- $\emptyset \in F$
- $x \in F, y \in F \implies x \cap y \in F$
- $x \in F, y \supseteq x \implies y \in F$

Intuition: Die Mengen in F sind in irgendeiner Form „groß“.

Beispiel 6 $\{x \subseteq \omega : \omega \setminus x$ endlich.$\}$ ist ein Filter, genannt *Fréchet-Filter*.

Ein *Ultrafilter* über I ist ein Filter U, der zusätzlich folgende Bedingung erfüllt:

- für alle $x \subseteq I$ gilt: $x \in U \quad$ oder $\quad I \setminus x \in U$

Beispiel 7 Fixiere $n_0 \in \omega$.

$$U = \{a \mid n_0 \in a\}.$$

Der Fréchet-Filter ist kein Ultrafilter, aber:

Satz 14 *Der Fréchet-Filter kann zu einem Ultrafilter erweitert werden. (Dies benutzt das Lemma von Zorn, oder den Kompaktheitssatz, und gilt für jedes Mengensystem F, so dass $a_1 \cap \ldots \cap a_m \neq \emptyset$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in F$.)*

Beweis Sei F Fréchet-Filter, Aussagenvariablen X_a für $a \in \mathcal{P}(\omega)$. Sei $\Phi = \Phi_U \cup \Phi_F$ mit

$$\begin{aligned}\Phi_U :=& \{X_a \wedge X_b \rightarrow X_{a \cap b} \mid a, b \in \omega\}\\ &\cup \{X_a \rightarrow X_b \mid a \in \mathcal{P}, b \supseteq a\}\\ &\cup \{X_a \leftrightarrow \neg X_{\overline{a}} \mid a \in \mathcal{P}, \overline{a} = \omega \setminus a\}\\ \Phi_F :=& \{X_c \mid c \in F\}\end{aligned}$$

Jedes Modell $\mathfrak{I} \models \Phi$ liefert einen Ultrafilter U über F, nämlich

$$U = \{a \mid \mathfrak{I} \models X_a\}.$$

z. z.: Φ erfüllbar.

Sei $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich.

z. z.: Φ_0 erfüllbar.

Setze $F_0 := \{c \in F \mid X_c \in \Phi_0 \cap \Phi_F\}$ endlich.

- $F_0 = \emptyset$. Setze
$$\mathfrak{I}(X_a) = \begin{cases} 1 & 0 \in a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
- sonst $F_0 = \{a_1, \ldots, a_m\}$. Es gibt $n_0 \in a_1 \cap \ldots \cap a_m$. Setze
$$\mathfrak{I}(X_a) = \begin{cases} 1 & n_0 \in a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \mathfrak{I} \models \Phi_0.$$

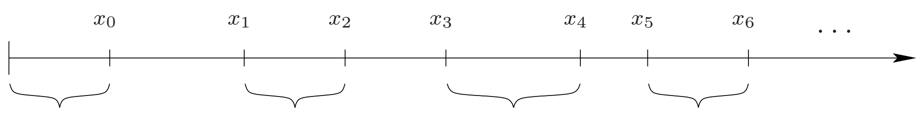
Es gibt Ultrafilter $U \subseteq \mathcal{P}(\omega)$, welcher den Fréchet-Filter erweitert, d. h.

- $\emptyset \notin U$
- $x \in U, y \supseteq x \implies y \in U$
- $x, y \in U \implies x \cap y \in U$
- $x \in U \iff \overline{x} \notin U$
- x co-endlich $\implies x \in U$

Konstruktion eines nicht-deterministischen Spiel in $\mathfrak{T}^\omega$. Anzugeben ist die Gewinnbedingung $Win_U \subseteq \omega^\omega$. Spieler 0 und Spieler 1 wählen abwechselnd natürliche Zahlen $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

- Wenn ein Spieler ein $x_i \leq x_{i+1}$ wählt, dann verliert er.
- Wenn die Spieler immer „aufsteigend" spielen (also $\underbrace{x_0 < x_1 < x_2 < \ldots}_{x}$), dann gewinnt Spieler 0 gdw.

$$\underbrace{[0, x_0] \cup \bigcup_{i \in \omega} (x_{2i+1}, x_{2i+2}]}_{A(x)} \in U$$



Win_U ist also $\{x = x_0x_1x_2\ldots \in \omega^\omega \mid (x$ steigt monoton und $A(x) \in U)$ oder $(\min\{j \mid x_{j+1} < x_j\}$ ist gerade.$)\}$.

Satz 15 *Das Spiel über $\mathfrak{T}^\omega$ mit Gewinnbedingung Win_U ist nicht-determiniert.*

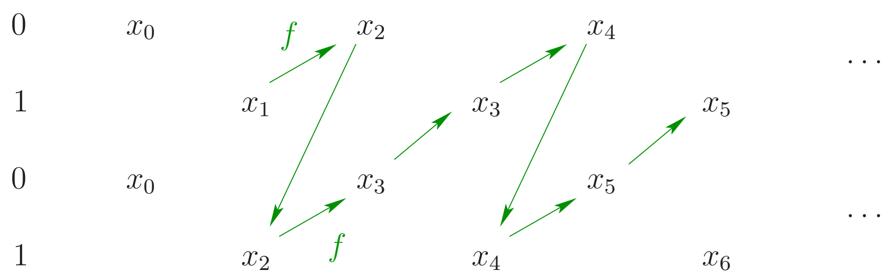
Beweis Annahme, Spieler 0 hat Gewinnstrategie f.
Dann verwendet Spieler 1 folgende Gewinnstrategie:

- auf $x_0 = f(\varepsilon)$ antwortet Spieler 1 mit beliebigem $x_1 < x_0$.
- um Antwort auf x_{2i} $(i > 0)$ zu finden, betrachtet Spieler 1 eine Kopie des Spiels, in der Spieler 0 immer noch mit f spielt, und Spieler 1 jede der Antworten von Spieler 0 hin- und herkopiert. Spieler 1 lässt Spieler 0 gegen sich selbst spielen.

Es entsteht also eine Partie $x = x_0x_1x_2x_3\ldots$ mit

$$x_{2i+1} = f(x_0x_1\ldots x_{2i+1}), \text{ also auch}$$
$$x_{2i+1} = f(x_0 \underset{\uparrow}{\;} x_2 \ldots x_{2i}).$$

In der Kopie entsteht Partie $x' = x_0x_2x_3x_4x_5\ldots$.



Beachte:
Beide Partien x sind x' sind konsistent mit f. x und x' sind streng monoton. Da f Gewinnstrategie von Spieler 0 ist, gilt:

$$A(x) \in U, A(x') \in U.$$

aber

$$A(x) = [0, x_0] \cup \bigcup_{i<\omega} (x_{2i+1}, x_{2i+2}]$$
$$A(x') = [0, x_0] \cup \bigcup_{i<\omega} (x_{2i+2}, x_{2i+3}]$$

$\Longrightarrow$ $A(x) \cap A(x') = [0, x_0] \in U$.
$\Longrightarrow$ $\omega \setminus [0, x_0] \notin U$.
Unmöglich, da $U \supseteq \mathcal{F}$ (alle co-endlichen Mengen sind in U!)

Also: Annahme, dass f Gewinnstrategie von Spieler 0 ist, führt auf Widerspruch. Für Spieler 1 analog.

5 Borel-Spiele

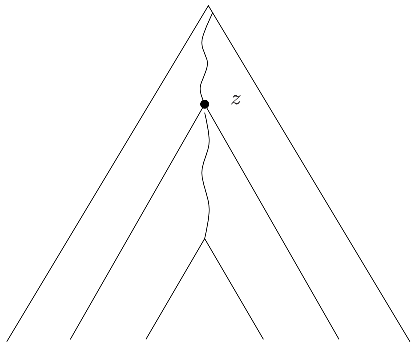
Das Ziel dieses Abschnitts ist es, hinreichende Bedingungen für die Determiniertheit von Spielen via Topologie zu formulieren.
Eine *Topologie* auf einer Menge S ist dadurch definiert, dass man festlegt, welche Teilmengen von S *offen* sind. Es muss gelten:

- $\emptyset$, S offen
- X, Y offen $\Longrightarrow$ $X \cap Y$ offen
- Sei $\{X_i \mid i \in I\}$ eine Familie von offenen Mengen.
  Dann ist $\bigcup_{i \in I} X_i$ offen.

Die aufgeführten Eigenschaften zeigen den Abschluss offener Mengen unter endlicher Durchschnittsbildung und beliebiger Vereinigung.
Man kann eine Topologie durch Angabe einer *Basis* B definieren. Dabei handelt es sich um eine Kollektion von offenen Mengen, so dass jede offene Menge als Vereinigung von Mengen aus B geschrieben werden kann.
Basis der üblichen Topologie auf $\mathbb{R}$:

$$\text{offene Intervalle } (a, b) \subseteq \mathbb{R}$$

Topologie auf B$^\omega$ (nach Cantor)
Für $B = \{0, 1\}$ wird B^ω Cantor-Raum genannt, für $B = \omega$ heißt B^ω Barre-Raum.
Basis: $\mathcal{O}(z) = z \cdot B^\omega$ für $z \in B^*$



$X \subseteq B^\omega$ ist dann offen, wenn $X = W \cdot B^\omega$ für $W \subseteq B^*$ ist.
$X \subseteq B^\omega$ ist *abgeschlossen*, wenn $\overline{X} := B^\omega \setminus X$ offen ist.

Beispiel 8
- $\mathcal{O}(z) = z \cdot B^\omega$ sind offen-abgeschlossen (engl. Bezeichnung: *clopen*).
  $\overline{\mathcal{O}(z)} = W_z \cdot B^\omega$, z. B. mit $W_z = \{y \mid y\} \not\preceq z \wedge z \not\preceq y\}$ ($u \preceq v :\Longleftrightarrow$ u ist Präfix von v).
- $\underbrace{0^*1}_{W}\{0,1\}^\omega$ ist offen, aber nicht abgeschlossen. Das Komplement dieser Menge ist $\{0^\omega\}$; diese ist nicht offen.
- $$\begin{aligned} L_d &= \{x \in \omega^\omega \mid x \text{ enthält unendlich viele } d\} \\ &= \bigcap_{n\in\omega} \underbrace{(\omega^* d)^n \cdot \omega^\omega}_{\text{offen}} \end{aligned}$$ ist abzählbarer Durchschnitt offener Mengen und damit selbst wieder eine offene Menge.

Beschreibung abgeschlossener Mengen:
Ein Baum $T \subseteq B^*$ ist eine unter Präfix abgeschlossene Menge von endlichen Wörtern, d. h. für $z \in T, y \preceq z \implies y \in T$.
Für einen Baum T ist $[T]$ die Menge der unendlichen Pfade durch T.
Beachte:

$$\begin{aligned} T &\subseteq B^* \\ [T] &\subseteq B^\omega \end{aligned}$$

Beispiel 9

$$\begin{aligned} T &= 0^* = \{0^n \mid n \in \omega\} \\ [T] &= \{0^\omega\} \end{aligned}$$

Lemma 4 *$X \subseteq B^\omega$ ist abgeschlossen $\Longleftrightarrow$ es gibt einen Baum $T \subseteq B^*$ mit $X = [T]$.*

Beweis „$\Leftarrow$“ Sei X abgeschlossen, d. h. $\overline{X} = W \cdot B^\omega$ für ein $W \subseteq B^*$. Sei

$$T = \{w \in B^* \mid \forall z(z \preceq w \implies z \in W\}$$

- T abgeschlossen unter Präfix
- $[T] = X$

„$\Rightarrow$“ Sei $X = [T]$. Für jedes $x \notin [T]$ existiert ein kleinstes Präfix $w_x \preceq x$ mit $w_x \notin T$ („bei w_x verlässt x den Baum T“).

Setze $W := \{w_x \mid x \notin X\}$. Dann ist $\overline{X} = W \cdot B^*$ offen.

Ein Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, A)$ ist offen, abgeschlossen, ..., wenn die Gewinnbedingung $A \subseteq V^\omega$ es ist.
Einfachster Fall: Offen-abgeschlossene Spiele (im Wesentlichen: endliche Spiele)

Lemma 5 *Wenn $A \subseteq B^\omega$ offen-abgeschlossen, dann existiert zu jedem $x \in B^\omega$ ein endliches Präfix $w_x \preceq x$ mit*

- $x \in A \implies w_x \cdot B^\omega \subseteq A$
- $x \notin A \implies w_x \cdot B^\omega \subseteq \overline{A}$

(Die Zugehörigkeit von x zu A hängt nur von einem endlichen Präfix ab.)

Beweis Sei $A = W \cdot B^\omega, \overline{A} = W' \cdot B^\omega$.
Ein offen-abgeschlossenes Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, A)$ ist äquivalent zu einem endlichen Spiel, denn sobald man ein Präfix w gespielt hat mit $w \cdot B^\omega \subseteq A$ oder $w \cdot B^\omega \subseteq \overline{A}$ ist die Partie entschieden.

Korollar 1 *Offen-abgeschlossene Spiele sind determiniert.*

Satz 16 *Jedes abgeschlossene (und damit auch jedes offene) Spiel ist determiniert.*

Beweis Sei G ein abgeschlossenes Spiel, v_0 Anfangsposition. Dann gilt es z. z.:

> Spieler 1 hat keine Gewinnstrategie von v_0 aus $\implies$ Spieler 0 hat eine.

Für den weiteren Beweis benötigen wir noch folgenden kurze Definition.

Definition 9 $v_0 \dots v_n$ ist *gut*, wenn Spieler 1 keine Strategie hat, um $v_0 \dots v_n$ zu einer Gewinnpartie zu verlängern.

Wir nehmen nun an, v_0 sei gut.
Spieler 0 hat eine Strategie f, um jedes *gute* Präfix $v_0 \dots v_n$ zu einem guten Präfix $v_0 \dots v_n v_{n+1}$ zu verlängern.
Spieler 0 spielt mit f und x eine unendliche Partie, welche konsistent mit f ist. x ist Gewinnpartie von Spieler 0 (d. h. f ist Gewinnstrategie für Spieler 0).
Sonst: $x \in \overline{A} = W \cdot B^\omega$ für $\overline{A} \subseteq V^\omega$ Gewinnmenge von Spieler 1 ($\overline{A}$ offen), da A (Gewinnmenge von Spieler 0) abgeschlossen, $\overline{A} = W \cdot B^\omega (W \subseteq B^*)$ existiert Präfix $w_x \preceq x$ mit $w_x \in W$ und daher w_x *nicht gut*. Dies steht jedoch im Widerspruch zur gemachten Annahme.

Sei $T = (S, O)$ ein topologischer Raum, d. h. eine Menge S mit einer Kollektion O von offenen Teilmengen. Dann ist die Klasse der *Borel-Mengen* die kleinste Klasse $\mathfrak{B} \subseteq 2^S$ mit

- $O \subseteq \mathfrak{B}$
- $X \in \mathfrak{B} \implies S - X = \overline{X} \in \mathfrak{B}$
- $(X_n)_{n\in\omega} \subseteq \mathfrak{B} \implies \bigcup_{n\in\omega} X_n \in \mathfrak{B}$

Borelmengen bilden eine natürliche Hierarchie von Mengen $\Sigma^0_\alpha, \Pi^0_\alpha$ für $1 \leq \alpha \leq \omega_1$ mit

- $\Sigma^0_1 = \{X \mid X \text{ offen}\}$
- $\Pi^0_\alpha = \{\overline{X} \mid X \in \Sigma^0_\alpha\}$
- für $\alpha > 1$:
  $\Sigma^0_\alpha = \{\bigcup_{n\in\omega} X_n \mid X_n \in \Pi^0_\beta \text{ für } \beta < \alpha\}$

Die ersten Stufen dieser Hierarchie sind:

	Eigenschaften	*Notation von Haussdorf*
Σ^0_1	offene Mengen	(G)
Π^0_1	abgeschlossene Mengen	(F)
Σ^0_2	abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen	(F_σ)
Π^0_2	abzählbarer Durchschnitt offener Mengen	(G_δ)
Σ^0_2	abzählbare Vereinigung von Π^0_2-Mengen	$(G_{\delta\sigma})$
Π^0_3	abzählbarer Durchschnitt von Σ^0_2-Mengen	$(F_{\sigma\delta})$

Beispiel 10

$$\begin{aligned} L_d &= \{x \in B^\omega \mid x \text{ enthält unendlich viele } d\} \\ &= \bigcap_{n\in\omega} \underbrace{(B^*d)^n \cdot B^\omega}_{\text{offen}} \in \Pi^0_2 \end{aligned}$$

Spiele $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ mit Funktion $\Omega : V \to B$ (B endlich) und Gewinnbedingungen für Partien $\pi = v_0 v_1 v_2 \ldots \in V^\omega$ beziehen sich auf $\Omega(v_0 \Omega(v_1) \ldots \in B^\omega$.

Büchi-Bedingung. Gegeben sei $F \subseteq B$.

$$\begin{aligned} L &= \{x \in B^\omega \mid x \text{ enthält unendlich viele Vorkommen eines } d \in F\} \\ &= \bigcap_{b \in \omega} (B^* \cdot F)^n \cdot B^\omega \in \Pi^0_2 \end{aligned}$$

Muller-Bedingung. Gegeben sei $\mathcal{F} \subseteq 2^B$.

$$\begin{aligned} L &= \{x \in B^\omega \mid \underbrace{\{d \in B \mid d \text{ erscheint unendl. oft in } x\}}_{\mathrm{Inf}(x)} \in \mathcal{F}\} \\ &= \bigcup_{X \in \mathcal{F}} (\underbrace{\bigcap_{d \in X} L_d}_{\Pi^0_2} \cap \underbrace{\bigcap_{d \notin X} \overline{L_d}}_{\Sigma^0_2}) \end{aligned}$$

ist *endliche* Boolesche Kombination von Π^0_2-Mengen (in Σ^0_3)

Paritätsbedingung. Gegeben sei $B = \{0, \ldots, m-1\}$.

$$\begin{aligned} L &= \{x \in B^\omega \mid \text{ das kleinste } d \in \mathrm{Inf}(x) \text{ ist gerade}\} \\ &= \bigcap_{\substack{d \text{ ungerade}, \\ d < m}} \left(\overline{L_d} \cup \bigcup_{c < d} L_c \right) \end{aligned}$$

ist endliche Boolesche Kombination von Π^0_2-Mengen.

In der Praxis werden Gewinnbedingungen oft durch logische Formeln spezifiziert:

- LTL (linear temporal logic)
- FO oder MSO über unendlichen Pfaden

Beispiel 11 Die Paritätsbedingung läßt sich via FO wie folgt formulieren:

$$\psi \;:=\; \bigwedge_{\substack{d \text{ ungerade,}\\ d<m}} (\exists y \forall z(y < z \rightarrow P_d z) \vee \bigvee_{c<d} \forall y \exists z(y < z \wedge P_c z))$$

Ein Wort $x \in \{0, \ldots, m-1\}^\omega$ ist beschrieben durch eine Struktur $\mathfrak{A}_x = (\omega, <, (P_i)_{i<m})$ mit

$$P_i = \{y \mid x_j = i\}$$
$$(x = x_0 x_1 x_2 \ldots \in B^\omega)$$

Dann gilt

$$\mathfrak{A}_x \models \psi \iff x \text{ erfüllt Paritätsbedingung.}$$

Es gilt (ohne Beweis):

- FO und LTL definieren dieselben ω-Sprachen (Gewinnbedingungen)
- MSO definiert die ω-regulären Sprachen
- ω-reguläre Sprachen werden von *Muller-Automaten* erkannt, und daher
- ω-reguläre Sprachen sind Boolesche Kombinationen von Π^0_2-Mengen.

Satz 17 (Martin 1975) *Alle Borel-Spiele sind determiniert.*

6 Positionale Gewinnstrategien

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, Win)$ ein Spiel. Dann läßt sich eine Strategie für Spieler σ darstellen durch

$$f\,:\,V^*V_\sigma \to V$$

mit $f(zv) \in vE$.

Definition 10 (positionale Gewinnstrategien) f ist *positional*, wenn f nur von der aktuellen Position, nicht von der Geschichte abhängt, d. h.

$$f(zv) = f(z'v)\forall z, z' \in V^*, v \in V_\sigma$$

Positionale Strategien können durch Funktionen

$$F\,:\,V_\sigma \to V \text{ mit } F(v) \in vE$$

beschrieben werden.

Definition 11 (Strategie mit endlichem Speicher) Eine *Strategie mit endlichem Speicher M* (finite-memory strategy) ist beschrieben durch zwei Funktionen

$$\begin{aligned} U &: M \times V \to M \quad \text{(update memory)} \\ F &: V_\sigma \times M \to V \quad \text{(next mark)} \end{aligned}$$

mit $F(v, m) \in vE$.

Anfangszustand $m_0 \in M$, nach Segment $v_0 \dots v_n$ wird Speicherzustand $u(v_0 \dots v_n) \in M$ angenommen, wobei

$$u(v_0 \dots v_{n+1}) = U(u(v_0 \dots v_n), v_{n+1}),$$

und falls $v_n \in V_\sigma$ ist der nächste Zug

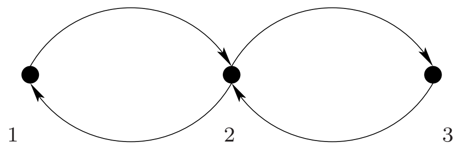
$$v_n \mapsto F(v_n, u(v_0 \dots v_n)).$$

Strategien, die mit einem endlichen Speicher auskommen, sind durch endliche Automaten implementierbar.

Bemerkung 3 Wenn $M = \{m_0\}$, dann handelt es sich um eine positionale Gewinnstrategie.

Bemerkung 4 Es gibt einfache Muller-Spiele, welche keine positionale Gewinnstrategie zulassen, z. B. $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}\}$, d. h. alle Positionen müssen unendlich oft gesehen werden.

G :



6.1 Bedeutung von Paritätsspielen

- Muller-Spiele lassen sich durch Paritätsspiele simulieren (erfordert eine Vergrößerung des Spielgraphen).
- Paritätsspiele sind positional determiniert.
- Paritätsspiele sind die Model-Checking-Spiele von Fixpunktlogiken.

Satz 18 *Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ mit $\Omega : V \to \{0, \ldots, m-1\}$ ein Paritätsspiel. Dann ist G positional determiniert, d. h. $W_0 \cup W_1 = V$, und jeder Spieler hat eine positionale Gewinnstrategie auf seiner Gewinnregion.*

Bemerkung 5 Es gibt mehrere Beweise für Satz 18. Wir führen im Folgenden lediglich den Beweis für *endliche Spielgraphen.*

Beweis Zunächst benötigen wir die folgende kurze Definition.

Definition 12 $v \in V$ heißt *lebendig*, wenn $vE \neq \emptyset$.

Das folgende Lemma zeigt, wie man mehrere positionale Strategien zu einer einzigen kombinieren kann.

Lemma 6 *Spieler σ habe positionale Gewinnstrategien f_1 auf X_1 und f_2 auf X_2. Dann ist*

$$f \,:\, v \mapsto \begin{cases} f_1(v) & v \in X_1 \\ f_2(v) & v \in X_2 \setminus X_1 \end{cases}$$

eine positionale Gewinnstrategie auf $X_1 \cup X_2$.

Wir führen eine Induktion über die Anzahl lebendiger Positionen.

- Die Behauptung ist trivialerweise wahr, wenn nur eine lebendige Position existiert.
- Sei v lebendig, $\sigma \in \{0, 1\}$: $\quad G[v, \sigma]$

v wird zu toter Position gemacht, an welcher Spieler σ gewonnen hat, d. h. in $G[v, \sigma]$ ist $vE = \emptyset$ und $v \in V_{1-\sigma}$.

- Nach Induktionsvoraussetzung gilt Satz für $G[v, \sigma]$, sowie die Gewinnregionen $W_0[v, \sigma]$, $W_1[v, \sigma]$ von Spieler 0 und Spieler 1.
  - $W_0[v, 1] \subseteq W_0, W_1[v, 0] \subseteq W_1$
  - f ist positionale Gewinnstrategie für Spieler σ von u in $G[v, 1-\sigma]$

  $\Longrightarrow$ f ist positionale Gewinnstrategie für Spieler σ von u in G und jede Partie gemäß f vermeidet v

z. z.: für jedes lebendige v hat Spieler 0 oder Spieler 1 eine positionale Gewinnstrategie für G von v aus.

- $W_0[v, 1] \subseteq W_0, W_1[v, 0] \subseteq W_1$
- Sei f positionale Gewinnstrategie für Spieler σ, gewinnt von u in $G[v, 1-\sigma]$. f ist auch Gewinnstrategie für Spieler σ von u in G aus, und vermeidet v.
- Sei $A_\sigma = \bigcup_{v \text{ lebendig}} W_\sigma[v, 1-\sigma]$ starke Gewinnposition von Spieler σ

Betrachte $u \in V \setminus (A_0 \cup A_1)$ (schwache Positionen).

Beh.: Einer der beiden Spieler gewinnt mit positionaler Strategie von *allen* schwachen Positionen aus.

Sei $u \notin A_{1-\sigma}$, v lebendig:

- $u \in W_\sigma(v, \sigma)$
- Spieler σ hat positionale Strategie f_v, mit der er in G entweder gewínnt, oder v erreicht.

(a) es gibt lebendige Positionen $v \in A_\sigma$

Beh.: Spieler σ gewinnt von jeder schwachen Position u.

Sei f positionale Gewinnstrategie von Spieler σ von v aus. Kombiniere f mit f_v zu f^*:

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & f \text{ gewinnt von } v \\ f_v(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

f^* gewinnt von u aus.

(b) alle lebendigen Positionen sind schwach.

Beh.: Wenn $\min \Omega(V)$ gerade, dann gewinnt Spieler 0 von allen schwachen Positionen, sonst gewinnt Spieler 1 von allen schwachen Positionen.

Für jedes lebendige y hat Spieler σ eine positionale Strategie f_y mit der Spieler σ von jeder lebendigen Position gewinnt oder y erreicht.

Wähle v mit $\Omega(v)$ minimal.

$$\sigma = \begin{cases} 0 & \text{wenn } \Omega(v) \text{ gerade} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

$w \neq v$, w lebendig.

$$f(x) := \begin{cases} f_w(x) & x = v \\ f_v(x) & x \neq v \end{cases}$$

z. z.: f ist Gewinnstrategie für Spieler σ von allen lebendigen Positionen.

Sei π Partie gemäß f.

(i) π trifft v nur endlich oft.
$\implies \pi = z \cdot \pi'$, π' trifft v nicht mehr.
π' ist Partie, die konsistent ist mit f_v und wird daher von Spieler σ gewonnen. Also auch π.

(ii) π trifft v unendlich oft.
Da $\Omega(v)$ minimal ist, gewinnt Spieler σ.

Positionale Strategie $f : V_\sigma \to V$ für Spieler σ in $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ kann durch Unterspiel (UG) $(W, F) \subseteq (V, E)$ beschrieben werden, mit

$$vF = \begin{cases} \{f(v)\} & \text{für } v \in W \cap V_\sigma \\ vE & \text{für } v \in W \cap V_{1-\sigma} \end{cases}$$

(W, F) beschreibt *Gewinnstrategie* für Spieler σ auf W, wenn *jeder* Pfad in (W, F) eine Gewinnpartie für Spieler σ ist. Für endliche Spielgraphen bedeutet dies: auf jedem Zyklus in (W, F) ist die kleinste Priorität gerade (wenn $\sigma = 0$) bzw. ungerade (wenn $\sigma = 1$). Dies kann man in polynomieller Zeit feststellen.

Satz 19 *Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ ein endliches Paritätsspiel. $(W, F) \subseteq (V, E)$ Untergraph. Man kann in polynomieller Zeit entscheiden, ob (W, F) eine Gewinnstrategie für Spieler σ auf W beschreibt.*

Beweis Man muss prüfen:

1) $|vF| = 1$ für $v \in W \cap V_\sigma$
2) $vF = vE$ für $v \in W \cap V_{1-\sigma}$
3) Sei $\mathcal{H}_{\geq d}$ die Einschränkung von (W, F) auf $\{v \in W \mid \Omega(v) \geq d\}$.
   Man prüft für $d = 1, 3, 5, \ldots$, ob $\mathcal{H}_{\geq d}$ einen Zyklus mit einem Knoten enthält, so dass $\Omega(v) = d$.

Satz 20 *Das Problem*

Geg.:	*Paritätsspiel $\mathcal{G}$, Position v, $\sigma \in \{0, 1\}$*
Frage:	*$v \in W_\sigma$?*

ist in $\mathcal{NP} \cap$ Co-$\mathcal{NP}$.

Beweis Da $v \in W_\sigma \iff v \notin W_{1-\sigma}$ reicht es zu zeigen, dass das Problem in $\mathcal{NP}$ ist.
Rate $(W, F) \subseteq (V, E)$ mit $v \in W$. Prüfe, dass (W, F) eine Gewinnstrategie von Spieler σ auf W beschreibt.

Es gilt sogar das folgende stärkere Resultat.

Satz 21 *Das Problem ist in $\mathcal{UP} \cap Co - \mathcal{UP}$.*[5]

Es hält sich jedoch die Vermutung, dass das Problem eigentlich in $\mathcal{P}$ ist.

[5] $\mathcal{UP}$ entspricht $\mathcal{NP}$ mit eindeutigen Berechnungspfaden.

Vorbemerkung: Attraktoren und Fallen Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, Win)$ ein Spiel, $X \subseteq V$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}
Attr_\sigma(X) &:= \{v \in V \mid \text{ Sp. } \sigma \text{ hat eine (o. E. positionale) Strategie,} \\
&\qquad\qquad \text{um eine Pos. } x \in X \cup T_\sigma \text{ zu erreichen}\} \\
T_\sigma &:= \{v \in V_{1-\sigma} \mid vE = \emptyset\} \\
Y &:= V \setminus Attr_\sigma(X)
\end{aligned}$$

Y ist eine *Falle* für Spieler σ, d. h. Spieler $1-\sigma$ hat eine (o. E.p̃ositionale) Strategie, um von jedem $y \in Y$ zu garantieren, dass das Spiel in Y bleibt. Im Folgenden stellen wir einen zweiten Beweis für Satz 20 vor.

Beweis Ohne Einschränkung gilt $\Sigma(V) = \{0, \dots, m-1\}$ oder $\Sigma(V) = \{1, \dots, m\}$.
Wir führen eine Induktion nach $|\Omega(V)|$:

- für $|\Omega(V)| = 1$ gilt: Spieler σ gewinnt alle unendlichen Partien.

$$\left.\begin{aligned}
W_{1-\sigma} &= Attr_{1-\sigma}(T_{1-\sigma}) \\
W_\sigma &= V \setminus W_{1-\sigma}
\end{aligned}\right\} \text{positionale Strategie}$$

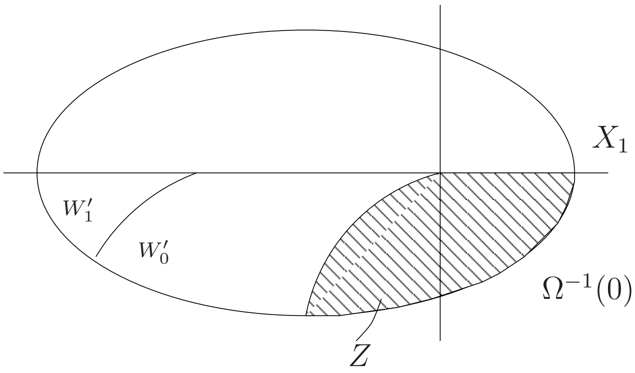
- für $|\Omega(V)| = m > 1$ gilt: o. E. $\Omega(V) = \{0, \dots, m-1\}$, sonst gleiche Argumentation mit vertauschten Spielern.

  Setze $X_1 := \{v \in V \mid \text{Sp. 1 hat pos. Gewinnstrategie von } v \text{ aus}\}$. Sei g eine positionale Gewinnstrategie von Spieler 1 auf X_1.

  Ziel: positionale Gewinnstrategie f^* für Spieler 0 auf $V \setminus X_1$
  ($\implies W_1 = X_1$ und $W_0 = V \setminus X_1$)

  (1) $V \setminus X_1$ ist eine Falle für Spieler 1. Es gibt also eine positionale „Fallenstrategie“ f von Spieler 0, um zu garantieren, dass das Spiel in $V \setminus X_1$ bleibt.

  (2) Sei $Y := \Omega^{-1}(0) \setminus X_1$, $Z = Attr_0(Y)$. Sei a eine positionale „Attraktorstrategie“ von Spieler 0, welche von jedem $z \in Z \setminus Y$ erzwingt, dass $Y \cup T_0$ erreicht wird.



(3) $V' = V \setminus (X_1 \cup Z)$, $G' = G \restriction V'$.
G' hat weniger Prioritäten als G.
Nach Induktionsvorauss. gilt der Satz für G': $V' = W_0' \cup W_1'$ und es gibt positionale Gewinnstrategien f' bzw. g' von Spieler 0 bzw. Spieler 1 auf W_0' bzw. W_1'.

- $W_1' = \emptyset$, denn

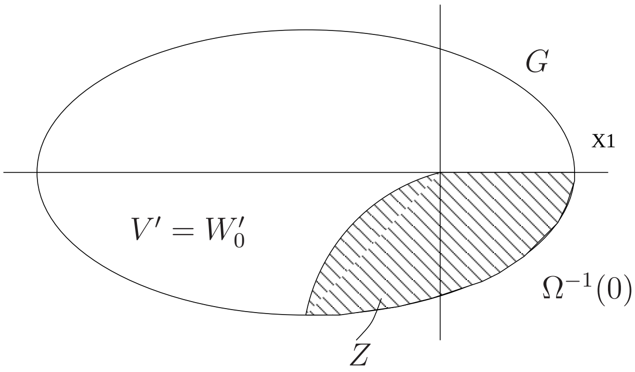
$$g + g' : x \mapsto \begin{cases} g(x) & x \in X_1 \\ g'(x) & x \in W_1' \end{cases}$$

ist positionale Gewinnstrategie von Spieler 1 auf $X_1 \cup W_1'$. Aber X_1 enthält bereits *alle* Positionen, von denen Spieler 1 positional gewinnt.

(4) Sei $f^* = f' + a + f$, d. h.

$$f^*(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{falls } x \in W_0' = V' \\ a(x) & \text{falls } x \in Z \setminus Y \\ f(x) & \text{falls } x \in Y \end{cases}$$

Beh.: f^* ist Gewinnstrategie für Spieler 0 auf $V \setminus X_1$.



G
x1
$V' = W'_0$
$\Omega^{-1}(0)$
Z

7 Fixpunktlogiken

Erweitere Basisformalismus (FO, ML, conjunctive queries) durch Fixpunkte von def. rel. Operatoren.
Formel $\varphi(R, \overline{x})$, Signatur $\tau \cup \{R\}$, $|\overline{x}| = k$ (Stelligkeit(R)). Sei $\mathfrak{A}$ eine τ-Struktur $\rightsquigarrow F_\varphi : \underbrace{R}_{\subseteq A^k} \mapsto F_\varphi(R) = \underbrace{\{\overline{a} \in A^k \mid (\mathfrak{A}, R) \models \varphi(R, \overline{a})\}}_{\subseteq A_k}$.
Was sind dann Fixpunkte von $F_\varphi(R)$? Wichtigste Fixpunktlogiken: kleinste / größte Fixpunkte.

7.1 Fixpunkttheorie

Sei B Menge und $F : 2^B \to 2^B$ mit $B = A^k$, A Universum von $\mathfrak{A}$, F definiert durch Formel $\varphi(R, \overline{x})$.

(1) $X \subseteq B$ ist Fixpunkt von F, wenn $F(X) = X$.

(2) kleinster (bzw. grösster Fixpunkt) von F:
X mit

- $F(X) = X$
- für alle Y mit $F(Y) = Y$ gilt:

$$X \subseteq Y \quad \text{(bzw. } Y \subseteq X\text{)}$$

(3) F monoton
$X \subseteq Y \implies F(X) \subseteq F(Y)$

Satz 22 (Tarski, Knaster) *Jeder monotone Operator $F : 2^B \to 2^B$ hat einen kleinsten Fixpunkt lfp(F) und einen größten Fixpunkt gfp(F), und zwar*

$$\begin{aligned} lfp(F) &= \bigcap\{X \mid F(X) = X\} = \bigcap\{X \mid F(X) \subseteq X\} \\ gfp(F) &= \bigcup\{X \mid F(X) = X\} = \bigcup\{X \mid X \subseteq F(X)\} \end{aligned}$$

Beweis Sei $S = \{X \subseteq B \mid F(X) \subseteq X\}$ mit $Y = \bigcap S$.
Y ist Fixpunkt von F: $\boxed{F(Y) \subseteq Y}$, $Y \subseteq X$ für alle $X \in S$.
Da F monoton, $F(Y) \subseteq F(X) \subseteq X$ und $F(Y) \subseteq \bigcap S = Y$.
$\boxed{Y \subseteq F(Y)}$: $F(Y) \subseteq Y \overset{\text{monoton}}{\Longrightarrow} F(F(Y)) \subseteq F(Y)$, also $F(Y) \in S$.

$Y = \bigcap S \subseteq F(Y)$.
$Y \subseteq X$ für alle X mit $F(X) \subseteq X$, insbesondere für alle X mit $F(X) = X$.
$\Longrightarrow$ Y kleinster Fixpunkt in F.
Für gfp analog.

Induktive Konstruktion von lfp(F): Stufen X^α (α Ordinale)

$$X^0 = \emptyset, X^{\alpha+1} = F(X^\alpha), X^\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} X^\alpha$$

Definition 13 F heißt *induktiv*, wenn $X^\beta \subseteq X^\alpha$ für $\beta < \alpha$.

Bemerkung 6 Monotone Operatoren sind induktiv, d. h.

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \subseteq X_\alpha \subseteq X_{\alpha+1} \subseteq \cdots$$

Es gibt kleinstes Ordinal β mit $X^{\beta+1} = X^\beta =: X^\infty$ Fixpunkt (FP) von F.
$\beta =: cl(F)$ wird Abschlussordinal von F genannt.

Lemma 7 *F induktiv* $\Longrightarrow$ $|cl(F)| \leq |B|$

Beweis Sei $|B|^+$ die kleinste Kardinalzahl, welche $> |B|$ ist. Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Für jedes $\alpha < |B|^+$ existiert $x_\alpha \in X^{\alpha+1} \setminus X^\alpha$. Dann ist

$$\underbrace{\{x_\alpha \mid \alpha < |B|^+\}}_{\text{Card } |B|^+} \subseteq B.$$

↯ Widerspruch zur Annahme, die Behauptung sei falsch.

Satz 23 *F monoton* $\Longrightarrow$ *lfp*$(F) = X^\infty$.

Beweis Es gilt: lfp$(F) \subseteq X^\infty$ (da X^∞ Fixpunkt).
Per Induktion läßt sich zeigen, dass $X^\alpha \subseteq$ lfp(F) für alle α.
Da lfp$(F) = \bigcap\{Z \mid F(Z) \subseteq Z\}$, reicht es zu zeigen, dass

$$X^\alpha \subseteq Z \text{ für alle } Z \text{ mit } F(Z) \subseteq Z$$

$\alpha = 0$: trivial

$\alpha \to \alpha + 1$:

$$\begin{array}{rcl} X^{\alpha+1} & = & F(X^\alpha) \underbrace{\subseteq}_{F \text{ monoton}} F(Z) \subseteq Z \\ X^\alpha & \subseteq & Z \quad (\alpha < \lambda) \\ X^\lambda & = & \bigcup_{\alpha<\lambda} X^\alpha \subseteq Z \end{array}$$

Induktion für $\mathrm{gfp}(F)$:

$$\begin{array}{rcl} Y^0 & = & B, \\ Y^{\alpha+1} & = & F(Y^\alpha), \\ Y^\lambda & = & \bigcap_{\alpha<\lambda} Y^\alpha \\ Y^0 \supseteq Y^1 \supseteq Y^2 \supseteq & \cdots & \supseteq Y^\alpha \supseteq Y^{\alpha+1} \supseteq \cdots \end{array}$$

konvergiert zu Y^∞ (Fixpunkt) und es gilt $Y^\infty = \mathrm{gfp}(F)$.

Der zu F duale Operator sei im Folgenden mit F^d bezeichnet, $F^d : X \mapsto \overline{F(\overline{X})}$.

- F monoton $\implies$ F^d monoton
- $\mathrm{lfp}(F) = \overline{\mathrm{gfp}(F^d)}$, $\mathrm{gfp}(F) = \overline{\mathrm{lfp}(F^d)}$

$$\left.\begin{array}{ll} X^\alpha & \text{Stufen der lfp-Induktion von } F \\ Y^\alpha & \text{Stufen der gfp-Induktion von } F^d \end{array}\right\} Y^\alpha = \overline{X^\alpha}$$

$\alpha = 0$:

$$Y^0 = B = \overline{\emptyset} = \overline{X^0}$$

$\alpha \to \alpha + 1$:

$$Y^{\alpha+1} = F^d(Y^\alpha) \overset{\text{Def.}}{=} \overline{F(\underbrace{\overline{Y^\alpha}}_{X^\alpha})} = \overline{X^{\alpha+1}}$$

λ:

$$Y^\lambda = \bigcap_{\alpha<\lambda} Y^\alpha = \bigcap_{\alpha<\lambda} \overline{X^\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha<\lambda} X^\alpha} = \overline{X^\lambda}$$

Lemma 8 *Sei B endlich, $F : 2^B \to 2^B$ monoton, F berechenbar in polynomieller Zeit (bzgl. B).*
$\Longrightarrow$ *lfp(F) bzw. gfp(F) sind polynomiell berechenbar, d. h.*

$$X^0 \subseteq X^1 \subseteq \cdots \quad X^\beta = \mathit{lfp}(F) \text{ für } \beta \leq |B|$$

(Jedes $X^{\alpha+1}$ ist aus X^α polynomiell berechenbar.)

7.2 LFP

FO und kleinste/größte Fixpunkte.

Definition 14 LFP: erweitere Formelbildungsregeln in FO durch

- Sei $\varphi(R, \overline{x})$ Formel der Signatur $\tau \cup \{R\}$, $|\overline{x}| = \text{Stelligkeit}(R) = k$.
- R sei nur positiv in φ.
- $\overline{t}$ sei Tupel von Termen, $|\overline{t}| = |\overline{x}|$.

Dann sind auch

$$\begin{aligned}&[\text{lfp } R\overline{x}.\varphi(R, \overline{x})](\overline{t}), \text{sowie}\\ &[\text{gfp } R\overline{x}.\varphi(R, \overline{x})](\overline{t})\end{aligned}$$

Formeln von LFP der Signatur τ mit freien Variablen $(free(\varphi) - \{x_1, \ldots, x_k\} \cup free(\overline{t})$

Semanik von LFP

Sei $\mathfrak{A}$ τ-Struktur. Dann gilt $\mathfrak{A} \models [\text{lfp } R\overline{x}.\varphi(R, \overline{x}](\overline{t})$, wenn

$$\overline{t}^{\mathfrak{A}} \in \text{lfp}(F_\varphi).$$

$[F_\varphi : 2^{A^k} \to 2^{A^k}, R \mapsto \{\overline{a} \mid \mathfrak{A} \models \varphi(R, \overline{A})\}$ *monoton*, da R positiv in φ.]
Es gilt analog $\mathfrak{A} \models [\text{gfp } R\overline{x}.\varphi(R, \overline{x}](\overline{t})$, wenn

$$\overline{t}^{\mathfrak{A}} \in \text{gfp}(F_\varphi).$$

Beispiel 12 (1) TC, zweistellige Relation E, $G = (V, E)$.

Dann wird TC(E) durch die Formel

$$\psi(u, v) := [\text{lfp } Txy.Exy \vee \exists z(Exz \wedge Tzy)](u, v)$$

beschrieben.

Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
T^0 &= \emptyset \\
T^1 &= E \\
T^2 &= \{(x, y) \mid \exists z((x, z) \in E \wedge (z, y) \in E)\} \cup E \\
&= \{(x, y) \mid dist(x, y) \leq 2\} \\
&\vdots \\
T^n &= \{(x, y) \mid dist(x, y) \leq n\} \\
T^\infty &= TC(E)
\end{aligned}$$

(2) Betrachte die Formel

$$\varphi(u, v) := [\text{lfp } Ty.Euy \vee \exists x(Tx \wedge Exy)](v)$$

Dann gilt $T^n = \{y \mid dist(u, y) \leq n\}$.

Beispiel 13 Sei $\varphi := \forall y(y < x \rightarrow Ry)$ eine Formel auf einer partiellen Ordnung $(A, <)$. Betrachte die lfp-Formel

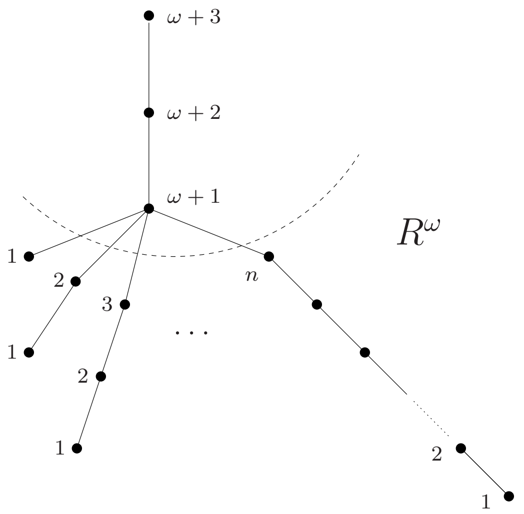
$$[\text{lfp } Rx.\varphi(R, x)](\overline{x})$$

(mit der Bedeutung: „von x aus keine unendlichen absteigenden Ketten“, d. h. $<$ fundiert).
Dann gilt:

$$(A, <) \models \forall x[\text{lfp } Rx.\varphi](x)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
R^0 &= \emptyset \\
R^1 &= \{a \mid \neg\exists b_0 : b_0 < a\} \\
R^2 &= \{a \mid \neg\exists b_0 b_1 : b_0 < b_1 < a\} \\
R^n &= \{a \mid \neg\exists b_0 \dots b_{n-1} : b_0 < b_1 < \dots < b_{n-1} < a\} \\
R^\omega &= \{a \mid \exists n \in \omega : \neg\exists b_0 \dots b_{n-1} : b_0 < \dots < b_{n-1} < a\}
\end{aligned}$$



Beispiel 14 Sei ein Spiel $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E)$ gegeben. Definiere dann

$$GAME := \{(G, v) \mid \text{Spieler 0 hat G.S. für } \mathcal{G} \text{ von } v \text{ aus}\}$$

mit den folgenden Eigenschaften

- lösbar in linearer Zeit
- $\mathcal{P}$-vollständig
- nicht FO-definierbar

Es gilt dann:

$$(G, v) \in GAME \iff$$
$$G \models [\text{lfp } Wx.(V_0x \wedge \exists y(Exy \wedge Wy)) \vee (V_1x \wedge \forall y(Exy \rightarrow Wy))](v)$$

mit $\psi(\overline{x}) \in \text{LFP}$.
Wie ist jetzt die (Daten)-Komplexität des Model-Checking-Problems für ψ?

Geg.:	$\mathfrak{A}$ (endliche Struktur)
Berechne:	$\psi^{\mathfrak{A}} = \{\overline{a} \mid \mathfrak{A} \models \psi(\overline{a})\}$
	(bzw., wenn ψ ein Satz, entscheide ob $\mathfrak{A} \models \psi$)
Gezeigt:	$F : B \rightarrow B$ polynomiell berechenbar
	$\Longrightarrow$ lfp(F), gfp(F) polynomiell berechenbar

$\Longrightarrow$ in Polynomialzeit lösbar.

Satz 24 *Für jedes $\psi(\overline{x}) \in LFP$ ist die Funktion $\mathcal{A} \mapsto \psi^{\mathcal{A}}$ polynomiell berechenbar (bezüglich $\| \mathfrak{A} \|$).*

Auf geordneten endlichen Strukturen $(\mathfrak{A}, <)$ [$<$ lineare Ordnung auf A] gilt sogar:

$$\text{LFP} \equiv \text{PTIME}$$

(nach dem Satz von Immema/Vardi), d.h. für jede Funktion $Q : (\mathfrak{A}, <) \to Q^{\mathfrak{A}}$ auf geordneten endlichen τ-Strukturen existiert eine Formel $\psi \in$ LFP, so dass für alle $(\mathfrak{A}, <)$:

$$Q^{\mathfrak{A}} = \{\overline{a} \mid (\mathfrak{A}, <) \models \psi(\overline{a})\}$$

7.3 Der modale μ-Kalkül

Es gilt:

$$\begin{array}{rcl} \text{FO} & \to & \text{LFP} \\ \text{ML} & \to & L_\mu \end{array}$$

L_μ: Erweitere ML um folgende Regel:
wenn $\varphi(X)$ eine Formel ist, in der die Aussagenvariablen nur positiv vorkommen, dann sind auch

$$\begin{array}{ll} \mu X.\varphi & \text{und} \\ \nu X.\varphi & \text{Formeln von } L_\mu \end{array}$$

Semantik:

Sei $\mathcal{K}$ Transitionssystem mit Universum V. Dann definiert $\varphi(X)$ den Operator

$$\begin{array}{rcl} F_\varphi : 2^V & \to & 2^V \\ X & \mapsto & \{v \mid (\mathcal{K}, X), v \models \varphi\} \end{array}$$

So definiert beispielsweise $\varphi = Pv\Diamond X$ den Operator $F_\varphi : X \mapsto \{v \mid v \in P$ oder es gibt $w \in vE \cap X\}$.
Es gelten die folgenden Eigenschaften:

- X positiv in $\varphi \implies F_\varphi$ monoton
- $\mathcal{K}, v \models \mu X.\varphi :\iff v \in \mathrm{lfp}(F_\varphi)$
- $\mathcal{K}, v \models \nu X.\varphi :\iff v \in \mathrm{gfp}(F_\varphi)$

Weiter:

$$\begin{array}{rcl} \text{ML} & \leq & \text{FO} \\ \varphi & \mapsto & \varphi^*(x) \quad \text{mit} \\ \mathcal{K}, v \models \varphi & \iff & \mathcal{K} \models \varphi^*(v) \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rcl} L_\mu & \leq & \text{LFP} \\ \psi := \mu X.\varphi & \mapsto & \psi^*(x) = [\text{lfp } Xy.\varphi^*(X,y)](x) \end{array}$$

Beispiel 15 GAME ist L_μ-definierbar. Es gilt:

$$(\mathcal{G}, v) \in \text{GAME} \iff \mathcal{G}, v \models \mu W.(V_0 \wedge \Diamond W) \vee (V_1 \wedge \Box W)$$

Für strikt alternierende Spiele auf $\mathcal{G} = (V, E)$:

$$(\mathcal{G}, v) \in \text{GAME} \iff \mathcal{G}, v \models \mu W.\Diamond\Box W$$

Beispiel 16 Betrachte $\psi = \mu X.\Box X$. Dann gilt:

$$\mathcal{K}, v \models \psi \iff \text{von } v \text{ aus existieren keine unendlichen Pfade}$$

$\psi := \nu X. \underbrace{\mu Y.\Diamond((P \wedge X) \vee Y)}_{\{v | v \to^*_{\geq 1} P \wedge X\}}$

P ist erreichbar: $\mu X.Pv\Diamond X$

$$\begin{array}{rcl} X^0 & = & V \\ X^1 & = & \{v \mid v \xrightarrow{*} P\} \\ X^1 & = & \{v \mid v \xrightarrow{*} P\} \\ X^2 & = & \{v \mid v \xrightarrow{*} P \xrightarrow{*} P\} \\ & \vdots & \\ X^n & = & \{v \mid v \xrightarrow{*} P \xrightarrow{*} \cdots \xrightarrow{*} P\} \end{array}$$

Dann gilt:

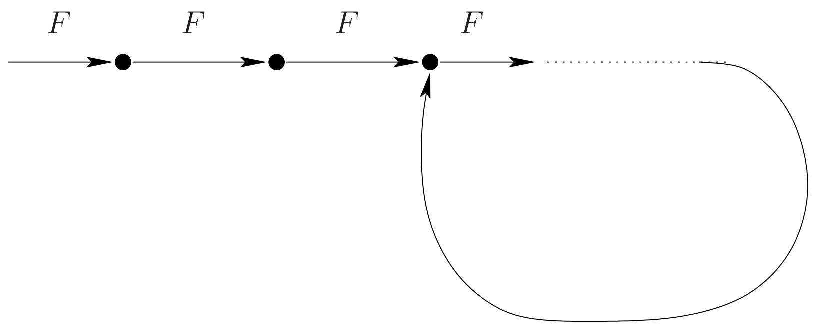
$\mathcal{K}, v \models \psi \iff$ es gibt einen Pfad von v, auf dem P unendlich oft getroffen wird

7.4 Eigenschaften des μ-Kalküls

- CTL, CTL*, LTL, ...
  PDL $\leq L_\mu$
- L_μ hat FMP (finite model property)

LFP:

ψ := $\forall y \exists z\ Fyz \wedge (F^{\leftarrow}$ ist fundiert)
$\wedge \forall y [\text{lfp } Ry.\forall x(Fxy \rightarrow Rx)](y)$



Unendlichkeitsaxiom
Wir wissen bereits, dass das Unendlichkeitsaxiom nicht L_μ-ausdrückbar ist.

- Sat(L_μ) ist entscheidbar (und zwar in EXPTIME)
- L_μ ist invariant unter Bisimulation, d. h.

$$\mathcal{K}, v \sim \mathcal{K}', v',\ \mathcal{K}, v \models \psi \implies \mathcal{K}', v' \models \psi$$

- L_μ hat Baummodelleigenschaft,
  d. h. ψ erfüllbar $\implies$ es gibt Baummodell $\mathcal{T}, v \models \psi$
- automatentheoretische Methoden für L_μ

- Es gilt:

$$\begin{array}{rcl} L_\mu & \leq & \text{MSO} \\ \mu X.\psi & \mapsto & \forall X((\forall y \psi^*(X,y) \rightarrow Xy) \rightarrow Xx) \end{array}$$

- $L_\mu \equiv$ bisimulationsinvariantes Fragment von MSO
- Model-Checking-Spiele für L_μ / LFP

7.5 Model-Checking-Spiele für $\mathbf{L}_\mu$ / LFP

Sei $\varphi \in$ LFP / L_μ in Negationsnormalform, z. B.

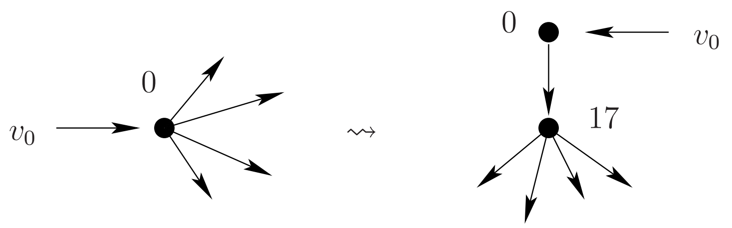
$$\begin{array}{l} \neg[\text{lfp } T\overline{x}\ \psi(T,\overline{x})](\overline{z}) \\ \equiv[\text{gfp } T\overline{x}\ \neg\psi[T/\neg T]](\overline{z}) \end{array}$$

Es ist $F^d_\psi(T) = \overline{F(\overline{T})}$.

Entfaltung eines Paritätsspiels

Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$, $\Omega : V \rightarrow \{0, \ldots, d-1\}$.
Annahmen:

- $\min(\Omega(V)) = 0$
- jeder Knoten v mit $\Omega(v) = 0$ hat genau einen Nachfolger $s(v)$.



$17 = \max(\Omega(v))$

Wir definieren

$$\begin{array}{rcl} T & := & \{v \mid \Omega(v) = 0\}, \text{ sowie} \\ G^- & : & G \text{ ohne Kanten in } E \cap (T \times V), \end{array}$$

d. h. die Knoten in T sind terminal.
Betrachte die Folge $(G^\alpha)_{\alpha\in\mathrm{On}}$ (On = Ordinal Numbers):

$$G^- + \underbrace{\text{Gewinnbedingung für } T}_{T=T_0^\alpha \uplus T_1^\alpha}$$

An Positionen $v \in T_\sigma^\alpha$ hat Spieler σ das Spiel $\mathcal{G}^\alpha$ gewonnen.
Für jedes α gilt:

$$V = \underbrace{W_0^\alpha \uplus W_1^\alpha}_{\text{Gewinnregionen}}$$

- W_0^α / W_1^α hängen ab von $T_0^\alpha \uplus T_1^\alpha$
- $T_0^{\alpha+1} / T_1^{\alpha+1}$ hängen ab von $W_0^\alpha \uplus W_1^\alpha$:

$$\begin{aligned} T_0^0 &:= T \qquad (T_1^0 = \emptyset) \\ T_0^{\alpha+1} &:= \{v \in T \mid s(v) \in W_0^\alpha\} \\ T_0^\lambda &:= \bigcap_{\alpha<\lambda} T_0^\alpha \qquad \lambda \text{ Limes-Ordinal} \end{aligned}$$

- Es gilt
  $W_0^0 \supseteq W_0^1 \supseteq W_0^2 \supseteq \cdots$, und
  $W_1^0 \subseteq W_1^1 \subseteq W_1^2 \subseteq \cdots$.
- Es gibt ein α mit
  $W_0^\alpha = W_0^{\alpha+1} =: W_0^\infty$
  $W_1^\alpha = W_1^{\alpha+1} =: W_1^\infty$

Lemma 9 (Entfaltungslemma) *Es gilt:*

$$W_0^\infty = W_0 \qquad \textit{und} \qquad W_1^\infty = W_1$$

W_0, W_1 bezeichne die Gewinnregion des jeweiligen Spielers in $\mathcal{G}$.

Beweis Finde jeweils Strategie f für Spieler 0 bzw. g für Spieler 1 in $\mathcal{G}$, mit der Spieler σ von allen $v \in W_\sigma^\alpha$ gewinnt.
f^α ist Gewinnstrategie für Spieler 0 in $\mathcal{G}^\alpha$ mit Gewinnmenge $W_0^\alpha = W_0^\infty$.
$\rightsquigarrow$ Strategie f für $\mathcal{G}$:

$$f(v) = \begin{cases} f^\alpha(v) & v \in V_0 \setminus T \\ s(v) & v \in V_0 \cap T \end{cases}$$

f ist Gewinnstrategie auf W_0^∞.
Für eine Partie $v_0v_1v_2\ldots$ gemäß f und $v_0 \in W_0^\infty$ gilt:

$$\begin{aligned} v_i \in W_0^\alpha \setminus T &\implies v_{i+1} \in W_0^\alpha, f^\alpha \text{ Gewinnstrategie} \\ v_i \in W_0^\alpha \cap T = W_0^{\alpha+1} \cap T &\implies s(v) \in W_0^\alpha \end{aligned}$$

Partie wird gewonnen von Spieler 0. Unterscheide:

- T wird nur endlich oft getroffen
  $\implies$ ab einem gewissen Punkt ist Partie konsistent mit f^α in $\mathcal{G}^\alpha$
- T wird unendlich oft getroffen
  $\implies$ minimale Priorität, die unendlich oft vorkommt, ist 0.

Für $v \in V_1^\infty$ sei $\rho(v) = \min\{\beta \mid v \in W_1^\beta\}$.
Für jedes α sei g^α Gewinnstrategie von Spieler 1 für $\mathcal{G}^\alpha$.

$\implies$ Strategie g:

$$g(v) = \begin{cases} g^{\rho(v)}(v) & \text{falls } v \in V_1 \setminus T \\ s(v) & \text{falls } v \in V_1 \cap T \end{cases}$$

Sei $\pi = v_0v_1v_2\ldots$ Partie gemäß g von $v_0 \in W_1^\infty$. Dann gilt:

- $v_i \in W_1^\infty$
  $\implies$
  (1) $v_{i+1} \in W_1^\infty$
  (2) $\rho(v_{i+1}) \le \rho(v_i)$
  (3) $v_i \in T \implies \rho(v_{i+1}) < \rho(v_i)$
- $v_i \in W_1^\infty \setminus T$, $\rho(v_i) = \alpha$
  $\implies v_i \in W_1^\alpha \implies v_{i+1} \in W_1^\alpha$
- $v_i \in W_1^\infty \cap T$, $\rho(v_i) = \alpha$
  $\implies v_i \in T_1^\alpha, \alpha = \beta + 1, s(v) \in W_1^\beta$
  $\implies \rho(v_{i+1}) \le \beta < \alpha = \rho(v_i)$.

Aus den Unterpunkten (1), (2) und (3) folgt, dass Spieler 1 gewinnt.
T wird unendlich oft getroffen, und π ist ab einem gewissen Punkt konsistent mit Strategie g^α für $\mathcal{G}^\alpha$.

Satz 25 *Sei $\psi(\overline{x}) \in LFP$, $\mathfrak{A}$ eine Struktur und $\overline{a} \in \mathfrak{A}$. Dann gilt*

$$\mathfrak{A} \models \psi(\overline{a}) \iff \textit{Spieler 0 gewinnt } \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \psi(\overline{a})).$$

Beweis Wir führen Induktion über ψ. Der interessanteste Fall ist dabei:

$$\psi(\overline{x}) := [\text{gfp } T\overline{x}.\psi](\overline{x})$$

$\rightsquigarrow \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \psi(\overline{a}))$ hat kleinste Priorität 0 (Entfaltungslemma gilt).
Fixiere Interpretation T_0 für T, mit Induktionsvoraussetzung

$$(\mathfrak{A}, T_0) \models \varphi(T) \iff \text{Sp. 0 gewinnt } \mathcal{G}((\mathfrak{A}, T_0), \varphi(T))$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{A} \models [\text{gfp } Tx.\varphi](\overline{a}) \\
&\iff \quad (\mathfrak{A}, T^\alpha) \models \varphi(\overline{a}) \text{ für alle } \alpha \\
&\iff \quad \text{Sp. 0 gewinnt } \underbrace{\mathcal{G}((\mathfrak{A}, T^\alpha), \varphi(\overline{a}))}_{\mathcal{G}^\alpha \text{ für } \mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \psi(\overline{a}))} \text{ für alle } \alpha \\
&\underset{\text{Entf.lemma}}{\iff} \quad \text{Sp. 0 gewinnt } \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \psi(\overline{a})).
\end{aligned}$$

7.6 Paritätsspiele

- Paritätsspiele sind spezielle Muller-Spiele
- Viele Spiele lassen sich auf Paritätsspiele reduzieren, wenn auch mit größerem Spielgraph.
- Paritätsspiele sind *positional* determiniert.
- Die Berechnung der Gewinnregionen ist in $\mathcal{NP} \cap \text{Co-}\mathcal{NP}$.
- Für die besten deterministischen Algorithmen zur Lösung von Paritätsspielen gilt:

  Sei $\mathcal{G} = (V, V_0, V_1, E, \Omega)$ das Paritätsspiel.

  - Platz: $\mathcal{O}(d \cdot |V|)$, $d = |\Omega(V)|$ Index von G
  - Zeit : $\mathcal{O}\left(d \cdot |E| \left(\frac{|V|}{d/2}\right)^{d/2}\right)$,

d. h. polynomial in $\| G \|$ und exponentiell in d.

- Strategieverbesserungsalgorithmus
  - korrekt
  - möglicherweise polynomial
  - in der Praxis gut

  Die angesprochenen Eigenschaften sind derzeit Bestandteil aktueller Forschungen.

- Paritätsspiele sind die Model-Checking-Spiele für LFP/L_μ

7.7 Model-Checking für LFP/L$_\mu$

$$\mathfrak{A}, \psi \longmapsto \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \psi)$$

Dann
$$\| \mathcal{G}(\mathfrak{A}, \psi) \| \sim |\psi| \cdot |A|^k$$
mit $k = \text{Weite}(\psi) = \max\{|\text{frei}(\varphi)| \mid \varphi \text{ Unterformel von } \psi\}$.
Das heißt für L_μ:
$$\| \mathcal{G}(\mathcal{K}, \psi) \| = \mathcal{O}\left(\| \mathcal{K} \| \cdot |\psi|\right)$$
Die Anzahl der Prioritäten in $\mathcal{G}(\mathfrak{A}, \psi)$ ist dann

$$1 + \text{Alternationstiefe von } \psi,$$

wobei die Alternationstiefe die Anzahl echter Alternierungen von lfp/gfp (bzw. μ/ν) bezeichnet.
Für wichtige Fragmente von L_μ ist die Alternationstiefe klein:

- bei CTL beträgt sie 0,
- bei CTL^* beträgt sie 1.

7.8 Model-Checking-Komplexität

$\mathbf{L}_\mu$: Für L_μ gilt:

Zeit: $\mathcal{O}\left(d^2 \cdot \left(\frac{|\psi|\cdot\|\mathcal{K}\|}{(d+1)/2}\right)^{(d+3)/2}\right)$, d Alternationstiefe

Platz: $\mathcal{O}\left(d\cdot \parallel \mathcal{K} \parallel \cdot|\psi|\right)$

- $\mathcal{NP} \cap$ Co-$\mathcal{NP}$ (sogar $\mathcal{UP} \cap Co - \mathcal{UP}$)
- polynomial in $\parallel \mathcal{K} \parallel$, $|\psi|$
- exponentiell in Alternationstiefe

LFP: Für LFP gilt:

Zeit: $\mathcal{O}\left(d^2 \cdot \left(\frac{|\psi|\cdot|A|^{\text{Weite}(\psi)}}{(d+1)/2}\right)^{(d+1)/2}\right)$

- $\mathcal{NP} \cap$ Co-$\mathcal{NP}$ für Formeln mit beschränkter Weite
- EXPTIME-vollständig für Formeln mit unbeschränkter Weite (sogar mit nur einem LFP-Operator)

Insgesamt gilt also für das LFP-Model-Checking:

- $\left.\begin{array}{l}\text{beschränkte Weite,}\\ \text{beschränkte Alt.tiefe}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{PTIME}$
- $\left.\begin{array}{l}\text{unbeschränkte Weite,}\\ \text{(beschränkte Alt.liefe)}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{EXPTIME}$
- $\left.\begin{array}{l}\text{beschränkte Weite,}\\ \text{unbeschränkte Alt.tiefe}\end{array}\right\} \Longrightarrow \text{noch unbekannt}$

Vermutung: (mit Vorsicht zu genießen!)
Die folgenden Problem sind in Polynomialzeit lösbar

(1) Berechnung von Gewinnregionen in Paritätsspielen

(2) Model-Checking für LFP-Formeln mit Weite k (für jedes $k \geq 2$)

(3) Model-Checking für L_μ

Bemerkung 7 Wenn eines der drei oben angesprochenen Probleme in PTIME ist, dann alle. Es gilt nämlich

$$(3) \leq_p (2) \leq_p (1)$$

7.9 L_μ-Definierbarkeit von Gewinnregionen in Paritätsspielen

Sei $\mathcal{G}$ ein Paritätsspiel mit Prioritäten $0, \ldots, d-1$, d. h.

$$\mathcal{G} = (V, E, \underbrace{E_0 \ldots, E_{d-1}, A_0, \ldots, A_{d-1}}_{\text{einstellige Relationen}})$$

mit

$$E_i = \{v \in V_0 \mid \Omega(v) = i\}$$
$$A_i = \{v \in V_1 \mid \Omega(v) = i\}$$

Satz 26 *Spieler 0 hat eine Gewinnstrategie in $\mathcal{G}$ von v aus gdw.*

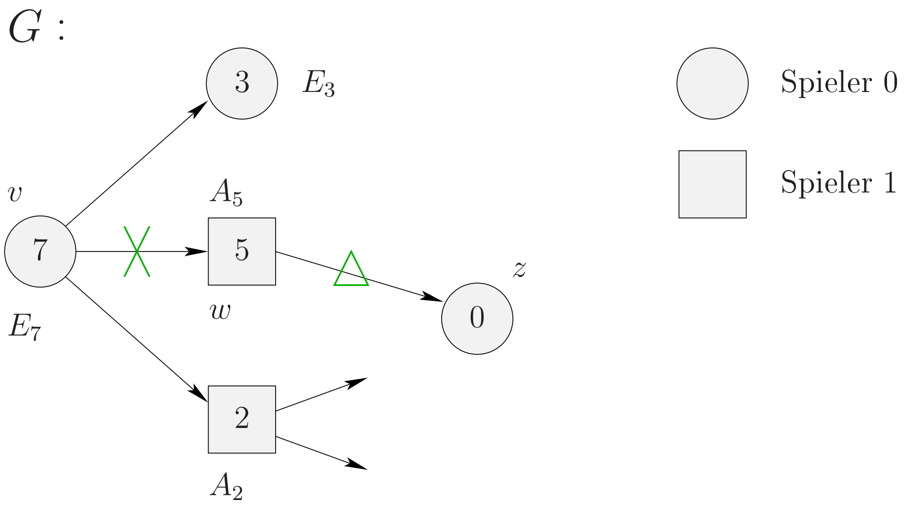
$$\mathcal{G}, v \models \nu X_0 \mu X_1 \nu X_2 \ldots \lambda X_{d-1}\, \varphi$$

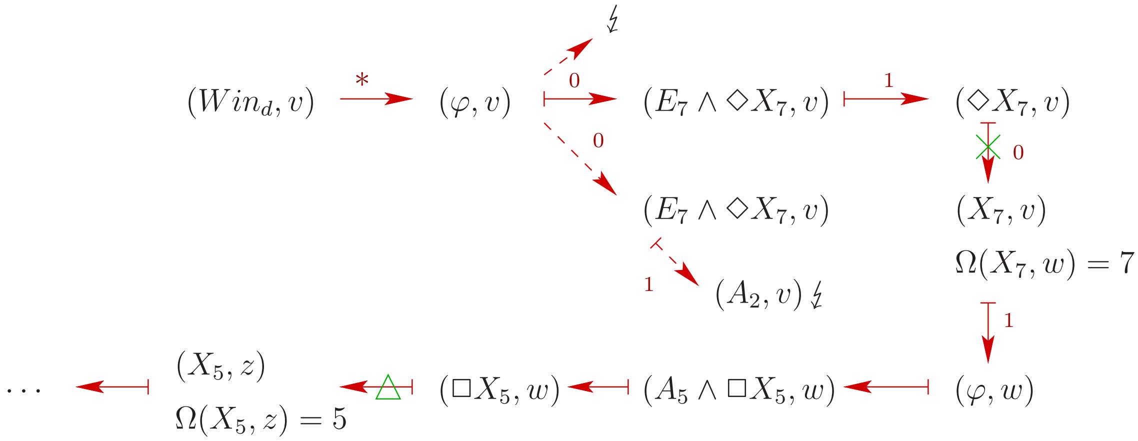
mit $\underbrace{\varphi = \bigvee_{i=0}^{d-1} (E_i \wedge \Diamond X_i) \vee (A_i \wedge \Box X_i)}_{Win_d}$

Beweis Betrachte Model-Checking-Spiel $\mathcal{G}(G, Win_d)$: im Wesentlichen äquivalent zu $\mathcal{G}$ selbst.
Jede „sinnvoll gespielte“ Partie von $\mathcal{G}(G, Win_d)$ entspricht einer Partie von $\mathcal{G}$ mit den gleichen Prioritäten.

$$\begin{array}{ll} & \text{Spieler 0 gewinnt } \mathcal{G} \text{ von } v \text{ aus} \\ \iff & \text{Spieler 0 gewinnt } \mathcal{G}(G, Win_d) \text{ von } (Win_d, v) \text{ aus} \\ \iff & \mathcal{G}, v \models Win_d \end{array}$$

$$L_\mu^d = \{\psi \in L_\mu \mid \text{Alt.tiefe}(\psi) \leq d\}$$





Satz 27 (Bradfield) *Die Alt.-Hierarchie von L_μ ist strikt, d. h. für jedes d existiert ein $\psi_d \in L_\mu^d$, so dass keine Formel $\varphi \in L_\mu^{d-1}$ existiert mit $\psi \equiv \varphi$.*

$$L_\mu^d \not\leq L_\mu^{d-1}$$

Ein Beispiel für ψ_d aus dem vorangegangenen Satz ist Win_d.
Gewinnregionen in Paritätsspielen mit d Prioritäten sind L_μ^d-definierbar, aber nicht L_μ^{d-1}-definierbar.