

Einführung in die Stochastik für Studierende der Informatik

Lösungen zur 5. Übung

Aufgabe 20

Wegen $A \cap B_i \subseteq A$ für $1 \leq i \leq n$ und der Voraussetzung $0 < P(A \cap B_i)$ gilt $P(A) \geq P(A \cap B_i) > 0$, das heißt,

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} \quad \text{ist wohldefiniert für } 1 \leq i \leq n.$$

Außerdem:

$$A \cap B = \sum_{i=1}^n (A \cap B \cap B_i). \quad (1)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} P(B|A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{P(A)} \cdot P\left(\sum_{i=1}^n (A \cap B \cap B_i)\right) \\ &= \frac{1}{P(A)} \cdot \sum_{i=1}^n P(A \cap B \cap B_i) \\ &= \frac{1}{P(A)} \cdot \sum_{i=1}^n P(B|A \cap B_i) \cdot P(A \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} \cdot P(B|A \cap B_i) \\ &= \sum_{i=1}^n P(B_i|A) \cdot P(B|A \cap B_i). \end{aligned}$$