Einführung in die Stochastik für Informatiker (EidS) 2002 - “Übungen-HowTo”

Klaus Ridder (klaus.ridder@gmx.de)
Erarbeitet aus den Großübungsmitschriften von
Stefan Hirschmeier (eids@stefanhirschmeier.de)

23rd July 2002

Aufgabe 1

Bei einem Kartenspiel mit 52 Karten werden an jeden der vier Spieler (A, B, C und D) 13 Karten ausgegeben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

1. Spieler A alle Karten der Farbe Herz, B alle der Farbe Karo, C alle der Farbe Pik und D alle der Farbe Karo bekommt,
2. Spieler A genau ein Ass bekommt,
3. Spieler A weniger als fünf schwarze Karten bekkommt.

Lösung 1a: A erhält alle Herz, B alle Karo, C alle Pik, D alle Kreuz

Wir betrachten eine Ereignismenge Ω_{II}, welche alle Möglichkeiten enthält, die 52 Spielkarten anzuordnen.

Dies sind alle n-Tupel aus Zahlen zwischen 1 und 52, wobei die Reihenfolge beachtet wird, und jede Karte maximal 1x vorkommen kann:

$$\begin{aligned}\Omega_{II} &= \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) \in A^n \mid \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\} \\ &\quad \text{mit } A = \{1, 2, ..., 52\}\end{aligned}$$

Nun teilen wir die Karten folgendermaßen auf:

- 1-13 Herz,
- 14-26 Karo,
- 27-39 Pik,
- 40-52 Kreuz

Die Mächtigkeit der Ergebnismenge (Möglichkeiten, 52 Karten anzuordnen), ist 52!:

$$|\Omega_{II}| = \frac{N!}{(N-n)!} = 52!$$

Nun betrachten wir eine Ergebnismenge A, in der alle gewünschten Ereignisse enthalen sind. Wir betrachten wieder ein Feld aus 52 Karten, wobei nun

- Die Plätze 1 bis 13 nur mit den Karten $1-13$ bestückt werden dürfen (innerhalb dieser 13 Plätze in beliebiger Reihenfolge),

- Die Plätze 14 bis 26 nur mit den Karten $14-26$ bestückt werden dürfen (innerhalb dieser 13 Plätze in beliebiger Reihenfolge), etc. :

$$\begin{aligned} A_{II} \;=\; & \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{52}) \in \Omega_{II} \mid \\ & \omega_1, \dots, \omega_{13} \leq 13 \leq \\ & \omega_{14}, \dots, \omega_{26} \leq 26 \leq \\ & \omega_{27}, \dots, \omega_{39} \leq 39 \leq \\ & \omega_{40}, \dots, \omega_{52} \leq 52\} \end{aligned}$$

Auf jedem dieser Felder aus 13 Plätzen haben wir nun 13! Möglichkeiten, die Karten anzuordnen. (Die vier Felder selbst müssen wir nicht mehr permutieren, da wir bereits vorher festgelegt haben, dass Feld 1 das Herz-Feld ist, etc.)

$$|A_{II}| = 13!13!13!13! = (13!)^4$$
$$\Rightarrow \quad P(A_{II}) = \frac{(13!)^4}{52!} \approx 1,86 \cdot 10^{-29}$$

Lösung 1b: Spieler A bekommt genau ein Ass

Wir betrachten hier nur Spieler A, daher umfasst unsere Ereignismenge alle möglichen Kartentupel, die Spieler A bekommen kann;

$$\Omega_{III} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{13}) \in A^{13} \mid \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_{13}\}$$

mit $A = \{1, 2, \dots, 52\}$, Asse haben die Nummern $1, 2, 3, 4$.

Die Mächtigkeit dieser Menge $|\Omega_{III}|$ sind nun alle Möglichkeiten, 13 Karten aus 52 auszuwählen:

$$|\Omega_{III}| = \binom{N}{n} = \binom{52}{13}$$

Die Ergebnismenge umfasst nun alle Ereignisse, in denen auf dem ersten Platz eines der 4 Asse liegt, und auf den restlichen Plätzen andere Karten (aber kein Ass mehr). Wir brauchen nur die ersten Position zu betrachten, da wir jede Auswahl an Karten sowieso nur einmal betrachten. (Definition Binomialkoeffizient)

$$A_{III} = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{13}) \in \Omega_{III} \mid \omega_1 \in \{1, 2, 3, 4\}, \omega_2, \dots, \omega_{13} \notin \{1, 2, 3, 4\}\}$$

Wir müssen nun 1 aus 4 Wählen (das As) und 12 aus 48 wählen (die restlichen Karten):

$$|A_{III}| = \binom{4}{1}\binom{48}{12}$$

Um die passende Wahrscheinlichkeit zu bekommen, müssen wir diese “günstigen ” Fälle nun noch durch die Anzahl Möglichkeiten teilen, 13 Karten aus 52 auszuwählen:

$$P(A_{III}) = \frac{\binom{4}{1}\binom{48}{12}}{\binom{52}{13}} \approx 0,44$$

Lösung 1c: Spieler A bekommt weniger als 5 schwarze Karten

Unser Ωist wie in b) (also die Möglichkeiten, 13 auszuwählen).

Es seien die ersten 26 Karten schwarz: $S = \{1, 2, ..., 26\}$

Unsere Ereignismenge $A_i$seien nun alle Ergebnisse, in denen wir **genau i schwarze Karten** bekommen, d.h. (da wir jede Auswahl nur 1x betrachten) die ersten i Karten nur aus den Karten $1-26$ stammen, die restlichen Karten aus dem Vorrat $27-52$ genommen sind.

$$A_i = \{(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_{13}) \in \Omega_{III} \mid \omega_i \leq 26, \omega_{i+1} > 26\}$$

Wir können also i Karten aus den 26 schwarzen auswählen, und dann nochmal $13-i$ aus den 26 roten:

$$|A_i| = \binom{26}{i}\binom{26}{13-i}$$

“Weniger als 5 Karten ” bedeutet nun 1, 2, 3 oder 4 Karten:

$$\begin{aligned} A &= A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_4 \\ |A| &= |A_0| + ... + |A_4| \\ &= \sum_{i=0}^{4} \binom{26}{i}\binom{26}{13-i} \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist nun wir immer günstige / Mögliche:

$$P(A) = \frac{\sum_{i=0}^{4}\binom{26}{i}\binom{26}{13-i}}{\binom{52}{13}} \approx 0,1$$

Aufgabe 2

Netzwerk mit n Druckern, m Druckaufträge werden zufällig auf die Drucker verteilt.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Drucker 1 den Auftrag mit der Nummer 1?
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Drucker 1 keinen Auftrag?
3. Es kommen n=m Druckaufträge an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt genau ein Drucker keinen Auftrag?

Lösung Aufgabe 2.1

Der Auftrag 1 hat n Drucker zur Auswahl. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass Drucker 1 ihn bekommt,

$$\frac{1}{n}$$

Formale Darstellung:

$\omega_i = j \;\widehat{=}$ i-ter Druckauftrag wird von Drucker j bearbeitet.

Unsere Ereignismenge sind alle Tupel aus m Druckaufträgen, welche jeweils durch die Nummer ihres Druckers repräsentiert werden.

$$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_m \mid \omega_i \in \{1, ..., n\} \forall 1 \leq i \leq m\} \qquad n, m \in N$$

Jeder der m Jobs kann die Drucker $1 \ldots n$ benutzen, daher ist

$$|\Omega| = n^m$$

Die interessante Ereignismenge sind nun alle Tupel aus Jobs, bei denen Job 1 auf Drucker 1 gedruckt wird:

$$A = \{(\omega_1, ..., \omega_n) \in \Omega \mid \omega_1 = 1\}$$

Der erste Job liegt also fest auf Drucker 1, die restlichen können wie bisher beliebig verteilt werden:

$$|A| = n^{m-1}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist nun wieder passende Möglichkeiten durch alle Möglichkeiten:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{n^{m-1}}{n^m} = \frac{1}{n}$$

Lösung Aufgabe 2.2

Die Ergebnismenge Ω ist die gleiche wie in Aufgabe 2.1.

Unsere Ereignismenge A umfasst nun alle Tupel aus Druckaufträgen, wobei kein Auftrag die Druckernummer 1 annemen darf:

$$A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \Omega \mid \omega_i \neq 1 \forall i \in \{1, \ldots, m\}\}$$

Jeder Druckauftrag hat nun also $n-1$ Möglichkeiten, einen Drucker zu wählen:

$$|A| = (n-1)^m$$

Die Wahrscheinlichkeit ist nun wie immer gute Möglichkeiten durch alle Möglichke iten:

$$P(A) = \frac{(n-1)^m}{n^m} = (1 - \frac{1}{n})^m$$

Lösung Aufgabe 2.3

Hier haben wir genau so viele Jobs wie Drucker. Ein Drucker soll keinen Job bekommen. dann bekommt genau ein Drucker 2 Jobs und der Rest jeweils einen.

Ω wie in a)

$A = \{(\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \Omega \mid \exists i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$, so dass $\omega_i = \omega_j$ und $\omega_i \neq \omega_k, \omega_k \neq \omega_l \ \forall k, l \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq k,\ j \neq k,\ k \neq l$

Es existieren also 2 Jobs, die den gleichen Drucker haben, und alle Jobs k und l, die zu den gleichen Jobs i und j verschieden sind, haben unterschiedli che Drucker. Wir haben

n	Möglichkeiten, den Drucker ohne Job zu wählen
$n-1$	Möglichkeiten, den Drucker mit 2 Jobs zu wählen
$\binom{n}{2}$	Möglichkeiten, die 2 zusammenliegenden Jobs auszuwählen
$(n-2)!$	Möglichkeiten, die restlichen Jobs auf die Drucker zu verteilen

$$\begin{aligned} |A| &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! \cdot \binom{n}{2} \\ &= n! \cdot \binom{n}{2} \\ P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} \cdot \frac{n! \cdot \binom{n}{2}}{n^n} \end{aligned}$$

Aufgabe 3

zu zeigen:

$$|P(A) - P(B)| \leq P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)$$

$$\begin{aligned}
|P(A) - P(B)| \quad = & \\
(1) \qquad & = |P(A \cap \Omega) - P(B \cap \Omega)| \\
(2) \qquad & = |P(A \cap (B^c \cup B)) - P(B \cap (A^c \cup A))| \\
(3) \qquad & = |P((A \cap B^c) \cup (A \cap B)) - P((B \cap A^c) \cup (B \cap A))| \\
(4) \qquad & = |P(A \cap B^c) + P(A \cap B) - P(B \cap A^c) - P(B \cap A)| \\
(5) \qquad & = |P(A \cap B^c) - P(A^c \cap B)| \qquad\qquad | \triangle - Ungl. |a-b| \leq |a| + |b| \\
(6) \qquad & \leq P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B)
\end{aligned}$$

Zu den einzelnen Schritten:

1. $A = A \cap \Omega$
2. $\Omega = A \cup A^C = B \cup B^C$
3. “Ausmultiplizieren”: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4. Vereinigung disjunkter Mengen = Addition der Wahrscheinlichkeiten
5. $P(A \cap B)$ fällt weg
6. Dreiecksungleichung. Da alle Werte > 0 sind, können die Betragsstriche weggelassen werden.

Aufgabe 4

$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ Wkt.raum; A,B $\in \mathfrak{A}$

4.1

z.z.: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$1 \underbrace{=}_{Def 2.10(i)} P(\Omega) = P(A \cup A^c) \underbrace{=}_{Def 2.10(ii)} P(A) + P(A^c)$$

4.2

z.z.: $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A\cup B\backslash A) \\ &= P(A) + P(B\backslash A) \\ &= P(A) + P(B\backslash(A\cap B)) \qquad |\,\text{d)} \\ &\overset{d)}{=} P(A) + P(B) - P(A\cap B) \end{aligned}$$

4.3

z.z.: $P(A) \leq P(B)$ f"ur $A \subset B$

$$P(B\backslash A) \underbrace{=}_{d)} P(B) - P(A) \geq 0$$

4.4

z.z.: $P(B) - P(A) = P(B\backslash A)$ f"ur $A \subset B$

$$P(B) \underbrace{=}_{A\subset B} P(A\cup(B\backslash A)) \underbrace{=}_{Def 2.10(ii)} P(A) + P(B\backslash A)$$

4.5

z.z.: $P(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$ f"ur $\{A_n\}$ absteigend
$\{A_n\}$ absteigend $\Rightarrow \{A_n^c\}$ aufsteigend

$$P(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n) = 1 - P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c) \underbrace{=}_{La 2.11 e)} 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n^c) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$$

Aufgabe 5

5.1

Vorher haben wir für jeden Job n Drucker auswählen können, also gab es n^mMöglichkeiten. Jetzt können wir für jeden Job nur noch $(n-k)^m$Drucker auswählen. Die Wahrscheinlichkeit beträgt also günstige Fälle durch mögliche Fälle:

$$p = \frac{(n-k)^m}{n^m}$$

Herleitung aus Aufgabe 2:

$A_i \hat{=}$ Genau Drucker Nr. $i\,(1 \leq i \leq n)$ bekommt keinen Auftrag

$$\begin{aligned}
P(A_i) &= \frac{(n-1)^m}{n^m} (\text{s. Aufgabe } 2) \\
P(A_i \cap A_j) &= \frac{(n-2)^m}{n^m} \quad i \neq j \\
&\vdots \\
P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}) &= \frac{(n-k)^m}{n^m} \quad i_j, 1 \leq j \leq k, 1 \leq i_j \leq n, i_j \text{ paarweise versch.}
\end{aligned}$$

Formale Darstellung:

Ω: Tupel aus Druckernummern, wobei die Position den Job angibt.

A: Tupel aus Druckern, wobei die Drucker Nr. 1 bis k nicht vorkommen dürfen.

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(\omega_1, \ldots, \omega_m) \in A^m | \omega_i \neq \omega_j \forall i \neq j\} \quad A = \{1, ..., n\} \\
|\Omega| &= n^m \\
A &= \{(\omega_1, \ldots, \omega_m) \in \Omega | \omega_i \notin \{1, ..., k\}\} \\
|A| &= (n-k)^m
\end{aligned}$$

5.2

Jeder Drucker erhält mindestens einen Auftrag
= genau 0 Drucker erhalten keinen Auftrag

In Aufgabe 5.1 haben wir die Wahrscheinlichkeit berechnet, dass **mindestens** k Drucker keinen Auftrag bekommen. Daher können wir nicht einfach 0 in Aufgabe a) einsetzen, sonst haben wir die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 0 Drucker keinen Auftrag bekommen.

Wir betrachten daher die Schnittmenge aus den Komplementen der Fälle, dass mindestens k Drucker keinen Auftrag bekommen:

= Schnittmenge von “maximal n-k Drucker bekommen einen Auftrag”:

$$A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c \quad = \quad (\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c$$

$$\begin{aligned}
& P(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_n^c) \\
= \; & P\left((A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)^c\right) \\
= \; & 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \\
= \; & 1 - P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \quad |\text{Siebformel} \\
= \; & 1 - \sum_{j=1}^{n} \left((-1)^{j+1} \sum_{i \le i_1 \le \ldots \le i_j \le n} P(\bigcap_{l=1}^{j} A_{i_l}) \right) \\
(1) \quad = \; & 1 - \left(\binom{n}{1} \frac{(n-1)^m}{n^m} - \binom{n}{2} \frac{(n-2)^m}{n^m} + \binom{n}{3} \frac{(n-3)^m}{n^m} - \ldots \binom{n}{n} \frac{(n-n)^m}{n^m} \right) \\
= \; & 1 - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \underbrace{\frac{(n-k)^m}{n^m}}_{Teil\, a)} \\
= \; & 1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} \frac{(n-k)^m}{n^m}
\end{aligned}$$

zu (1): Wir haben z.B. $\binom{n}{3}$ Möglichkeiten, 3 Drucker auszuwählen, auf denen auf keinen Fall etwas gedruckt wird. Von den anderen wissen wir nicht, ob auf ihnen gedruckt wird oder nicht.

5.2 Alternative (nicht überprüft)

Wir verteilen m Aufträge surjektiv auf n Drucker. Wir suchen also die Anzahl der n-Partitionen eine m-Menge. Dies sind (siehe Vorlesung Diskrete Strukturen) die Stirling-Zahlen 2. Art:

$$p = \frac{S_{n,m}}{n^m}$$

5.3

genau k Drucker bekommen keinen Auftrag
= n-k Drucker bekommen mindestens einen Auftrag

$\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, k Drucker, die keinen Auftrag erhalten, zu wählen

$X =$k Drucker bekommen keinen Auftrag

$$\begin{aligned} P(X) &= \overbrace{\frac{(n-k)^m}{n^m}}^{(a)} \cdot \overbrace{\binom{n}{k}}^{(b)} \overbrace{\left(\sum_{j=1}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{(n-k-j)^m}{(n-k)^m} \right)}^{(c)} \\ &= \binom{n}{k} \sum_{j=1}^{n-k} (-1)^j \binom{n-k}{j} \frac{(n-k-j)^m}{n^m} \end{aligned}$$

(a) Wahrscheinlichkeit, dass mindestens k (von n) Drucker ohne Auftrag sind

(b) Anzahl der Möglichkeiten, k Drucker aus n auszuwählen (also die, ohne Jobs)

(c) Wahrscheinlichkeit, dass von (n-k) Druckern jeder mindestens einen Auftrag erhält. (für die restlichen Drucker)

5.2 Alternative (nicht überprüft)

Wir verteilen surjektiv m jobs auf (n-k) Drucker:

$$p(X) = \frac{S_{n-k,m}}{m^n}$$

Aufgabe 6

$$
\begin{aligned}
P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) &= 1 - P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c \\
(de Morgan) &= 1 - P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i^c) \\
(Bonferroni - Ungl.) &\geq 1 - \sum_{i=1}^{n} P(A_i^c) \\
&= 1 - \sum_{i=1}^{n} (1 - P(A_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - (n-1)
\end{aligned}
$$

Diese Aufgabe kann auch per Induktion gezeigt werden.

Aufgabe 7

7a

$\Omega, I \neq \emptyset, \{\mathfrak{A}_i\}_{i \in I}$ Familie von σ -Algebren "uber Ω
zu zeigen: $\mathfrak{A} := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ ist σ-Algebra "uber Ω

(der Schnitt von beliebigen Algebren ist wieder eine Algebra.)

Nach Def. 2.6 ($\sigma-$Algebra) müssen folgende 3 Punkte erfüllt sein:

$\Omega \in \mathfrak{A}$: Die $\sigma-$Algebra muss die Ergebnismenge Ω enthalten.

$A \in \mathfrak{A} \Rightarrow A^C \in \mathfrak{A}$: Wenn ein Ereignis in der Algebra ist, ist auch das Komplement des Ereignisses in der Algebra.

$A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$: Die Vereinigung beliebiger Ereignisse muss auch wieder in der Algebra sein.

---

1. zeige Punkt 1.:

$$\begin{aligned} z.Z. \qquad & \Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i \\ & ------- \\ & \forall i \in I : \Omega \in \mathfrak{A}_i \\ \Rightarrow \quad & \Omega \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A} \end{aligned}$$

   Omega gibt es nur einmal. Und genau dieses Omega ist in jeder Algebra enthalten. Also ist Omega auch im Schnitt aller Algebren enthalten. qed.

2. zeige Punkt 2.:

$$\begin{aligned} z.Z.: \qquad & A \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i \Rightarrow A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A} \\ & ------------ \\ & A \in \mathfrak{A} \Leftrightarrow A \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i \\ \Rightarrow \quad & \forall i : A \in \mathfrak{A}_i \Rightarrow \forall i : A_i^c \in \mathfrak{A}_i \\ \Rightarrow \quad & A^c \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A} \end{aligned}$$

   In Worten:
   Wenn A im Schnitt der Algebren ist, ist A in allen Algebren enthalten. Dann ist auch das Komplement von A in allen Algebren enthalten. Damit ist A auch im Schnitt der Algebren enthalten. qed.

3. z.Z.: $A_n \in \mathfrak{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$
   Alle Ereignisse A_k sind in unserer Schnittalgebra enthalten. Daher sind natürlich auch alle Schnitt-Ereignisse in alle Algebren enthalten. Damit sind (nach Satz 2.6.iii) auch die Vereinigung beliebiger A_k- Ereignisse in der Algebra enthalten.

$$\begin{aligned}
z.Z.: \qquad & A_n \in \mathfrak{A}, n \in N \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A} \\
& ------------------- \\
& \forall k \in N_k \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad (Voraussetzung) \\
\Rightarrow \quad & \forall i \in I, k \in N : A_k \in \mathfrak{A}_i \\
\Rightarrow \quad & \forall i \in I : \bigcup_{k \in N} A_k \in \mathfrak{A}_i \\
\Rightarrow \quad & \bigcup_{k \in n} A_k \in \bigcap_{i \in I} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}
\end{aligned}$$

7b.

Ist $B := \bigcup_{i \in I} \mathfrak{A}_i$ stets eine σ-Algebra?

(ist die Vereinigung beliebiger Algebren wieder eine $\sigma-$Algebra?)

σ-Algebren enthalten alle Ereignisse, die durch Verknüpfung mit ”nicht”, ”und”, ”oder” entstehen.

Antwort: Nein. Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \{1,2,3\} \\
&\mathfrak{A}_1 = \{\emptyset, \{1\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\} \\
&\mathfrak{A}_2 = \{\emptyset, \{2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\} \\
&\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2 = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}
\end{aligned}$$

ist keine σ-Algebra, da $\{1,3\} \cap \{2,3\} \notin \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$ oder auch $\{1\} \cup \{2\} \notin \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{A}_2$

Aufgabe 8

D$\widehat{=}$ defekter Chip
A,B,C $\widehat{=}$ Chip kommt aus Fabrik A,B,C

$$\begin{aligned} P(A) &= 0,35; \\ P(B) &= 0,15; \\ P(C) &= 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(D^c|A) &= 0,75 \Rightarrow P(D|A) = 0,25 \\ P(D^c|B) &= 0,95 \Rightarrow P(D|B) = 0,05 \\ P(D^c|C) &= 0,85 \Rightarrow P(D|C) = 0,15 \\ P(D) &\underbrace{=}_{tot.W'keit} P(D|A)P(A) + P(D|B)P(B) + P(D|C)P(C) \\ &= 0,25 \cdot 0,35 + 0,05 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,5 = 0,17 \end{aligned}$$

beliebiger Chip mit

$$P(D) = 0,17$$

defekt.

Mit welcher W'keit kommt ein defekter Chip aus Fabrik C?

Wir benutzen nur folgende Formel (in ihren Variationen):

$$P(C \cap D) = P(C|D) \cdot P(D)$$

$$P(C|D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D \cap C)}{P(D)} = \frac{P(D|C) \cdot P(C)}{P(D)} = \frac{0,15 \cdot 0,5}{0,17} \approx 0,44$$

Aufgabe 9

$$\begin{aligned}
S0 &\mathrel{\widehat{=}} 0\,gesendet \\
R0 &\mathrel{\widehat{=}} 0\,empfangen \\
S1 = S0^c &\mathrel{\widehat{=}} 1\,gesendet \\
R1 = R0^c &\mathrel{\widehat{=}} 1\,empfangen
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(S1) &= p \\
P(S0) &= 1-p \\
P(R0|S0) &= 1-\varepsilon \\
P(R1|S1) &= 1-\varepsilon \\
P(R1|S0) &= \varepsilon \\
P(R0|S1) &= \varepsilon
\end{aligned}$$

ε = falsch empfangen

$1-\varepsilon$ = korrekt empfangen

9.a

Wahrscheinlichkeit, dass eine 0 gesendet wurde wenn eine 0 empfangen wurde:

nach den Formeln

$$P(C \cap D) = P(C|D) \cdot P(D)$$

$$P(X) = P(X|A) \cdot P(A) + P(X|B) \cdot P(B)$$

(gilt genau dann, wenn A,B eine Partition von X ist).

folgt:

$$P(S0|R0) = \frac{P(R0 \cap S0)}{P(R0)} \overset{(*)}{=} \frac{P(R0|S0)P(S0)}{P(R0|S0)P(S0) + P(R0|S1)P(S1)} = \frac{(1-\varepsilon)(1-p)}{(1-\varepsilon)(1-p) + p\varepsilon}$$

(Beachte: Bei (*) wurde Zähler und Nenner getrennt umgeformt.

9.b

Wahrscheinlichkeit, dass eine 1 gesendet wurde, wenn eine 0 empfangen wurde:

$$P(S1|R0) = \frac{P(R0 \cap S1)}{P(R0)} = \frac{P(R0|S1)P(S1)}{P(R0)} = \frac{\varepsilon p}{(1-\varepsilon)(1-p) + p\varepsilon}$$

9.c

Sei p=0,5. Für welches ε gilt $P(R1|S1) = P(R1|S0)$?

$$\begin{aligned} P(R1|S1) &= P(R1|S0) \\ 1-\varepsilon &= \varepsilon \\ \varepsilon &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

In diesem Fall lassen sich keine Daten "uber die Verbindung "ubertragen, da man bei einer empfangenen 1 keinerlei Kenntnis über das gesendete Zeichen hat.

Aufgabe 10

$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_4) \in \{1,0\}^4\}$ $\quad \omega_i = 1$ bedeutet, dass Router i intakt ist.

$A_i = \{\omega \in \Omega | \omega_i = 1\}$ $\quad$ (alle Konfigurationen, in denen Router i intakt ist)

$P(A_i) = p_i$

$I \widehat{=}$ Verbindung möglich

Merke: $\cap =$und, $\cup =$oder

Beim "oder" müssen die Mengen disjunkt sein. Beim "und" müssen sie stochastisch unabhängig sien. Unsere Mengen sind stochastisch unabhängig. Daher wenden wir mehrmals die De Morgan - Formel an:

$$P(A \cup B) = 1 - (P(A \cup B)^c) = 1 - P(A^c \cap B^c)$$

Also, los geht's:

$$\begin{aligned}
P(I) &= P(I|A_1)P(A_1) + P(I|A_1^c)P(A_1^c) \\
P(I|A_1) &= P(A_3 \cup A_4) \\
P(I|A_1^c) &= P(A_2 \cap (A_3 \cup A_4)) = p_2 \cdot P(A_3 \cup A_4) \\
P(A_3 \cup A_4) &= 1 - P((A_3 \cup A_4)^c) \\
&= 1 - P(A_3^c \cap A_4^c) \\
&= 1 - P(A_3^c) \cdot P(A_4^c) \\
&= 1 - (1 - p_3) \cdot (1 - p_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(I) &= p_1 \cdot (1 - (1 - p_3) \cdot (1 - p_4)) + p_2 \cdot (1 - (1 - p_3) \cdot (1 - p_4)) \cdot (1 - p_1) \\
&= p_1 \cdot (1 - (1 - p_3 - p_4 + p_3 p_4)) + p_2 \cdot (1 - (1 - p_3 - p_4 + p_3 p_4)) \cdot (1 - p_1) \\
&= p_1 \cdot (p_3 + p_4 - p_3 p_4)) + p_2 \cdot (p_3 + p_4 - p_3 p_4)) \cdot (1 - p_1) \\
&= p_1 p_3 + p_1 p_4 - p_1 p_3 p_4 + p_2 p_3 + p_2 p_4 - p_2 p_3 p_4 - p_1 p_2 p_3 - p_1 p_2 p_4 + p_1 p_2 p_3 p_4 \\
& \quad \mathit{Phew.}
\end{aligned}$$

Aufgabe 11

Lösungsidee:

Wir betrachten eine unendliche 0-1-Folge. Wir wollen nun beweisen, dass jede beliebige Folge der Länge l unendlich oft auftritt.

Ereignis A = unsere Folge tritt unendlich oft auf.

Hierfür betrachten wir Ereignisse A_n (= unsere Folge tritt ab der Stelle n auf). Wir betrachten jetzt nur die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A_1, A_l, A_{2l}, \ldots$ um Überschneidungen der Ereignisse auszuschließen (damit die Ereignisse stochastisch unabhängig sind). Wenn diese Wahrscheinlichkeit bereits 1 ist, ist es die Wahrscheinlichkeit von A erst recht.

Diese Wahrscheinlichkeit ist 1, da es die unendliche Summe von $\frac{1}{2^l}$ ist. (binäres Wort der Länge l). Nach Borel-Cantelli ist die Wahrscheinlichkeit 1, wenn die Summe der Wahrscheinlichkeiten gegen ∞ läuft (limes superior).

Formale Darstellung:

$$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mid x_i \in \{0,1\}\}$$
$$m = (m_1, m_2, \ldots, m_l)$$

beliebige Sequenz der Länge $l \in \mathbb{N}$

$A_n \widehat{=}$ Sequenz m fällt ab dem n-ten Wurf.

$$A_n = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{N}, i \leq l, \omega_{n+i-1} = m_i\}$$

ist W'raum mit geeignetem $\mathfrak{A}$

$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (also A_n und A_{n+1}) sind nicht s.u., aber $\{A_{n\cdot l}\}_{n\in\mathbb{N}}$ s.u.

$$\begin{aligned} P(A_n) &= (\frac{1}{2})^l \\ \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) &= \infty \underbrace{\Rightarrow}_{Borel-Cantelli} P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Die Sequenz tritt mit W'keit 1 ∞ oft auf (Aufgabenteil b)

$\Rightarrow$ a) Folgt aus b): Die Sequenz trifft mit der W'keit 1 überhaupt in der Folge auf.

$A_{(m)}$	Sequenz (m) tritt auf $\Rightarrow P(A_{(m)}) = 1$
A	Alle Sequenzen treten auf: $A = \bigcap_{m\in M} A_{(m)}$ mit M abzählbar

0

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P\left(\bigcap_{m\in M} A_{(m)}\right) \\
&= 1-P(A^c) \\
&= 1-P((\bigcap_{m\in M} A_{(m)})^c) \\
&= 1-P(\bigcup_{m\in M} A^c_{(m)}) \\
&\geq 1-\underbrace{\sum_{m\in M}\underbrace{P(A^c_{(m)})}_{=0}}_{=0} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Alle treten auf $\widehat{=}$ keine tritt nicht auf

Aufgabe 13

13.a

$n =$ Anzahl der notwendigen Versuche für eine erfolgreiche Übertragung

$$\begin{aligned} P_1 &= p \\ P_2 &= (1-p)p \\ P_3 &= (1-p)^2 p \\ P_n &= (1-p)^{n-1} p \end{aligned}$$

⇒X~Geo(n-1), X hat den Träger $T = \mathbb{N}$.
W'keit für keine Wiederholung:

$$P_1 = p$$

W'keit für genau 2 Fehlübertragungen:

$$P_3 = (1-p)^2 p$$

Wie groß muss p mindestens sein, so dass mit Wahrscheinlichkeit 0,99 höchstens 4 Übertragungen des Paketes nötig sind?

Beachte hierbei die Formel:

$$\sum_{i=0}^{k} p^i = \frac{1-p^{i+1}}{1-p}$$

$$\begin{aligned} 0,99 &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \\ &= p + (1-p)p + (1-p)^2 p + (1-p)^3 p \\ &= p \sum_{i=0}^{3} (1-p)^i \\ &= p \frac{1-(1-p)^4}{1-(1-p)} = 1-(1-p)^4 \\ 0,01 &= (1-p)^4 \\ {}^4\sqrt{0,01} &= 1-p \\ 1 -{}^4\sqrt{0,01} &= p \end{aligned}$$