Exercise 1. Bei einem Kartenspiel mit 52 Karten werden an jeden der vier Spieler A, B, C und D 13 Karten ausgegeben. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß :

(1) Spieler A alle Karten der Farbe Herz, B alle der Farbe Karo, C alle der Farbe Pik und D alle der Farbe Kreuz bekommt.
(2) Spieler A genau ein Ass bekommt,
(3) Spieler A weniger als fünf schwarze Karten bekommt.

Lösung :

Identifiziere die Karten mit der Menge $M_K = \{1, \ldots, 52\}$

(1) Die Ergebnismenge Ω_1 ist gegeben durch alle möglichen verschiedenen Verteilungen der 52 Karten :

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{52}) \mid \omega_i \neq \omega_j \, fuer \, i \neq j, \omega_i \in M_K\}$$

Ordne den verschiedenen Farben die folgende Teilmengen zu :

Herz $M_{\heartsuit} = \{1, \ldots, 13\}$
Karo $M_{\diamondsuit} = \{14, \ldots, 26\}$
Kreuz $M_{\clubsuit} = \{27, \ldots, 39\}$
Pik $M_{\spadesuit} = \{40, \ldots, 52\}$

Es kann o.B.d.A. davon ausgegangen werden, daß Spieler A die ersten 13 Karten erhält, Spieler B die 13 folgenden, und so weiter.

Das Ereignis

$$\mathfrak{G} = \{\omega \in \Omega | \, \{\omega_1, \ldots, \omega_{13}\} = M_{\heartsuit}, \{\omega_{14}, \ldots, \omega_{26}\} = M_{\diamondsuit}, \{\omega_{27}, \ldots, \omega_{39}\} = M_{\clubsuit}, \{\omega_{40}, \ldots, \omega_{52}\} = M_{\spadesuit}\}$$

beschreibt also gerade, daß jeder Spieler die Karten einer Farbe erhält.

Damit gilt

$$P(\mathfrak{G}) = \frac{|\mathfrak{G}|}{|\Omega|} = \frac{(13!)^4}{52!}$$

(2) Diesmal betrachte nur die vorsortierten Kartenfolgen als Ergebnismenge, die Spieler A erhalten kann :

$$\Omega_2 = \left\{(\omega_1, \ldots, \omega_{13}) \in M_K^{13} | \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_{13}\right\}$$

$$|\Omega_2| = \binom{52}{13}$$

Die Menge der Asse sei nun $M_{Ass} = \{1, 2, 3, 4\}$. Das Ereignis $\mathfrak{G}$, das beschreibt, daß Spieler A genau ein Ass bekommt, ist nun gegeben durch :

$$\mathfrak{G} = \{\omega \in \Omega_2 | \omega_1 \in M_{Ass}, \omega_2 \notin M_{Ass}\}$$

Für ω_2 bis ω_{13} kann eine beliebige Karte mit Ausnahme eines Asses gewählt werden, es gilt also :

$$|\mathfrak{G}| = |M_{Ass}| * \binom{|M_K \setminus M_{Ass}|}{12} = 4 * \binom{48}{12}$$

$$P(\mathfrak{G}) = \frac{|\mathfrak{G}|}{|\Omega_2|} = \frac{4 * \binom{48}{12}}{\binom{52}{13}}$$

(3) Betrachte wiederum nur die vorsortierten Kartenfolgen als Ergebnismenge, die Spieler A erhalten kann :

$$\Omega_3 = \left\{(\omega_1, \ldots, \omega_{13}) \in M_K^{13} | \omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_{13}\right\}$$

Sei die Menger der schwarzen Karten $M_{\spadesuit\clubsuit} = \{1, \ldots, 26\}$. Das Ereignis $\mathfrak{G}_i$ das Spieler A genau i schwarze Karten bekommt wird beschrieben durch

$$\mathfrak{G}_i = \{\omega \in \Omega_3 | \omega_j \in M_{\spadesuit\clubsuit}\, fuer\, 1 \leq j \leq i\}$$

Man wählt also i Karten aus $M_{\spadesuit\clubsuit}$ und $13 - i$ aus den roten Karten aus.

$$|\mathfrak{G}_i| = \binom{26}{i} * \binom{26}{13-i}$$

Sei $\mathfrak{G}$,das Ereignis, daß weniger als fünf schwarze Karten von A gezogen werden, also

$$\mathfrak{G} = \biguplus_{i=0}^{4} A_i$$

$$|\mathfrak{G}| = \sum_{i=0}^{4} |\mathfrak{G}_i| = \sum_{i=0}^{4} \binom{26}{i}\binom{26}{13-i}$$

Die gesucht Wahrscheinlichkeit ist also

$$P(\mathfrak{G}) = \frac{|\mathfrak{G}|}{|\Omega_3|}$$

Exercise 2. In einem Netzwerk befinden sich n Drucker, die durchnummeriert sind von 1 bis n . m Druckaufträge mit den Nummer 1 bis m werden zufällig gemäß einer diskreten Gleichverteilung an die Drucker verteilt.

(1) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Drucker 1 den Auftrag mit der Nummer 1?
(2) Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt Drucker 1 keinen Auftrag ?
(3) Es kommen nun $m = n$ Druckaufträge an. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt genau ein Drucker keinen Auftrag ?

Lösung :

Ordne jedem Druckauftrag den Drucker zu, der ihn ausführt. Dann ist die Ergebnismenge

$$\Omega = \{(\omega_1, \ldots, \omega_m)\, | \omega_i \in \{1, \ldots, n\}\} = \{1, \ldots, n\}^m$$

$$|\Omega| = n^m$$

(1) Das Ereignis $\mathfrak{G}$, Drucker 1 bekommt den Auftrag 1 , ist also folgende Teilmenge von Ω :

$$\mathfrak{G} = \{\omega \in \Omega | \omega_1 = 1\}$$

$$|\mathfrak{G}| = n^{m-1}$$

$$P(\mathfrak{G}) = \frac{|\mathfrak{G}|}{|\Omega|} = \frac{n^{m-1}}{n^m} = \frac{1}{n}$$

(2) Bekommt Drucker 1 keinen Auftrag, so gehen die Druckaufträge an die verbliebenen $n-1$ Drucker, also ist

$$\mathfrak{G} = \{\omega \in \Omega | \omega_i \in \{2, \ldots, n\}\}$$

das Ereignis, daß Drucker 1 keinen Auftrag zugeteilt wird.

$$|\mathfrak{G}| = (n-1)^m$$

$$P(\mathfrak{G}) = \frac{|\mathfrak{G}|}{|\Omega|} = \frac{(n-1)^m}{n^m} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

(3) Da $n = m$ sind die Ereignisse "genau ein Drucker bekommt keinen Auftrag" und $\mathfrak{G}$ "genau ein Drucker bekommt zwei Aufträge" äquivalent.

$$\mathfrak{G} = \{\omega \in \Omega | \omega_i = \omega_j \, fuer \, ein \, i \neq j \, und \, \omega_k \neq \omega_i \, fuer \, k \notin \{i, j\}\}$$

Die Mächtigkeit von $\mathfrak{G}$ ergibt sich wie folgt : Es gibt n Möglichkeiten, den Drucker auszuwählen, der keinen Auftrag erhält, und $n-1$ Alternativen für den Drucker, der zwei Aufträge erhält. Dann müssen aus den n Aufträgen 2 gewählt werden, die dem gleichen Drucker zugewiesen werden sollen, und es bleiben $(n-2)!$ Permutationen der übrigen Aufträge, die noch an die verbliebenen $n-2$ Drucker verteilt werden müssen.

$$|\mathfrak{G}| = n * (n-1) * \binom{n}{2} * (n-2)! = n! \binom{n}{2}$$

Als Ergebnis bleibt :

$$P(\mathfrak{G}) = \frac{|\mathfrak{G}|}{|\Omega|} = \frac{n! \binom{n}{2}}{n^n}$$

Exercise 3. (Klausuraufgabe)$A, B \in \mathfrak{A}$ seien Ereignisse in einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ .Zeigen sie :

$$|P(A) - P(B)| \leq P\left(A \cap B^C\right) + P\left(A^C \cap B\right)$$

Lösung :

$$\begin{gathered}
|P(A) - P(B)| = \\
|P(A \cap \Omega) - P(B \cap \Omega)| = \\
\left|P\left(A \cap \left(B \cup B^C\right)\right) - P\left(B \cap \left(A \cup A^C\right)\right)\right| = \\
\left|P\left((A \cap B) \cup \left(A \cap B^C\right)\right) - P\left((B \cap A) \cup \left(B \cap A^C\right)\right)\right| = \\
\left|P(A \cap B) + P\left(A \cap B^C\right) - P(B \cap A) - P\left(B \cap A^C\right)\right| = \\
\left|P\left(A \cap B^C\right) - P\left(B \cap A^C\right)\right| \leq \\
P\left(A \cap B^C\right) + P(A)
\end{gathered}$$

Exercise 4. Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathfrak{A}$ .Zeigen sie :

(1) $P\left(A^C\right) = 1 - P(A)$
(2) $\mathrm{P}(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(3) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
(4) $A \subset B \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$
(5) $\{A_n\}$ *absteigend* $\Rightarrow P(\lim_{n\to\infty}(A_n)) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

Lösung:

(1)

$$\begin{array}{rc} & P\left(A^C\right) = 1 - P\left(A\right) \\ \Leftrightarrow & P\left(A^C\right) = P\left(\Omega\right) - P\left(A\right) \\ \Leftrightarrow & P\left(A^C\right) + P\left(A\right) = P\left(\Omega\right) \\ \Leftrightarrow & P\left(A^C \cup A\right) = P\left(\Omega\right) \\ \Leftrightarrow & P\left(\Omega\right) = P\left(\Omega\right) \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rc} & \mathrm{P}(A \cup B) \\ = & P\left((A \cap B) \cup \left(A \cap B^C\right) \cup \left(B \cap A^C\right)\right) \\ = & P\left(A \cap B\right) + P\left(A \cap B^C\right) + P\left(B \cap A^C\right) \\ = & \left(P\left(A \cap B\right) + P\left(A \cap B^C\right)\right) + \left(P\left(B \cap A^C\right) + P\left(A \cap B\right)\right) - P\left(A \cap B\right) \\ = & P\left((A \cap B) \cup (A \cap B^c)\right) + P\left(\left(B \cap A^C\right) \cup (A \cap B)\right) - P\left(A \cap B\right) \\ = & P\left(A\right) + P\left(B\right) - P\left(A \cap B\right) \end{array}$$

(3) $A \subset B \Rightarrow P\left(A\right) \leq P\left(B\right)$

Da $A \subset B$ existiert ein $C \subseteq \Omega, C \neq \emptyset$ mit $A \cup C = B$ und $P\left(C\right) \geq 0$. Damit gilt :

$$P\left(B\right) = P\left(A \cup C\right) = P\left(A\right) + P\left(C\right) \geq P\left(A\right)$$

(4) $A \subset B \Rightarrow P\left(B \setminus A\right) = P\left(B\right) - P\left(A\right)$

$$\begin{array}{rc} & P\left(B \setminus A\right) \\ = & P\left(B \cap A^C\right) \\ = & P\left(\left(B^C \cup A\right)^C\right) \\ = & 1 - P\left(B^C \cup A\right) \\ = & 1 - \left(P\left(B^C\right) + P\left(A\right)\right) \\ = & 1 - \left((1 - P\left(B\right)) + P\left(A\right)\right) \\ = & P\left(B\right) - P\left(A\right) \end{array}$$

(5) Siehe Skript.