Aufgaben (Klausurstil)

(1) 3) Die Zufallsgrößen X und Y, def. auf einem gemeinsamen WR $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, seien diskret verteilt mit Werten in $\{-1,1\}$ und gemeinsamer Zähldichte

$$\alpha := P(X=-1, Y=-1),$$
$$\beta := P(X=-1, Y=1),$$
$$\gamma := P(X=1, Y=-1),$$
$$\delta := P(X=1, Y=+1).$$

Weiter gelte $EX = EY = 0$.

a) Zeigen Sie (i) $\alpha = \delta$ und (ii) $\beta = \gamma$.

b) Stellen Sie (i) $\operatorname{Var} X$, (ii) $\operatorname{Var} Y$ (iii) $\operatorname{Kov}(X,Y)$ als Funktion von $p := 2\delta$ dar.

Lösung:

a) $P(X=-1) = \alpha + \beta$, $P(X=1) = \gamma + \delta$, also $EX = -\alpha - \beta + \gamma + \delta \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \beta = \gamma + \delta \qquad (1)$$

$P(Y=-1) = \alpha + \gamma$, $P(Y=1) = \beta + \delta$, also $EY = -\alpha - \gamma + \beta + \delta \overset{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad \alpha + \gamma = \beta + \delta \qquad (2)$$

Aus (1) - (2) folgt $\beta - \gamma = \gamma - \beta \Rightarrow 2\beta = 2\gamma \Rightarrow \boxed{\beta = \gamma}$, d.h. (ii).

Eingesetzt in (1) ergibt dies $\alpha + \beta = \beta + \delta \Rightarrow \boxed{\alpha = \delta}$, d.h. (i).

b) (i) $E[X^2] = (-1)^2(\alpha+\beta) + 1^2(\gamma+\delta) = \alpha+\beta+\gamma+\delta = 1$,

$$\Rightarrow \operatorname{Var} X = EX^2 - (EX)^2 = 1 - 0 = 1$$

(ii) $E[Y^2] = \ldots = \alpha+\beta+\gamma+\delta = 1 \quad \Rightarrow \operatorname{Var} Y = 1.$

(iii) $E(XY) = (-1)(\beta+\gamma) + 1\cdot(\alpha+\delta) \underset{a)(i)(ii)}{=} 2\delta - 2\beta$

Wegen $1 = \alpha+\beta+\gamma+\delta \underset{a)(i)(ii)}{=} 2\beta + 2\delta$ folgt $2\beta = 1 - 2\delta$ $(*)$.

$\Rightarrow \operatorname{Kov}(X,Y) = E(XY) - (EX)(EY) = 2\delta - 2\beta \overset{\circledast}{=} 2\delta - (1-2\delta) = 4\delta - 1$

$= 2 \cdot p - 1.$

34)

2 Vor einem Postschalter hat sich eine Warteschlange bestehend aus n Personen gebildet, $n \in \mathbb{N}$. Unter diesen befinden sich Herr Arnold und Frau Berthold. Weiter werde angenommen, dass jede Anordnung der n Personen gleichwahrscheinlich sei.

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrsch.raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ für dieses Zufallsexp. an.

b) Sei A_r das Ereignis, dass sich genau r Personen, $r \in \mathbb{N}$, zwischen Herrn Arnold u. Frau Berthold befinden.

(i) Welche Werte kann r annehmen?

(ii) Stellen Sie für diese Werte A_r als Teilmenge von Ω dar.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(A_r)$ aus Teil b)(ii).

Lösung:

a) $\Omega = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) : \omega_i \in \{1, \dots, n\},\ \omega_i \neq \omega_j \text{ für } i \neq j\}$ (Menge der Permutationen der Zahlen $\{1, \dots, n\}$),

$\mathfrak{A} = \mathcal{P}ot(\Omega)$,

$P(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n!} \quad \forall\, \omega \in \Omega$ mit der Interpretation:

$n \mathrel{\hat{=}}$ Herr Arnold, $n-1 \mathrel{\hat{=}}$ Frau Berthold, die anderen Wartenden haben die Nummern $1, \dots, n-2$,

$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ mit $\omega_i = k$: Person Nr. k steht an Pos. i in der Warteschlange.

b) (i) $r \in \{0, \dots, n-2\}$.

(ii) $A_r = \{\omega \in \Omega : \omega_k = n$ und $\omega_{k+r+1} = n-1$ für ein $k \in \{1, \dots, n-r-1\}$

<u>oder</u> $\omega_{k'} = n-1$ und $\omega_{k'+r+1} = n$ für ein $k' \in \{1, \dots, n-r-1\}\}$.

c) $A_r = \sum_{k=1}^{n-r-1}{}' \{\omega \in \Omega : \omega_k = n, \omega_{k+r+1} = n-1\} + \sum_{k'=1}^{n-r-1}{}' \{\omega \in \Omega : \omega_{k'} = n-1, \omega_{k'+r+1} = n\}$.

Wegen $|\{\omega \in \Omega : \omega_k = n, \omega_{k+r+1} = n-1\}| = (n-2)!$ ist $|A_r| = 2(n-r-1)(n-2)!$

$$\Rightarrow P(A_r) = \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)} \quad \text{für } r \in \{0, \ldots, n-2\}.$$

35)

(3) Beweisen Sie den folgenden Spezialfall der Markoff-Ungleichung: X sei eine stetige Zufallsgröße mit Dichtefunktion f, die $f(x) = 0 \ \forall x < 0$ erfüllt. Dann gilt:

$$P(X \geq a) \leq \frac{1}{a^k} E[X^k] \quad \forall a > 0, k \in \mathbb{N},$$

falls das k-te zentrale Moment $E[X^k]$ existiert.

Lösung:

$$E[X^k] = \int_{\mathbb{R}} x^k f(x)\,dx = \int_0^\infty x^k f(x)\,dx = \int_0^a x^k f(x)\,dx + \int_a^\infty x^k f(x)\,dx$$

$$\geq \int_a^\infty x^k f(x)\,dx \geq a^k \int_a^\infty f(x)\,dx = a^k \cdot P(X \geq a) \quad \forall a > 0, k \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow P(X \geq a) \leq \frac{1}{a^k} \cdot E[X^k] \quad \forall a > 0, k \in \mathbb{N}.$$

A29

(4) Gegeben sei eine $N(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsgröße X auf einem WR $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$. Zeigen Sie, dass $Y := \exp(X)$ stetig verteilt ist, und bestimmen Sie eine Dichtefunktion der Verteilung P^Y.

Lösung: $\exp(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ bijektiv, so dass mit der Vorl. bzw. Übung 8, A. 37 folgt:

$$f_Y(y) = \frac{f_X(\ln(y))}{|\exp(\ln(y))|} = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(\ln(y) - \mu)^2}{\sigma^2}\right), \quad y > 0.$$

Für $y \leq 0$ ist $F_Y(y) = P(Y \leq y) = 0$, und damit auch

$f_Y(y) = 0$ für $y \leq 0$.

A 36)

(5) Die k-te von $n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$, n gerade) Urnen enthält k schwarze und $n-k$ weiße Kugeln ($k \in \{1, \dots, n\}$). Eine der Urnen wird zufällig gewählt und eine Kugel daraus gezogen. Die gezogene Kugel ist schwarz.

a) Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass die gewählte Urne vor dem Ziehen mindestens so viele schwarze Kugeln enthält wie weiße?

b) Die gezogene schwarze Kugel wird in die Urne zurückgelegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei erneutem Ziehen aus dieser Urne wieder eine schwarze Kugel zu erhalten?

Hinweis: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

a) $U_k \hat{=}$ Urne k wird ausgewählt, $S \hat{=}$ die gezogene Kugel ist schwarz.

„Urne k enthält vor dem Ziehen mindestens so viele schwarze wie weiße Kugeln"
$\Leftrightarrow$ $k \geq n-k \Leftrightarrow k \geq \frac{n}{2}$.

$$P(U_{\frac{n}{2}} + U_{\frac{n}{2}+1} + \dots + U_n | S) = \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} P(U_k | S) = \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} \frac{P(S|U_k) \cdot P(U_k)}{P(S)}$$

$$= \frac{1}{P(S)} \cdot \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n} \frac{k}{n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$P(S) = \sum_{i=1}^{n} P(S|U_i) P(U_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\Rightarrow P(U_{\frac{n}{2}} + \dots + U_n | S) = \frac{2n}{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} k \right)$$

$$= \frac{2}{(n+1)n} \cdot \left(\frac{(n+1)n}{2} - \frac{(\frac{n}{2}-1)\frac{n}{2}}{2} \right) = \frac{1}{(n+1)n} \left(n^2 + n - \frac{n^2}{4} + \frac{n}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)n} \left(\frac{3}{4} n^2 + \frac{3}{2} n \right) = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{3}{4} n + \frac{3}{2} \right) = \frac{3n+6}{4(n+1)}$$

b) $S_1 \hat{=}$ schwarze Kugel im 1. Zug, $S_2 \hat{=}$ schw. Kugel im 2. Zug.

gesucht: $P(S_2 | S_1) = \dfrac{P(S_2 \cap S_1)}{P(S_1)}$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n} P(S_2 \cap S_1 | U_k) \cdot P(U_k)}{P(S_1)} = \frac{2n}{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \frac{1}{n}$$

$$= \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6(n+1)n^2} = \frac{2n+1}{3n}.$$

37) 6) Gegeben sei ein WR $(\Omega, \mathcal{D}, P)$. Zeigen Sie:

$$\sigma(\{N \in \mathcal{D} : P(N) = 0\}) = \{N \in \mathcal{D} : P(N) = 0 \text{ oder } P(N) = 1\}.$$

Lösung: $\mathcal{E} := \{N \in \mathcal{D} : P(N) = 0\}$

zeige zunächst: $\underbrace{\{N \in \mathcal{D} : P(N) = 0 \text{ oder } P(N) = 1\}}_{=: \mathcal{C}}$ ist σ-Algebra über Ω.

dazu: (i) $P(\Omega = 1) \Rightarrow \Omega \in \mathcal{C}$

(ii) Ist $N \in \mathcal{C}$, so ist entweder $P(\overline{N^c}) = 0$ oder $P(N) = 0 \Rightarrow \overline{N} \in \mathcal{C}$

(iii) $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{C} \Rightarrow P(A_n) \in \{0,1\} \ \forall n \in \mathbb{N}$

1. Fall: $P(A_n) = 0 \ \forall n \Rightarrow 0 \le P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \le \sum_{n \in \mathbb{N}} P(A_n) = 0$

$$\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{C}.$$

2. Fall: $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $P(A_{n_0}) = 1$

$$1 \ge P(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n) \ge P(A_{n_0}) = 1, \text{ also}$$

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{C}.$$

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C} \overset{\text{Def.}}{\Longrightarrow} \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{C}) \overset{\text{s.o.}}{=} \mathcal{C}$$

$N \in \mathcal{C} \Rightarrow P(N) = 0$ oder $P(\overline{N}) = 0$

$\Rightarrow N \in \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ oder $\overline{N} \in \mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$

$\underset{\sigma(\mathcal{E})\ \sigma\text{-Algebra}}{\Rightarrow} N \in \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{E}) \Rightarrow \underline{\underline{\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{E})}}$

38)

7

X und Y seien stoch. unabh. Zufallsgrößen auf einem WR $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

X sei exponentialverteilt mit Parameter λ ($\lambda > 0$). Ferner sei

$$P(Y=-1) = P(Y=1) = \frac{1}{2}.$$

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(z) := P(X\cdot Y \le z)$, $z \in \mathbb{R}$, der Zufallsvariablen $X \cdot Y$.

Lösung:

$$P(XY \le z) = P(X\cdot Y \le z, Y=-1) + P(X\cdot Y \le z, Y=1)$$

$$= P(X\cdot Y \le z \mid Y=-1)\cdot P(Y=-1) + P(X\cdot Y \le z \mid Y=1)\cdot P(Y=1)$$

$$\overset{\text{unabh.}}{=} \frac{1}{2}\cdot\left[P(X \ge -z) + P(X \le z)\right]$$

1. Fall: $z \le 0 \Rightarrow P(X \le z) = 0$

$$\Rightarrow P(XY \le z) = \frac{1}{2}\cdot P(X \ge -z) = \frac{1}{2}\left(1-(1-e^{+\lambda z})\right) = \frac{1}{2}\cdot e^{\lambda z}$$

2. Fall: $z > 0$

$$\Rightarrow P(XY \le z) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{P(X \ge -z)}_{=1} + 1 - e^{-\lambda z}\right] = \frac{1}{2}\left[2 - e^{-\lambda z}\right].$$