Einführung in die Stochastik für Informatiker

Satz 2.21. *(Borel-Cantelli-Lemma)*
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sei ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ereignisfolge.

a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty \quad \Longrightarrow \quad P\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 0.$$

b) *Ist $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig, so gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty \quad \Longrightarrow \quad P\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) = 1.$$

Beweis.
a) Wegen der Konvergenz der Reihe gilt $P(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n) \le \sum_{n=k}^{\infty} P(A_n) \to 0$ mit $k \to \infty$, so daß wegen Lemma 2.11 e)

$$P(\limsup_{n\to\infty} A_n) = P\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big) = \lim_{k\to\infty} P\Big(\bigcup_{n=k}^{\infty} A_n\Big) = 0.$$

b) Wegen Lemma 2.17 ist die Folge $\{A_n^c\}$ ebenfalls stochastisch unabhängig. Es folgt

$$\begin{aligned} P\big(\limsup_{n\to\infty} A_n\big) &= 1 - P\big(\liminf_{n\to\infty} A_n^c\big) = 1 - \lim_{k\to\infty} P\Big(\bigcap_{n=k}^{\infty} A_n^c\Big) \\ &= 1 - \lim_{k\to\infty}\Big(\prod_{n=k}^{\infty}\big(1 - P(A_n)\big)\Big) = 1. \end{aligned}$$

Denn bezeichne $p_n = P(A_n)$. Ist $p_n = 1$ für ein n, so gilt die letzte Gleichheit trivialerweise. Sei also $p_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir schließen mit $\ln x \le x - 1$ für alle $x > 0$

$$\prod_{n=k}^{\infty}(1-p_n) = \exp\Big(\sum_{n=k}^{\infty}\ln(1-p_n)\Big) \le \exp\Big(-\sum_{n=k}^{\infty} p_n\Big) \to 0 \ (k\to\infty),$$

da nach Voraussetzung $\sum_{n=k}^{\infty} p_n = \infty$ für alle $k \in \mathbb{N}$. ■

Literatur zu “Einführung in die Stochastik für Informatiker”

Allen, A.O. : Probability, Statistics, and Queueing Theory with Computer Science Applications. 2nd edition, Academic Press, Boston, 1990.

Casella, G., Berger, R.L. : Statistical Inference. Duxbury Press, Belmont, California, 1990.

Dwass, H. : Probability and Statistics. W.A. Benjamin, New York, 1970.

Feller, W. : An Introduction to Probability Theory and It's Applications. Vol. 1, Wiley, New York, 1968. Vol. 2, Wiley, New York, 1966.

Gänssler, P., Stute, W. : Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer, Berlin, 1977.

Grimmett, G.R., Stirzaker, D.R. : Probability and Random Processes. Clarendon Press, Oxford, 1992.

Hinderer, K. : Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie. Springer, Berlin, 1972.

Hübner, G. : Stochastik, eine anwendungsorientierte Einführung. Vieweg-Verlag, Braunschweig 1996.

Hunter, J.J. : Mathematical Techniques of Applied Probability. Vol. 1, 2, Academic Press, New York, 1980.

Knuth, D.E. : The Art of Computer Programming. Vol. 1,2,3, Addison–Wesley, Massachusetts, 1973.

Krengel, U. : Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. 3. Auflage, Vieweg, 1991.

Krickeberg, K. : Wahrscheinlichkeitstheorie, Teubner, Stuttgart, 1963.

Mathar, R., Pfeifer, D. : Stochastik für Informatiker, Teubner, Stuttgart, 1990.

Pfanzagl, J. : Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung. 2. Auflage, de Gruyter, Berlin, 1991.

Pflug, G. : Stochastische Modelle in der Informatik. Teubner, Stuttgart, 1986.

Plachky, D., Baringhaus, L., Schmitz, N. : Stochastik I, II, Studien–Text, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1978 .

Ross, S.M. : Introduction to Probability Models. (5th edition) Academic Press, Boston, 1993.

Shiryayev, A.N. : Probability. Springer, New York, 1984.

Taylor, H.M., Karlin, S. : An Introduction to Stochastic Modeling. (revised edition) Academic Press, Boston, 1994.

Trivedi, K.S. : Probability & Statistics with Reliability, Queueing, and Computer Science Applications. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1982.

Weiss, P. : Stochastische Modelle für Anwender. Teubner, Stuttgart, 1987.

Wolff, R.W. : Stochastic Modelling and the Theory of Queues. Prentice–Hall International, London, 1989.

Yates, R.D., Goodman, D.J. : Probability and Stochastic Processes. John Wiley, New York, 1999.

Einführung in die Stochastik für Informatiker

Lemma 2.12. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *sei ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$.
a) *(Siebformel von Poincaré-Sylvester)*

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} P\Big(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\Big) \\ &= \sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + - \cdots + (-1)^{n+1} P\Big(\bigcap_{k=1}^n A_k\Big) \end{aligned} \tag{1}$$

b) *(Bonferroni-Ungleichung)*

$$\sum_{k=1}^n P(A_k) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) \ \le\ P\Big(\bigcup_{k=1}^n A_k\Big) \ \le\ \sum_{k=1}^n P(A_k). \tag{2}$$

Beweis. a) (1) wird mit vollständiger Induktion bewiesen. Für $n = 1$ ist die Formel trivial gültig. Für $n = 2$ erhält man

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2) &= P\Big(\big((A_1\cup A_2)\setminus(A_1\cap A_2)\big)\cup(A_1\cap A_2)\Big) = P\big((A_1\cup A_2)\setminus(A_1\cap A_2)\big) + P(A_1\cap A_2) \\ &= P\big(A_1\setminus(A_1\cap A_2)\big) + P\big(A_2\setminus(A_1\cap A_2)\big) + P\big(A_1\cap A_2\big) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - 2\cdot P(A_1\cap A_2) + P(A_1\cap A_2) = P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2). \end{aligned} \tag{3}$$

Unter der Induktionsvoraussetzung, daß (1) für $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt mit (3):

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{k=1}^{n+1} A_k\Big) &= P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) + P(A_{n+1}) - P\Big(\bigcup_{k=1}^{n}(A_k\cap A_{n+1})\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + - \cdots + (-1)^{n+1} P\Big(\bigcap_{k=1}^n A_k\Big) \\ &\quad - \left(\sum_{k=1}^n P(A_k\cap A_{n+1}) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{n+1} + - \cdots + (-1)^{n+1} P\Big(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\Big)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} P(A_k) - \sum_{1\le i_1<i_2\le n+1} P(A_{i_1}\cap A_{i_2}) + - \cdots + (-1)^{n+2} P\Big(\bigcap_{k=1}^{n+1} A_k\Big), \end{aligned}$$

d.h. die Aussage für $n+1$. Hierbei wurde die Siebformel zusätzlich auf den Term $P\Big(\bigcup_{k=1}^n (A_k \cap A_{n+1})\Big)$ angewandt.

Die rechte Ungleichung von (2) folgt mit vollständiger Induktion aus (3), die linke ergibt sich wie folgt.

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcup_{i=1}^n A_i\Big) &= P\Big(A_1\setminus\big(A_1\cap(A_2\cup\ldots\cup A_n)\big)\cup A_2\setminus\big(A_2\cap(A_3\cup\ldots\cup A_n)\big)\cup\ldots \\ &\qquad \ldots\cup A_{n-1}\setminus(A_{n-1}\cap A_n)\cup A_n\Big) \\ &= P(A_1) - P\big((A_1\cap A_2)\cup\ldots\cup(A_1\cap A_n)\big) + P(A_2) - P\big((A_2\cap A_3)\cup\ldots\cup(A_2\cap A_n)\big) + \ldots \\ &\qquad \ldots + P(A_{n-1}) - P\big((A_{n-1}\cap A_n) + P(A_n) \\ &\ge \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i\cap A_j). \end{aligned}$$

∎

Univ.-Prof. Dr. Rudolf Mathar RWTH Aachen, SS 2000

Einführung in die Stochastik für Informatiker

— Inhalt in Stichworten —

1. Einleitung

Beispiele für Zufallsexperimente. Bedeutung von 'Stochastik'. Historische Entwicklung und Einteilung in Teilgebiete. Beispiele: Münzwurf und Galton-Brett, Kommunikationssysteme und Protokolle, Laufzeiten in Netzwerken.

2. σ-Algebren und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Ergebnismenge, Ereignismenge und grundlegende Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. σ-Additivität von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Laplacescher Wahrscheinlichkeitsbegriff. Bsp.: Binäre Suche, Hashing. Überabzählbare Ergebnismengen am Beispiel des unendlichen Münzwurfs. Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Definition von σ-Algebra und Meßraum. Bsp.: gröbste, feinste σ-Algebra, von Partition erzeugte σ-Algebra, σ-Algebra, die Intervalle enthält. Erzeuger einer σ-Algebra. Borelsche σ-Algebra. Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf σ-Algebren. Laplace-Verteilung als Spezialfall. Eigenschaften von Wahrscheinlichkeitsverteilungen: Additivität, Monotonie, Stetigkeit von unten (von oben), Subadditivität. Siebformel von Poincare-Sylvester und Bonferoni-Ungleichungen. Bsp.: Sortierprobleme. Elementare bedingte Wahrscheinlichkeit und Verteilung. Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit und Bayes-Formel. Stochastisch unabhängige Ereignisse (paarweise, gemeinsam). Stochastische Unabhängigkeit von Komplementmengen; Bsp.: serielle und parallele Systeme mit Ausfallwahrscheinlichkeiten. Limes superior und inferior von Ereignisfolgen, Interpretation. Borel-Cantelli-Lemma. Bsp.: unendlicher Würfelwurf.

3. Zufallsvariable und ihre Verteilung

Motivation und Definition von Zufallsvariablen, Meßbarkeit. Verteilung einer Zufallsvariablen. Bsp.: Binomialverteilung, Zähldichte und Interpretation.

3.1. Diskrete Verteilungen/Zufallsvariablen

Definition, Träger, Zähldichte. Bsp.: geometrische Verteilung, Poissonverteilung.

3.2. Verteilungsfunktionen

Definition einer Verteilungsfunktion. Zusammenhang zwischen Verteilungen (von ZV) und Verteilungsfunktionen. Verteilungen werden eindeutig durch Verteilungsfunktionen beschrieben. Bsp. für Verteilungsfunktionen: Rechteckverteilung, Exponentialverteilung, diskrete ZV mit geordnetem Träger, insbesondere die geometrische Verteilung. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Verteilungsfunktionen. Quantil, Fraktil und Median, Interpretation.

3.3. Dichten

Definition absolut-stetig, Dichte. Zusammenhang mit Verteilungsfunktion. Bsp.: Rechteckverteilung, Exponentialverteilung, Normalverteilung. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit Dichten.

3.4. Erzeugende Funktionen und Laplace-Transformierte

Definition, Eindeutigkeitssatz, Inversionsformeln. Bsp.: geometrische Verteilung, Poissonverteilung, Rechteckverteilung, Exponentialverteilung.

4. Produkträume und Zufallsvektoren

4.1. Produkträume

Kartesische Produkte von Ergebnismengen und Definition der Produkt-σ-Algebra. Bsp.: n-dimensionale Borelsche σ-Algebra.

4.2. Zufallsvektoren und Folgen von Zufallsvariablen

Definition von Zufallsvektoren. Gemeinsame Verteilung und eindeutige Beschreibung durch eine n-dimensionale Verteilungsfunktion. Absolut-stetige Zufallsvektoren und n-dimensionale Dichten. Graphische Interpretation von mehrdimensionalen Dichten. Berechnung von Wahrscheinlichkeiten mit mehrdimensionalen

Dichten. Bsp.: Gleichverteilung auf dem Einheitswürfel, der Einheitskugel, mehrdimensionale Normalverteilung, Mischung von (mehrdimensionalen) Dichten. Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen, Produkt von Verteilungsfunktionen bzw. Dichten. Stochastische Unabhängigkeit im Fall diskreter Zufallsvariablen. Folgen von Zufallsvariablen, stochastische Unabhängigkeit. Bsp.: Gleichheit von diskreten und absolut-stetigen s.u. ZV, Maximum und Minimum von s.u. ZV, Verteilung der Summe zweier exponentialverteilter ZV, Gamma-Verteilungen, erste Eintrittszeit mit geometrischer Verteilung. Stochastische Unabhängigkeit von Blöcken von s.u. ZV.

5. Transformation von Zufallsvektoren

Transformationssatz für Dichten. Bsp.: Transformation einer Gleichverteilung auf dem Einheitquadrat zu einer auf dem Einheitskreis. Bsp.: Rayleigh-Verteilung durch Transformation von normalverteilten ZV auf Polarkoordinaten. Summen von ZV und Faltungsformel. Bsp.: Faltung von Gamma-Verteilungen, Normalverteilungen, Summen von Quadraten von s.u. normalverteilten ZV, χ^2-Verteilung mit n-Freiheitsgraden, Zusammenhang zur Rayleigh-Verteilung, Erlang-Verteilung. Summen von exponentialverteilten Zufallsvariablen und der Poisson-Prozeß, Ankunfts- und Zwischenankunftszeiten, graphische Darstellung mit zufälligen Treppenfunktionen. Die Anzahl der Ankünfte in disjunkten Intervallen sind s.u. poissonverteilte ZV mit Parametern proportional zur Intervallänge. Faltung von diskreten Verteilungen. Bsp.: negative Binomialverteilung. Faltung von Binomial-, negativen Binomial- und Poissonverteilungen. Verteilung des Produkts und Quotienten von s.u. ZV.

6. Erwartungswerte, Momente von Zufallsvariablen

Motivation des Erwartungswerts durch 'faire' Spiele, Würfelwurf, Roulette (Petersburger Paradoxon). Definition des Erwartungswerts von (transformierten) diskreten und absolut-stetigen ZV. Direkte Berechnung mit Hilfe der Verteilungsfunktion. Bsp.: Erwartungswert der geometrischen, Exponential- und Normalverteilung. Erwartungswert von diskreten Zufallsvariablen durch Summation der Überschreitungswahrscheinlichkeiten. Eigenschaften des Erwartungswerts: Linearität, Monotonie, Erwartungswert von Indikatorfunktionen, Markoff-Ungleichung, Multiplikativität bei s.u. Zufallsvariablen. Unkorreliertheit, Erwartungswert von Funktionen von Zufallvektoren, Definition k-tes (zentrales) Moment, Varianz, Standardabweichung, Kovarianz, Korrelation. Stochastische Unabhängigkeit impliziert Unkorreliertheit. Varianz von linear transformierten ZV, von Summen von ZV, Cauchy-Schwarz-Ungleichung. Interpretation von Momenten und Korrelation. Erzeugende Funktion und Laplace-Transformierte von Summen von ZV durch Produktbildung. Bsp.: Binomialverteilung, Exponentialverteilung. Berechnung von Momenten durch Ableitung der Transformierten. Beispiele zur Berechnung von Momenten mit verschiedenen Methoden: Binomial-, Exponential- und Normalverteilung.

7. Bedingte Verteilungen und Erwartungswerte

Definition der bedingten Zähldichte und bedingten Verteilung für diskrete Zufallsvariable. Bsp.: Verteilung von X, falls X gegeben $N = n$ binomialverteilt und N poissonverteilt ist. Definition des bedingten Erwartungswert. Berechnung des Erwartungswerts mit Hilfe bedingter Erwartungswerte und Randverteilungen. Definition der bedingten Dichte und bedingten Verteilung für absolut-stetige Zufallsvariable. Definition der bedingten Verteilungsfunktion und des bedingtern Erwartungswerts für absolut-stetige ZV. Berechnung des Erwartungswert aus den bedingten Erwartungswerten. Gemischte Fälle mit absolut-stetigen und diskreten ZV. Bsp.: Gesamtverweilzeit in einem Wartesystem mit exponentialverteilten Bedienzeiten und geometrisch verteilter Anzahl von Anforderungen. Bsp.: Anzahl der Ankünfte eines Poissonprozesses in einem Intervall mit exponentialverteilter Länge.

8. Grenzwertsätze

Motivation: Die relative Häufigkeiten des Auftretens von Kopf konvergiert gegen die entsprechende Wahrscheinlichkeit, Konvergenz normierter Summen gegen die Standardnormalverteilung. Konvergenzbegriffe: fast sichere, stochastische und Verteilungskonvergenz. $P\big(\limsup_{n\to\infty}\{|X_n - X| > \varepsilon\} = 0\big)$ ist äquivalent zu fast sicherer Konvergenz. Fast sichere Konverenz $\Rightarrow$ stochastische Konvergenz $\Rightarrow$ Verteilungskonvergenz. "Schnelle" stochastische Konvergenz impliziert fast sichere. Tschebycheff-Ungleichung. Starkes Gesetz grosser Zahlen (SGGZ) für paarweise unkorrelierte ZV mit gleichmäßig beschränkter Varianz. SGGZ unter modifizierten

Voraussetzungen und schwaches Gesetz großer Zahlen. Anwendung des SSGZ auf arithmetische Mittel, Varianzschätzer und relative Häufigkeiten. Zentraler Grenzwertsatz. Bsp.: Standardisierte Binomialverteilungen konvergieren schwach gegen die Standardnormalverteilung.

9. Schätzfunktionen und Konfidenzintervalle

Einführende Beispiele: Schätzen von p bei $\mathrm{Bin}(1,p)$, Schätzen des Erwartungswerts bei $\mathrm{Exp}(\lambda)$, Verfahren zur Schätzung der Anzahl regelmäßiger Besucher einer Web-Seite.

9.1. Methoden zur Bestimmung von Schätzern

Definition von statistischen Schätzfunktionen/Punktschätzern. Beispiele bei $N(\mu,\sigma^2)$ und $\mathrm{Exp}(\lambda)$. Def. Likelihood-Funktion, Maximum-Likelihood-Schätzer, Log-Likelihood-Funktion. Berechnung der ML-Schätzer für μ,σ^2 bei Normalverteilungen, für λ bei $\mathrm{Exp}(\lambda)$, für p bei $\mathrm{Bin}(1,p)$. Bayes-Schätzer und das zugehörige statistische Konzept mit a-priori und a-posteriori Verteilung. Bayes-Schätzer als Erwartungswert der a-posteriori Verteilung. Bsp.: Berechnung des Bayes-Schätzers für $\mathrm{Bin}(n,p)$ bei a-priori Verteilung $\mathrm{Beta}(\alpha,\beta)$ über p.

9.2. Gütekriterien für Schätzer

Def. mittlerer quadratischer Fehler (MSE). MSE = Var + Bias^2. Erwartungstreue Schätzer, hierfür gilt MSE = Var. Bsp.: Berechnung des Erwartungswerts und MSE von $\bar{X}$ und S^2 bei Normalverteilungen. Bsp.: Vergleich des MSE(p) zwischen Bayes- und ML-Schätzer bei $\mathrm{Bin}(n,p)$.

9.3. Konfidenzintervalle

Def. Konfidenzintervall zum Niveau $1-\alpha$. Bsp.: zwei- und einseitige Konfidenzintervalle für μ bei Normalverteilung mit bekannter Varianz. Approximative Konfidenzintervalle für die Erfolgswahrscheinlichkeit p (durch Lösen einer quadratischen Gleichung).

Aachen, den 10.7.2000

Kombinatorische Grundformeln

Viele Abzählprobleme können auf kombinatorische Formeln zurückgeführt werden, die sich am Beispiel eines Urnenmodells veranschaulichen lassen.

In einer Urne seien N Kugeln, die wir uns von 1 bis N durchnumeriert denken. Nacheinander werden aus der Urne n Kugeln gezogen. Beim Ziehen einer solchen Stichprobe vom Umfang n gibt es zwei Vorgehensweisen:

- **Stichprobe mit Zurücklegen (Stichprobe mit Wiederholung)**
  Nach jeder einzelnen Ziehung wird die gezogene Kugel in die Urne zurückgelegt. Kugeln können also in den n Ziehungen mehrfach gezogen werden.

- **Stichprobe ohne Zurücklegen (Stichprobe ohne Wiederholung)**
  Jede gezogene Kugel wird nach der Ziehung beiseite gelegt und nicht in die Urne zurückgegeben. Eine beliebige Kugel kann bei einer solchen Stichprobe also höchstens einmal auftreten.

Bei der Betrachtung des Ziehungsergebnisses gibt es wiederum zwei Vorgehensweisen:

- **Stichprobe in Reihenfolge (geordnete Stichprobe, Permutation)**
  Das Ergebnis wird durch ein n-Tupel $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ beschrieben, in dem ω_i die Nummer der bei der i-ten Ziehung gezogenen Kugel angibt, $1 \leq i \leq n$. Die Reihenfolge, in der die Kugeln gezogen werden, ist also von Bedeutung.

- **Stichprobe ohne Reihenfolge (ungeordnete Stichprobe, Kombination)**
  Interessiert nur, welche Kugeln gezogen werden und – falls mit Zurücklegen gezogen wird – wie oft eine Kugel gezogen wurde, so sind alle Stichproben äquivalent, die durch eine Permutation der Stichprobenelemente auseinander hervorgehen. Wir beschreiben die Stichprobe deshalb durch ein n-Tupel $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$, dessen Einträge der Größe nach geordnet sind, $\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n$. In welcher Ziehung eine Kugel gezogen wurde, ist hier nicht von Bedeutung.

Es ergeben sich also vier unterschiedliche Stichprobenräume, deren Mächtigkeiten wir in folgender Tabelle angeben wollen:

Stichproben vom Umfang n aus $A := \{1, \dots N\}$	mit Zurücklegen	ohne Zurücklegen
in Reihenfolge	$\Omega_I = A^n = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \mid \omega_i \in \{1, \dots, N\}$ für $1 \leq i \leq n\}$ $\lvert\Omega_I\rvert = N^n$	$\Omega_{II} = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in A^n \mid \omega_i \neq \omega_j$ für $i \neq j, 1 \leq i, j \leq n\}$ $\lvert\Omega_{II}\rvert = \frac{N!}{(N-n)!}$
ohne Reihenfolge	$\Omega_{IV} = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in A^n \mid \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n\}$ $\lvert\Omega_{IV}\rvert = \binom{n+N-1}{n}$	$\Omega_{III} = \{(\omega_1, \dots, \omega_n) \in A^n \mid \omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n\}$ $\lvert\Omega_{III}\rvert = \binom{N}{n}$

Quelle: Ulrich Krengel,
Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik,
S. 7–10,
Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1991