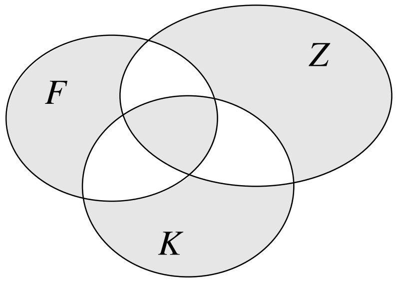
TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN

Stochastik

für Studierende der Informatik

Formeln, Zusatzaufgaben & Klausuren



Michael Greiner

INSTITUT FÜR INFORMATIK

Vorwort

Dieser kleine Band ist eine (ungeordnete) Zusammenstellung von fast 50 Aufgaben mit Lösungen, die ich in den letzten fünf Semestern als Übungsaufgaben gestellt oder geplant hatte und die keinen Platz in den Lehrbüchern [GREINER & TINHOFER, 1996] und [GREINER, 1997] gefunden haben. Nachdem alle Aufgaben jedoch so formuliert sind, daß sie mit dem Wissen aus einem einführenden Lehrbuch zur Stochastik wie [GREINER & TINHOFER, 1996] gelöst werden können, habe ich mich entschlossen, sie in elektronischer Form für alle Interessierten zur Verfügung zu stellen.

Die Lösungen zu den einzelnen Aufgaben erfordern bewußt zum Teil den Einsatz eines Rechners und beschränken sich vielfach nicht auf einen einzigen Weg oder die Beantwortung der Fragen, sondern umfassen sowohl mehrere Wege und deren Bewertung, als auch darauf aufbauende weiterführende Fragestellungen und Querverweise. Sie stellen damit eine wertvolle Ergänzung gerade im Hinblick auf Prüfungsvorbereitungen dar und bieten bereits einen kleinen Vorgeschmack auf die oben genannten Lehrbücher, die über 230 Aufgaben und Lösungen umfassen, u.a. zu den Themen *statische und dynamische Verteilung von Jobs auf Mehrprozessorsystemen, Zustandsübergangsdiagramme, Hashing, Codesicherung, Bayes'sches und Nicht-Bayes'sches Schließen, Modellierung von Information, Modellierung von einfachen Wartesystemen, Beschäftigungsphasen von Wartesystemen, Zuverlässigkeit von Rechensystemen bzw. Rechnernetzen (zeitabhängig bzw. nicht zeitabhängig), Simulation von (nicht gleichverteilten) Zufallsvariablen, (umgangssprachliche) Paradoxa der Wahrscheinlichkeitstheorie, erzeugende Funktionen, deskriptive und induktive Statistik.*

Für weitere Informationen zu den beiden Lehrbüchern sei im übrigen auf meine Homepage

http://wwwjessen.informatik.tu-muenchen.de/personen/greiner.html

verwiesen.

Darüber hinaus beinhaltet dieser Band alle *Klausuraufgaben* in „Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik", die bislang am Fachbereich Informatik der TU München gestellt wurden – einschließlich der Angabe von Lösungshinweisen und der *Formelsammlung für Klausuren* als erlaubtem Hilfsmittel. Damit ist auch verbunden, daß diese Formelsammlung keinen Anspruch auf Vollständigkeit stellt, sondern ausschließlich die Bereitstellung des bislang üblichen Klausurstoffes in übersichtlicher Form zum Ziel hat.

München, im Februar 1997 Michael Greiner

Bevor's aber richtig losgeht noch kurz eine Übersicht der Aufgabennotation

Bezeichnung	Quelle
$\boxed{\mathbf{A}m.n}$	[Greiner & Tinhofer, 1996]
$\boxed{\mathbf{E}\,m.n}$	[Greiner, 1997]
$\boxed{\mathbf{Z}m}$	dieser Band

und was zum Schmunzeln:

> Prof. X und Dr. Y, beide Mitarbeiter eines Forschungsinstitutes, wollen an einer Tagung in Übersee teilnehmen. Als Prof. X vorschlägt, für Dr. Y ein Flugticket mitzubesorgen, lehnt dieser dankend ab mit den Worten: „Nachdem ich die Wahrscheinlichkeit ausgerechnet habe, daß eine Bombe an Bord meines Flugzeugs ist, reise ich lieber mit dem Schiff." Einen Tag vor Beginn der Tagung treffen sich die beiden am Flughafen. Fragt Prof. X überrascht: „Was machen Sie denn hier? Ich dachte, Sie wollten nicht fliegen?!" Darauf entgegnet Dr. Y: „Ach, wissen Sie... Ich habe mir noch die Wahrscheinlichkeit ausgerechnet, daß zwei Bomben an Bord sind. Jetzt nehme ich einfach selbst eine mit!" ☺
>
> [Ein zwar alter (einige werden auch sagen: schlechter) Witz, der aber deutlich zeigt, welche Probleme beim Umgang mit Unabhängigkeiten auftreten können.]

Inhaltsverzeichnis

Formelsammlung für Klausuren

Notation

$\llcorner \cdot \lrcorner$	vor- bzw. nachstehende Operatoren beziehen sich auf alle Bezeichner innerhalb der Klammern, z.B. $1 \leq \llcorner i, j \lrcorner \leq 6$ als Abkürzung von $(1 \leq i \leq 6) \wedge (1 \leq j \leq 6)$
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$	die natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$	die natürlichen Zahlen einschließlich 0

$\llcorner k, m, n \lrcorner \in \mathbb{N}$ (wenn nicht explizit anders vereinbart)

$\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	die ganzen Zahlen
$\mathbb{R}\ \Big(, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+\Big)$	die reellen Zahlen (> 0, ≥ 0)
$\mathbb{R}^n$	der n-dimensionale reelle Raum
$\mathbb{R}^{m,n}$	der Raum aller Matrizen mit m Zeilen, n Spalten und reellwertigen Elementen

Es seien Ω eine Menge und $\llcorner A, B \lrcorner \subseteq \Omega$. Dann bezeichnen

$\lvert A \rvert$	die Mächtigkeit von A
$A \cap B$	den Durchschnitt von A und B
$A \cup B$	die Vereinigung von A und B
$A - B := \{a \in A \mid a \notin B\}$	die Differenz von A und B, „A ohne B“
$A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$	die symmetrische Differenz (bzw. Antivalenz) von A und B
$\bar{A}$	das Komplement von A in Ω
I_A	die Indikatorfunktion von A
$\emptyset$	die leere Menge
$2^\Omega, \mathfrak{P}(\Omega)$	die Potenzmenge von Ω
$\mathfrak{A}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$	die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra
$\mathfrak{B}$	die σ-Algebra der Borel-Mengen (für $\Omega = \mathbb{R}$)
$\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$	einen Wahrscheinlichkeitsraum (d.h. $\mathfrak{A}$ ist σ-Algebra auf Ω und p ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathfrak{A}$)

Es seien $\llcorner a, b \lrcorner \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann bezeichnen

(a, b)	das offene Intervall mit den Grenzen a und b
$[a, b]$	das abgeschlossene Intervall mit den Grenzen a und b
$(a, b], [a, b)$	die halbseitig offenen bzw. abgeschlossenen Intervalle

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$. Dann bezeichnen

$x_1, \ldots, x_n$	die Komponenten von x, d.h. $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m,n}$ eine Matrix. Dann bezeichnet

$A^T \in \mathbb{R}^{n,m}$	die transponierte Matrix

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ eine quadratische Matrix. Dann bezeichnen

A^{-1}	die inverse Matrix
$\det(A)$	die Determinante von A

Es sei $x_1, \ldots, x_n$ eine Meßreihe. Dann bezeichnen

$\bar{x}$	das (arithmetische) Stichprobenmittel
$\dot{x}$	das geometrische Stichprobenmittel
$\ddot{x}$	das harmonische Stichprobenmittel
$\bar{x}_\alpha$	das α-gestutzte Mittel, $0 < \alpha < 0.5$
$\tilde{x}$	den Median
s_x^2	die empirische Streuung

Es sei $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ eine (zweidim.) Meßreihe. Dann bezeichnen

s_{xy}	die empirische Kovarianz
r_{xy}	den empirischen Korrelationskoeffizienten

Ws	Wahrscheinlichkeit
ZV	Zufallsvariable
Vf	Verteilungsfunktion
Φ	Vf der Standardnormalverteilung
x_α	α-Quantil von Φ

$\lfloor x \rfloor, x \in \mathbb{R}$	größte ganze Zahl $\leq x$
$[x], x \in \mathbb{R}$	ganze Zahl im Intervall $(x-1, x+1)$

Es seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Ws-Raum und $B \in \mathfrak{A}$. Dann bezeichnet

$P(\cdot \mid B)$	die bedingte Ws (bzgl. B)

Es seien X und Y Zufallsvariablen. Dann bezeichnen

P_X	die Verteilung von X
W_X	den Wertebereich von X
$E(X)$	den Erwartungswert von X
$Var(X)$	die Varianz von X
c_X	den Variationskoeffizienten von X
$Cov(X, Y)$	die Kovarianz von X und Y
$K_{X,Y}$	die Kovarianzmatrix von X und Y
$\rho(X, Y)$	den Korrelationskoeffizienten von X und Y
x	eine Realisierung von X

Es sei X eine ZV.

$X \sim \mathcal{U}(a, b)$	X ist in (a, b) gleichverteilt
$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$	X ist normalverteilt mit den Parametern μ und $\sigma^2 > 0$
$X \sim \mathcal{E}x(\lambda)$	X ist exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$
$X \sim \mathcal{W}(\alpha, \beta)$	X ist Weibull-verteilt mit den Parametern $\llcorner \alpha, \beta \lrcorner > 0$
$X \sim Gamma(\lambda, s)$	X ist Gamma-verteilt mit den Parametern $\llcorner \lambda, s \lrcorner > 0$

1 Deskriptive Statistik

1.1 Eindimensionale Meßreihen

$x_1, \dots, x_n$ sei eine Meßreihe mit $\llcorner x_1, \dots, x_n \lrcorner \in \mathbb{R}$.

- Die durch Umsortieren **geordnete Meßreihe** wird mit $x_{(1)}, \dots, x_{(n)}$ bezeichnet, d.h. $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \ldots \leq x_{(n)}$.

1.1.1 Klassifizierung

Die Festlegung einer Klasseneinteilung $K_1, \dots, K_\ell$ mit $\ell \leq n$ für die Meßreihe $x_1, \dots, x_n$ ist nicht eindeutig; man wählt i.a. $\llcorner a, b \lrcorner \in \mathbb{R}$ mit $a < x_{(1)}$, $b \geq x_{(n)}$ und setzt

$$\begin{aligned} w &:= \frac{b-a}{k} > 0 \quad \textbf{(Klassenbreite)}, \\ K_j &:= (a + (j-1)\cdot w,\ a + jw] \subset \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, \ell\,. \qquad \left[\text{Klar: } (a,b] = \bigcup_{j=1}^{\ell} K_j \right] \end{aligned}$$

Faustregeln: Möglichst gleichgroße Klassen, $\ell = [\sqrt{n}\,]$ oder $\ell = [10 \cdot \log_{10}(n)]$ (wobei ℓ sinnvollerweise nicht größer als 25 gewählt werden sollte)

Es bezeichnen

- n_j die **absolute Häufigkeit** von K_j (i.e. die Anzahl der x_j in K_j),
- $h_j := \dfrac{n_j}{n}$ die **relative Häufigkeit** von K_j und
- $m_j := a + (j-1)w + \dfrac{w}{2}$ die **Klassenmitten**.

Dann heißen

- $h(x) = \begin{cases} h_j & , \ x = m_j \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$ **empirische Dichte** und
- $H(x) = \sum\limits_{j\,:\,m_j \leq x} h_j$ **empirische Verteilungsfunktion (Vf)** von $x_1, \dots, x_n$.

Die empirische Vf ist also eine monoton nichtfallende Treppenfunktion und bezeichnet die relative Anzahl der Daten $\leq x$.

1.1.2 Statistische Maßzahlen

1.1.2.1 Lageparameter

- **(Arithmetisches) Stichprobenmittel**: $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i$
- **Geometrisches Stichprobenmittel**: $\dot{x} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{1/n}$
- **Harmonisches Stichprobenmittel**: $\ddot{x} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$
- **Median**: $\tilde{x} = \begin{cases} x_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} & , \ n \text{ ungerade} \\ \frac{1}{2}\left[x_{\left(\frac{n}{2}\right)} + x_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right] & , \ n \text{ gerade} \end{cases}$

Im weiteren seien $0 < \alpha < 0.5$ und $k = \lfloor \alpha n \rfloor$.

- **α-gestutztes Mittel**: $\bar{x}_\alpha = \frac{1}{n-2k} \cdot \left[x_{(k+1)} + \ldots + x_{(n-k)}\right]$
- **α-winsorisiertes Mittel**: $w_\alpha = \frac{1}{n} \cdot \left[k \cdot x_{(k+1)} + x_{(k+1)} + \ldots + x_{(n-k)} + k \cdot x_{(n-k)}\right]$

Bemerkung: Es gilt $\ddot{x} \leq \dot{x} \leq \bar{x}$ und „ = “ für $x_1 = \ldots = x_n$.

1.1.2.2 Streuungsparameter

- **Empirische Varianz**: $s_x^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$
- **Spannweite**: $x_{(n)} - x_{(1)} \quad \left[= \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} - \min_{1 \leq i \leq n} \{x_i\} \right]$

1.2 Zweidimensionale Meßreihen

$(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ sei eine zweidimensionale Meßreihe.

1.2.1 Klassifizierung

- Die Klasseneinteilung bzgl. (X, Y) ist definiert als

  $$K_{ij} := \{(x_\nu, y_\nu) \mid x_\nu \in K_{i\bullet}, y_\nu \in K_{\bullet j}\},$$

  wobei $K_{1\bullet}, \ldots, K_{p\bullet}$ bzw. $K_{\bullet 1}, \ldots, K_{\bullet q}$ die Klasseneinteilungen bzgl. der (eindimensionalen) Merkmale X bzw. Y bezeichnen.
- Die zweidimensionale Tabelle der absoluten Häufigkeiten von K_{ij} heißt **Kontingenztafel** (bzw. für $p = q = 2$ **Vierfeldertafel**), ihre Zeilen- bzw. Spaltensummen **Randhäufigkeiten**.

1.2.2 Statistische Maßzahlen

- **Empirische Kovarianz**: $\quad s_{xy} = \dfrac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

- **Empirischer Korrelationskoeffizient**: $\quad r_{xy} = \dfrac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} \;\in [-1, 1]$

1.2.3 Lineare Regression

Für die Regressionsgerade $y = a \cdot x + b$ des Merkmals Y bzgl. X gilt:

$$a = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \qquad \text{und} \qquad b = \bar{y} - \frac{s_{xy}}{s_x^2} \cdot \bar{x}\,.$$

$$\Delta^2 \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a \cdot x_i + b)\right]^2 = (n-1) \cdot s_y^2 \cdot \left[1 - r_{xy}^2\right]\,.$$

(Summe der Fehlerquadrate)

Je näher also der Korrelationskoeffizient betragsmäßig bei 1 liegt, desto besser ist die Anpassung der Datenpunkte an eine Gerade. Für $|r_{xy}| = 1$ liegen die Datenpunkte sogar exakt auf einer Geraden.

1.3 Rechenregeln

Es seien $\llcorner c, d, t, u \lrcorner \in \mathbb{R}$.

- **Verschiebungsregel für (Ko-)Varianzen**:

  $$s_{xy} = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - c)(y_i - d) - n(\bar{x} - c)(\bar{y} - d)\right]$$

  Die gilt insbesondere für $x = y$ unter der Beachtung, daß $s_x^2 = s_{xx}$.

- (v_i, w_i) bezeichne die durch die affin-linearen Transformationen $v_i = c + tx_i$ und $w_i = d + uy_i$ aus (x_i, y_i) entstandene Meßreihe. Dann gilt:

  * $\bar{v} = c + t\bar{x}\,, \quad \bar{w} = d + u\bar{y}$
  * $s_v^2 = t^2 s_x^2\,, \quad s_w^2 = u^2 s_y^2$
  * $s_{vw} = tus_{xy}$
  * $|r_{vw}| = |r_{xy}|$, falls $\llcorner t, u \lrcorner \neq 0$

2 Ereignisräume und -algebren

Ω sei eine Menge und 2^Ω die dazugehörige **Potenzmenge**, i.e. die Menge aller Teilmengen von Ω.

2.1 Ereignisse

2.1.1 Definitionen

Für $\llcorner A, B \lrcorner \in 2^\Omega$ heißen

- $A \cap B := \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ und } \omega \in B\}$ **Durchschnitt** von A und B
- $A \cup B := \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ oder } \omega \in B\}$ **Vereinigung** von A und B
- $A - B := \{\omega \in A \mid \omega \notin B\}$ **Differenz** von A und B
- $\bar{A} := \Omega - A$ **Komplement** von A in Ω
- $A \triangle B := (A - B) \cup (B - A)$ **symmetrische Differenz** bzw. **Antivalenz** von A und B
- $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $\bar{A} \cap \bar{B}$ **Vollkonjunktionen** über A und B

2.1.2 Rechenregeln

Für $\llcorner A, B, C \lrcorner \in 2^\Omega$ gilt:

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned} \qquad \textbf{(Kommutativgesetze)}$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup C) &= (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) &= (A \cap B) \cap C \end{aligned} \qquad \textbf{(Assoziativgesetze)}$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned} \qquad \textbf{(Distributivgesetze)}$$

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B} \\ \overline{A \cap B} &= \bar{A} \cup \bar{B} \end{aligned} \qquad \textbf{(Gesetze von De Morgan)}$$

$A \cup A = A\,,\ \ A \cap A = A$	**(Idempotenzgesetze)**
$A \cap (A \cup B) = A\,,\ \ A \cup (A \cap B) = A$	**(Absorptionsgesetze)**
$A \cup \bar{A} = \Omega\,,\ \ A \cap \bar{A} = \emptyset\,,\ \ \bar{\bar{A}} = A$	**(Gesetze für Komplementärereignisse)**
$A \cup \Omega = \Omega\,,\ \ A \cap \emptyset = \emptyset$	**(Dominante Elemente)**
$A \cap \Omega = A\,,\ \ A \cup \emptyset = A$	**(Neutrale Elemente)**
$A - B = A \cap \bar{B}$	**(Gesetz für die Mengendifferenz)**
$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$ $A \triangle B = \bar{A} \triangle \bar{B}$ $\overline{A \triangle B} = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$	**(Gesetze für die symmetrische Differenz)**

2.2 Ereignisalgebren

2.2.1 Definitionen

- Ein Teilmengensystem $\mathfrak{A} \subseteq 2^{\Omega}$ heißt **σ-Algebra** oder **Ereignisalgebra** auf Ω dann und nur dann, wenn

  A1) $\Omega \in \mathfrak{A}$

  A2) $A \in \mathfrak{A} \quad \Rightarrow \quad \bar{A} \in \mathfrak{A}$

  A3) $A_i \in \mathfrak{A}\,,\ i \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$

- Die Elemente einer σ-Algebra heißen **Ereignisse**.

- $\mathcal{E} \subseteq 2^{\Omega}$ sei ein Teilmengensystem von Ω. Die kleinste σ-Algebra, die alle Elemente von $\mathcal{E}$ enthält, heißt die **von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra**, i.Z. $\mathfrak{A}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ entsprechend **Erzeugendensystem**.

2.2.2 Folgerung

$$A_i \in \mathfrak{A}\,,\ i \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}$$

2.2.3 Beispiele

$\{\emptyset, \Omega\}$ ist die gröbste, 2^{Ω} die feinste σ-Algebra.

3 (Laplace-) Wahrscheinlichkeiten

3.1 Definitionen

Es seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra auf Ω.

- Eine Abbildung $P : \mathfrak{A} \to [0,1]$ heißt **Ws-Maß** auf $\mathfrak{A}$ genau dann, wenn

  W1) $P(\Omega) = 1$

  W2) $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ für paarweise unvereinbare Ereignisse $A_i,\ i \in \mathbb{N}$.

- Das Tupel $\langle \Omega, \mathfrak{A} \rangle$ heißt **Meßraum**.
- Das Tripel $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ heißt **Ws-Raum** genau dann, wenn $\langle \Omega, \mathfrak{A} \rangle$ ein Meßraum und P ein Ws-Maß auf $\mathfrak{A}$ sind.

3.2 Rechenregeln

Es seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Ws-Raum, $n \in \mathbb{N}$ und $\llcorner A, A_i, B \lrcorner \in \mathfrak{A}$, $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

R1) $P(\emptyset) = 0$

R2) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

R3) $P(A) \leq P(B)$ für $A \subseteq B$

R4) $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$ für paarweise unvereinbare Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$.

Speziell: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ für $A \cap B = \emptyset$

R5) **Boole'sche Ungleichung**: $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$

(dies gilt auch für abzählbar viele Ereignisse A_i)

R6) **Siebformel**: Für $\llcorner i_1, \ldots, i_k \lrcorner \in \{1, \ldots, k\}$ gilt:

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) &= \sum_{i=1}^{k} P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots \\ &\quad + (-1)^{\ell+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_\ell} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_\ell}) \\ &\quad + \ \ldots + (-1)^{k+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k) \end{aligned}$$

Speziell: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

3.3 Kombinatorische Anzahlformeln

veranschaulicht am Beispiel der Verteilung von k Jobs auf n unterscheidbare Prozessoren

	unterscheidbare Jobs	nicht unterscheidbare Jobs
Einfachbelegung ($k \leq n$)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
Mehrfachbelegung	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$

bzw. am Ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit anfangs n Kugeln

	mit Beachtung der Reihenfolge	ohne Beachtung der Reihenfolge
Ohne Zurücklegen ($k \leq n$)	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
Mit Zurücklegen	n^k	$\binom{k+n-1}{k}$

mit den **Binomialkoeffizienten** $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ und $0! := 1$.

Die Binomialkoeffizienten erfüllen u.a. folgende Identitäten:

- $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$ oder $k < 0$. **(Randbedingungen)**
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$ für $\llcorner n, k \lrcorner \geq 1$. **(Rekursionsformel)**
- $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. **(Binomischer Satz)**

3.4 Laplace-Annahme, Abzählregel

- Falls keine Informationen über die Elemente einer endlichen Grundmenge Ω vorliegen, werden die den jeweiligen Elementen entsprechenden *Elementarereignisse* als gleichwahrscheinlich angenommen **(Laplace-Annahme, Prinzip der Gleichwahrscheinlichkeit)**.
- Unter der Laplace-Annahme gilt für die Wahrscheinlichkeit von $A \in \mathfrak{A}$:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad \textbf{(Abzählregel)}$$

4 Unabhängigkeit

$\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ sei ein Ws-Raum.

4.1 Definitionen

$$\llcorner A_1, \dots, A_n \lrcorner \in \mathfrak{A} \text{ heißen } \textbf{unabhängig} \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i) \quad \forall\, I \subseteq \{1, \dots, n\}$$

speziell für $n = 2$:

$$\begin{aligned} \llcorner A, B \lrcorner \in \mathfrak{A} \text{ heißen unabhängig } &\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} P\left(A \cap B\right) = P(A) \cdot P(B) \\ &\Leftrightarrow P(A \cap B) \cdot P(\bar{A} \cap \bar{B}) \;=\; P(A \cap \bar{B}) \cdot P(\bar{A} \cap B) \end{aligned}$$

4.2 Folgerungen

- Aus der *paarweisen* Unabhängigkeit von mehr als zwei Ereignissen folgt also noch nicht die Unabhängigkeit.
- Aus der Unabhängigkeit der Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ folgt auch die Unabhängigkeit beliebiger Kombinationen aus diesen Ereignissen und ihren Komplementen, i.Z.:

  $$A_1, \dots, A_n \text{ unabhängig} \quad \Rightarrow \quad G_1, \dots, G_n \text{ unabhängig für } G_i \in \{A_i, \bar{A}_i\}\,.$$

- Falls die Ereignisse $A_1, \dots, A_n$ unabhängig sind, läßt sich die Wahrscheinlichkeit für die Vereinigung direkt durch die Einzelwahrscheinlichkeiten angeben:

  $$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \;=\; 1 - \prod_{i=1}^{n} \left[1 - P(A_i)\right].$$

  Die Siebformel ist hier also nicht nötig.

5 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

$\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ sei ein Ws-Raum.

5.1 Definitionen

Es seien $\llcorner A, B \lrcorner \in \mathfrak{A}$ mit $P(B) \neq 0$.

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

heißt **bedingte Wahrscheinlichkeit von *A* unter der Bedingung *B***.

$$P(\,\cdot \mid B) : \begin{cases} \mathfrak{A} & \rightarrow \quad [0,1] \\ A & \mapsto \quad P(A \mid B) \end{cases}$$

heißt **nach *B* bedingtes Ws-Maß**.

5.2 Rechenregeln

Es seien $\llcorner A, B_j \lrcorner \in \mathfrak{A}$, $j \in J \subseteq \mathbb{N}$, mit $\bigcup\limits_{j \in J} B_j = \Omega$ und $B_i \cap B_j = \emptyset$ für $i \neq j$.

Weiterhin seien die bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A \mid B_j)$, $j \in J$, bekannt.

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = \sum_{j \in J} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)$$

Anwendung: Berechnung der (unbedingten) Wahrscheinlichkeit von A.[1]

Satz von Bayes: Es seien $P(A) \neq 0$, $P(B_j) \neq 0$.

$$P(B_i \mid A) \overset{\text{def}}{=} \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)} \overset{\text{def}}{=} \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{P(A)} \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{P(A \mid B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j \in J} P(A \mid B_j) \cdot P(B_j)}$$

Anwendung: Berechnung der „umgekehrten“ bedingten Wahrscheinlichkeiten.

[1] Der Satz von der totalen Ws läßt sich leicht durch ein **Baumdiagramm** veranschaulichen.

6 Zufallsvariable

6.1 Definitionen

$\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ sei ein Ws-Raum.

- Eine Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt **(numerische) Zufallsvariable (ZV)**, genauer $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}$-ZV[2], auf dem Ws-Raum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ genau dann, wenn
$$X^{-1}(B) \in \mathfrak{A} \quad \forall\, B \in \mathfrak{B}.$$
- $P_X : \begin{cases} \mathfrak{B} & \to & [0,1] \\ B & \mapsto & P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \end{cases}$ heißt **Verteilung** der ZV X.
- $F : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & P_X(\,(-\infty, x]\,) \end{cases}$ heißt **Verteilungsfunktion (Vf)** der ZV X.

Eine ZV X heißt

- **diskret** genau dann, wenn der Wertebereich $W_X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ höchstens abzählbar ist. Dann gilt mit $p_i := P_X(\{x_i\})\,, i = 1, 2, \ldots$ und der **diskreten Dichtefunktion (Zähldichte)**
$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x \neq W_X \\ p_i & , \quad x = x_i \end{cases} \quad :$$
  - ◇ Verteilung $P_X(B) = \sum\limits_{x_i \in B} P_X(\{x_i\})$
  - ◇ Vf $F(x) = P_X(\,(-\infty, x]\,) = \sum\limits_{x_i \leq x} P_X(\{x_i\})$
- **stetig** genau dann, wenn eine nichtnegative, integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt\,.$$
f heißt dann **Dichtefunktion** oder kurz **Dichte**.

6.2 Schreibweisen

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} P_X(\,(-\infty, x]\,) \overset{\text{def}}{=} P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}) \overset{\text{Bez}}{=} P(„X \leq x“)$$

[2]Wenn man die Rolle der σ-Algebren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ besonders betonen möchte. $\mathfrak{B}$ bezeichnet dabei die σ-Algebra der **Borel-Mengen** auf $\mathbb{R}$, die beispielsweise von allen offenen (abgeschlossenen,…) Mengen in $\mathbb{R}$ erzeugt wird.

6.3 Eigenschaften einer Vf F

- monoton nicht fallend
- rechtsstetig, d.h. $F(a) = F(a+) := \lim\limits_{(0<)h\to 0} F(a+h)$, für $a \in \mathbb{R}$
- $F(-\infty) := \lim\limits_{a\to-\infty} F(a) = 0$
  $F(+\infty) := \lim\limits_{a\to+\infty} F(a) = 1$
- $P_X(\,(a,b]\,) = F(b) - F(a)$, falls $a < b$
- $P_X(\{a\}) = F(a) - F(a-)$
- $P_X(\,(-\infty,a)\,) = F(a-) := \lim\limits_{(0<)h\to 0} F(a-h)$

6.4 Prüfsatz

Es seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P\rangle$ ein Ws-Raum und $\mathcal{E}$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{B}$. Dann gilt:

$$X : \Omega \to \mathbb{R} \quad \text{ist ZV} \quad \Leftrightarrow \quad X^{-1}(B) \in \mathfrak{A} \quad \forall\, B \in \mathcal{E}\,.$$

Zum Nachweis der Eigenschaften einer ZV genügt also bereits die Betrachtung eines beliebigen Erzeugendensystems von $\mathfrak{B}$.

6.5 Quantile

X sei eine ZV mit Vf F. Dann ist für $0 \le \alpha \le 1$ das **α-Quantil** von X bzw. F definiert als ein Wert q mit

$$P(„X \ge q“) \ge 1-\alpha \quad \text{und} \quad P(„X \le q“) \ge \alpha\,,$$

oder – äquivalent dazu – mit

$$\alpha \;\le\; F(q) \;\le\; \alpha + P(„X = q“)\,.$$

Falls F stetig und streng monoton ist, vereinfacht sich die obige Darstellung zu

$$F(q) = \alpha \quad \text{bzw.} \quad q = F^{-1}(\alpha).$$

Sprechweisen: Man sagt beispielsweise statt 0.1-Quantil auch 10%-Quantil. Das 50%-Quantil heißt **Median**.

7 Erwartungswert, Varianz

7.1 Definitionen

- X sei eine diskrete ZV mit Wertebereich $W_X = \{x_i \in \mathbb{R} \mid i \in I\}$. Dann heißen
  - $\diamond$ $E(X) := \sum_{i \in I} x_i \cdot P_X(\{x_i\})$ **Erwartungswert** von X, falls die gegebene Reihe *absolut* konvergiert, und
  - $\diamond$ $Var(X) := E\Big([X - E(X)]^2\Big) = \sum_{i \in I} [x_i - E(X)]^2 \cdot P_X(\{x_i\})$ **Varianz** von X, falls die angegebene Reihe konvergiert.
- X sei eine stetige ZV mit Dichte f. Dann heißen
  - $\diamond$ $E(X) := \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot f(t)\, dt$ **Erwartungswert** von X, falls das gegebene Integral *absolut* konvergiert, und
  - $\diamond$ $Var(X) := E\Big([X - E(X)]^2\Big) = \int_{-\infty}^{\infty} [t - E(X)]^2 \cdot f(t)\, dt$ **Varianz** von X, falls das angegebene Integral konvergiert.
- $\sqrt{Var(X)}$ heißt **Standardabweichung** der ZV X.
- Für $E(X) \neq 0$ heißt
$$c_X := \frac{\sqrt{Var(X)}}{E(X)}$$
Variationskoeffizient der ZV X.

7.2 Rechenregeln

Es seien X und Y Zufallsvariablen und $\llcorner a, b \lrcorner \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- $E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b$, speziell: $E(b) = b$
- $Var(a \cdot X + b) = a^2 \cdot Var(X)$
- $Var(X) = E[(X+b)^2] - [E(X)+b]^2$, speziell für $b = 0$: $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$ **(Verschiebungsregel)**
- $E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 0$, $Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = 1$, für $\mu := E(X)$, $\sigma := \sqrt{Var(X)} > 0$ **(Normierung)**

- $E(X) \leq E(Y)$, falls $X \leq Y$ und $\llcorner E(X), E(Y) \lrcorner < \infty$.
- $E(X) = \int\limits_0^\infty [1 - F(x)]\,dx$, falls $X \geq 0$ und $E(X) < \infty$.
- $E(X) = \sum\limits_{i=0}^\infty P(„X > i“)$, falls $W_X \subseteq \mathbb{N}$ und $E(X) < \infty$.

Zusätzlich sei nun $g : W_X \to \mathbb{R}$. Dann gilt (falls $E[g(X)]$ existiert)

- für eine diskrete ZV X: $E[g(X)] = \sum\limits_i g(x_i) \cdot P_X(\{x_i\})$
- für eine stetige ZV X mit Dichte f: $E[g(X)] = \int\limits_{-\infty}^\infty g(t) \cdot f(t)\,dt$, falls g meßbar ist[3]

7.3 Ungleichungen, Momente

Ungleichung von Markoff:

X sei eine ZV mit $E\left(|X - \mu|^k\right) < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

$$P(„|X - \mu| \geq c“) \leq \frac{E\left(|X - \mu|^k\right)}{c^k}$$

Bezeichnungen: Für $k \in \mathbb{N}$ heißen $E\left(|X - \mu|^k\right)$ ***k*-tes absolutes Moment bzgl. μ**, $E\left(|X|^k\right)$ ***k*-tes absolutes Moment** und $E\left(X^k\right)$ ***k*-tes Moment**.

Nach den obigen Formeln für $E[g(X)]$ gilt damit für $k \in \mathbb{N}$:

$$E\left(X^k\right) = \begin{cases} \sum\limits_i x_i^k \cdot P_X(\{x_i\}), & \text{falls } X \text{ diskret verteilt ist, bzw.} \\ \int\limits_{-\infty}^\infty t^k \cdot f(t)\,dt, & \text{falls } X \text{ stetig verteilt ist.} \end{cases}$$

Für $k = 2$ und $\mu = E(X)$ erhält man als Spezialfall die

Ungleichung von Tschebyscheff:

X sei eine ZV mit $Var(X) < \infty$ und $c \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:

$$P(„|X - E(X)| \geq c“) \leq \frac{Var(X)}{c^2}$$

[3] Dies gilt insbesondere, falls g (stückweise) stetig ist.

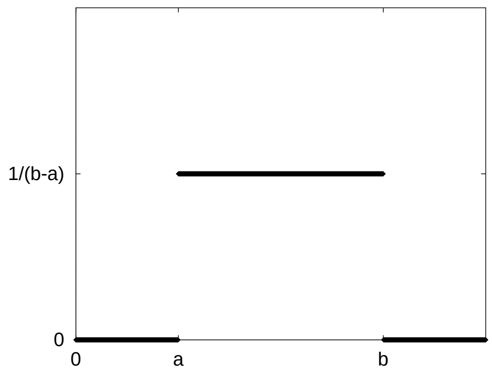
8 Stetige Zufallsvariablen

Gleich- oder Rechteckverteilung

X sei in (a,b) gleichverteilt, i.Z. $X \sim \mathcal{U}(a,b)$. Dann gilt:

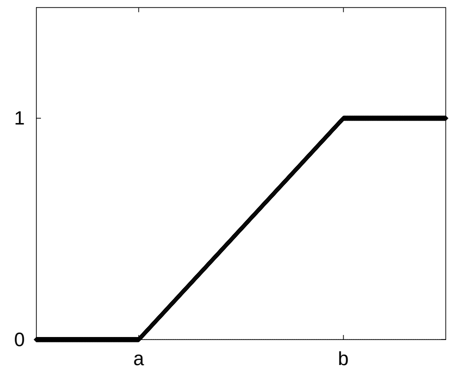
Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , \ x \in (a,b) \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$



Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & , \ x \in (a,b) \\ 1 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$



Erwartungswert/Varianz:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{und} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Bemerkung:

- Für $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ gilt:

$$P(\text{„}a \leq U \leq b\text{“}) = b - a \quad \forall\ 0 < a \leq b < 1\,,$$

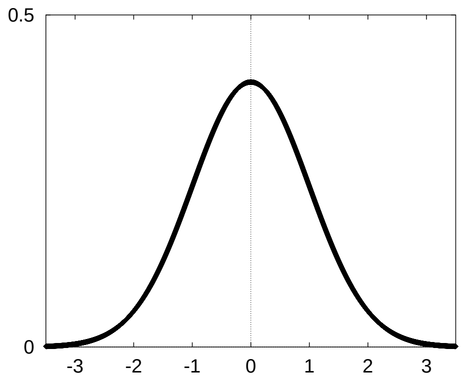
  d.h. die Wahrscheinlichkeit ist mit der Länge des Intervalls identisch.

Normalverteilung

X sei normalverteilt mit den Parametern μ und $\sigma^2 > 0$, i.Z. $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt:

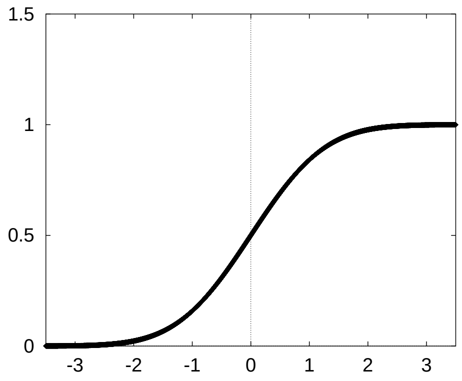
Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$



Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \int_{-\infty}^{x} \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dt$$



Erwartungswert/Varianz:

$$E(X) = \mu \qquad \text{und} \qquad Var(X) = \sigma^2$$

Bemerkungen:

- Die obigen Graphen erhält man für $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$. Die dazugehörige Vf wird mit Φ bezeichnet **(Standardnormalverteilung)**.
- F ist mit den üblichen Standardfunktionen wie exp, ln, sin, etc. nicht in geschlossener (i.e. integralfreier) Form darstellbar.

Rechenregeln für die Standardnormalverteilung:

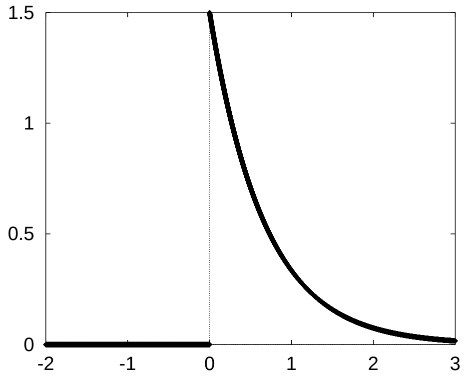
- $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
- Für das α-Quantil x_α von Φ gilt: $x_{1-\alpha} = -x_\alpha$

Exponentialverteilung

X sei exponentialverteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$, i.Z. $X \sim \mathcal{E}x(\lambda)$. Dann gilt:

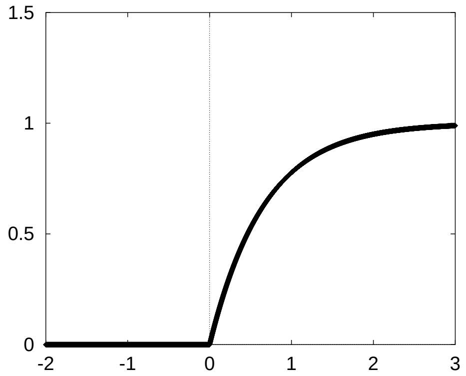
Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$



Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$



Erwartungswert/Varianz:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{und} \qquad Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

Bemerkungen:

- Die obigen Graphen erhält man für $\lambda = 1.5$.
- Die Exponentialverteilung ist charakterisiert durch die Eigenschaft der **Gedächtnislosigkeit:**

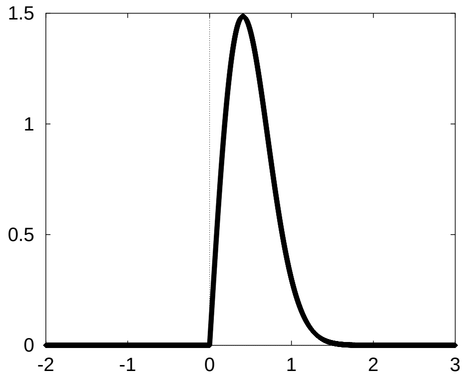
$$P(„X > x + y“ \mid „X > y“) \ = \ P(„X > x“) \quad \text{für } \llcorner x, y \lrcorner \in \mathbb{R}^+ .$$

Weibull-Verteilung

X sei Weibull-verteilt mit den Parametern $\llcorner\alpha, \beta\lrcorner > 0$, i.Z. $X \sim \mathcal{W}(\alpha, \beta)$. Dann gilt:

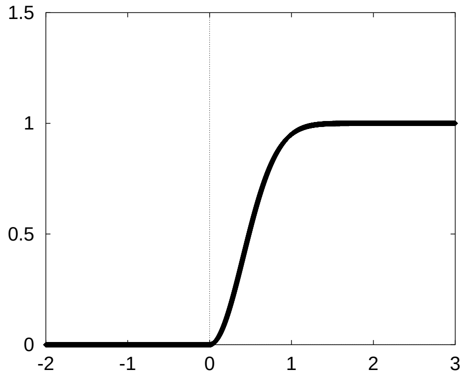
Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha \cdot \beta \cdot x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}} & , \; x > 0 \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$



Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x^{\beta}} & , \; x > 0 \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$



Erwartungswert/Varianz:

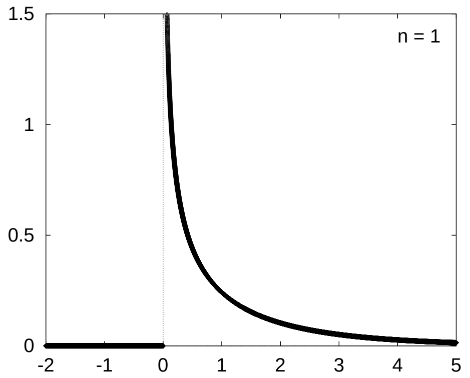
$$E(X) = \alpha^{-1/\beta} \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \qquad \text{und} \qquad Var(X) = \alpha^{-2/\beta} \cdot \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^2\right]$$

Bemerkungen:

- Die obigen Graphen erhält man für $\alpha = 3$ und $\beta = 2$.
- Für $\beta = 1$ erhält man als Spezialfall die Exponentialverteilung.
- Im Gegensatz zur Exponentialverteilung werden bei der Weibull-Verteilung Abnutzungserscheinungen von Geräten berücksichtigt.
- Zur Definition der Gamma-Funktion $\Gamma(\,\cdot\,)$ siehe $\rightarrow$ Gamma-Verteilung.

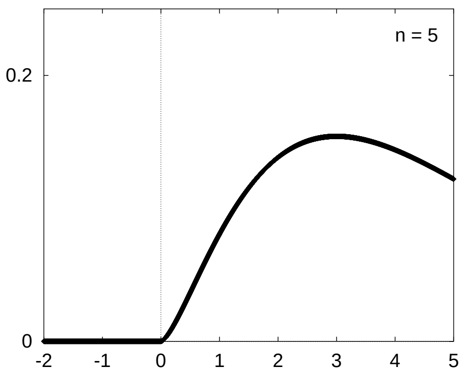
Gamma-Verteilung, χ^2-Verteilung

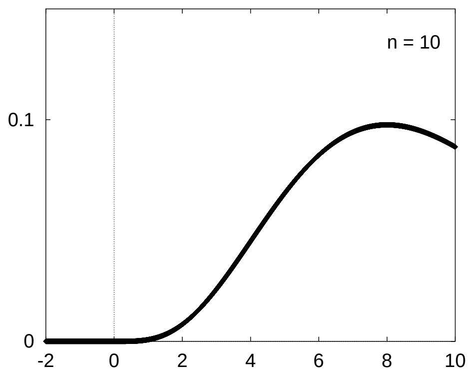
X sei Gamma-verteilt mit den Parametern $\lambda, s > 0$, i.Z. $X \sim Gamma(\lambda, s)$. Dann gilt:



Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^s x^{s-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(s)} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$





Erwartungswert/Varianz:

$$E(X) = \frac{s}{\lambda} \qquad \text{und} \qquad Var(X) = \frac{s}{\lambda^2}$$

Bemerkungen:

- Für $s = 1$ erhält man als Spezialfall die Exponentialverteilung,
- allgemein für $s \in \mathbb{N}$ die Erlang-Verteilung,
- für $s = \frac{n}{2}$ und $\lambda = \frac{1}{2}$ die χ^2-Verteilung bei n FG . Für $n = 1, 2$ fallen die Kurven monoton, für $n > 2$ weisen sie an der Stelle $x = n - 2$ ein Maximum auf.
- Die obigen Graphen stellen χ^2-Dichten dar bei 1, 5 und 10 FG .

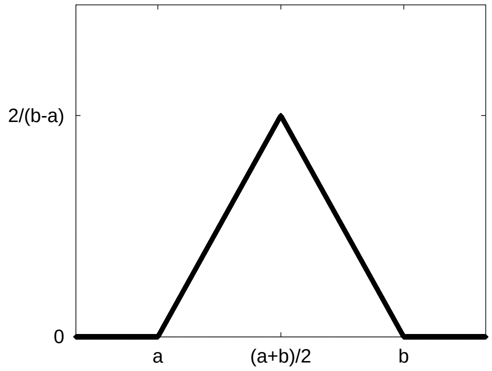
- Für die Gamma-Funktion $\Gamma(\,\cdot\,)$ gilt:
  - ◇ $\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$
  - ◇ $\Gamma(0.5) = \sqrt{\pi}\,,\ \Gamma(1) = 1$
  - ◇ $\Gamma(z+1) = z \cdot \Gamma(z)\,,$ speziell für $n \in \mathbb{N}:\ \Gamma(n+1) = n!$

Symmetrische Dreieckverteilung

X sei symmetrisch dreieckverteilt in (a, b). Dann gilt:

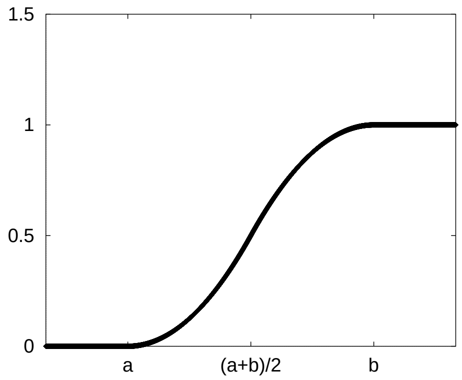
Dichte:

$$f(x) = \begin{cases} 4 \cdot \frac{x-a}{(b-a)^2} & , \ a < x < \frac{a+b}{2} \\ -4 \cdot \frac{x-b}{(b-a)^2} & , \ \frac{a+b}{2} \leq x < b \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$



Verteilungsfunktion:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq a \\ 2 \cdot \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^2 & , \ a < x < \frac{a+b}{2} \\ 1 - 2 \cdot \left(\frac{x-b}{b-a}\right)^2 & , \ \frac{a+b}{2} \leq x < b \\ 1 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$



Erwartungswert/Varianz:

$$E(X) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{und} \qquad Var(X) = \frac{(b-a)^2}{24}$$

Bemerkung:

- Eine in (a, b) symmetrisch dreieckverteilte ZV kann als Summe zweier unabhängiger, in $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ gleichverteilter Zufallsvariablen dargestellt werden.

9 Diskrete Zufallsvariable

A sei eine beliebige Menge. Dann bezeichnet

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & , \text{ für } x \in A \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

die **Indikatorfunktion** von A.

Diskrete Gleichverteilung

X sei diskret gleichverteilt auf der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Dann gilt:

Verteilung:

$$P_X(\{x\}) = \frac{1}{n} \cdot I_{\{x_1,\ldots,x_n\}}(x)$$

Interpretation: Ein Versuch besitze n mögliche Ausgänge $w_1, \ldots, w_n$, die aufgrund der Versuchsbedingungen oder des vorhandenen Wissens[4] mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten können.

Für $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{1, \ldots, n\}$ gilt ferner:

Erwartungswert/Varianz:

$$E(X) = \frac{n+1}{2} \quad \text{und} \quad Var(X) = \frac{n^2-1}{12}$$

Bernoulli-, Binomial- und Multinomialverteilung

X sei binomialverteilt mit den Parametern $p \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$, i.Z. $X \sim \mathcal{B}(p,n)$. Dann gilt mit $q := 1 - p$:

Verteilung:

$$P_X(\{x\}) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x} \cdot I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$$

[4] Wenn a priori keine Informationen vorhanden sind, die die möglichen Ausgänge untereinander auszeichnen, ist es sinnvoll, diese als gleichwahrscheinlich anzunehmen *(Prinzip der Gleichwahrscheinlichkeit, Laplace-Annahme)*.

Erwartungswert/Varianz:

$$E(X) = n \cdot p \quad \text{und} \quad Var(X) = n \cdot p \cdot q$$

Bemerkung: Für $n = 1$ erhält man die **Bernoulli-Verteilung** $\mathcal{B}(p) \equiv \mathcal{B}(p, 1)$.

Interpretation: p sei die Erfolgswahrscheinlichkeit bei der einmaligen Durchführung eines Versuchs (sog. **Bernoulli-Experiment**). Dann läßt sich eine $\mathcal{B}(p, n)$-verteilte Zufallsvariable als die Anzahl der Erfolge bei n voneinander unabhängigen Versuchsausführungen interpretieren.

Läßt man dagegen nicht nur zwei sich ausschließende Versuchsausgänge (Erfolg und Mißerfolg) zu, sondern $k > 2$ mit den Eintreffwahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots, p_k$, dann erhält man die sogenannte **Multinomialverteilung**

$$P_X(\{x_1, \ldots, x_k\}) = \binom{n}{x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_k} \cdot p_1^{x_1} \cdot p_2^{x_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{x_k},$$

die die Wahrscheinlichkeit angibt, daß bei n Versuchsausführungen genau x_i-mal der Ausgang i eintrifft, $i = 1, \ldots, k$.

Geometrische Verteilungen

X sei geometrisch verteilt, Y sei modifiziert geometrisch verteilt, jeweils mit dem Parameter $p \in (0, 1)$. Dann gilt:

Verteilung:

$$P_X(\{x\}) = p \cdot q^x \cdot I_{\{0,1,\ldots\}}(x) \quad \text{und} \quad P_Y(\{y\}) = p \cdot q^{y-1} \cdot I_{\{1,2,\ldots\}}(y)$$

Erwartungswert/Varianz:

$$E(X) = \frac{q}{p}, \quad E(Y) = \frac{1}{p} \quad \text{und} \quad Var(X) = Var(Y) = \frac{q}{p^2}$$

Interpretation: p sei die Erfolgswahrscheinlichkeit bei der einmaligen Durchführung eines Versuchs (sog. Bernoulli-Experiment). Dann gibt eine geometrisch verteilte Zufallsvariable die Anzahl der Mißerfolge bis zur ersten erfolgreichen Versuchsdurchführung an, eine modifiziert geometrisch verteilte Zufallsvariable dagegen die totale Anzahl von Versuchen bis zur ersten erfolgreichen Versuchsdurchführung. Folglich gilt $Y = X + 1$.

Hypergeometrische Verteilung

X sei hypergeometrisch verteilt mit den Parametern $M \in \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \ni n \leq M$ und $K \in \{0, 1, \ldots, M\}$, i.Z. $X \sim \mathcal{H}(M, K, n)$. Dann gilt:

Verteilung:

$$P_X(\{x\}) = \frac{\binom{K}{x} \cdot \binom{M-K}{n-x}}{\binom{M}{n}} \cdot I_{\{0,1,\ldots,n\}}(x)$$

Erwartungswert/Varianz:

$$E(X) = n \cdot \frac{K}{M} \quad \text{und} \quad Var(X) = n \cdot \frac{K}{M} \cdot \left(1 - \frac{K}{M}\right) \cdot \frac{M-n}{M-1}$$

Interpretation: Es seien M Objekte gegeben, von denen genau K besonders gekennzeichnet sind (z.B. als Ausschuß). Dann gibt die hypergeometrische Verteilung die Wahrscheinlichkeit an, daß in einer Stichprobe vom Umfang $n \leq M$ (Ziehen ohne Zurücklegen) genau x gekennzeichnete Objekte sind.

Poisson-Verteilung

X sei Poisson-verteilt mit dem Parameter $\lambda > 0$, i.Z. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Dann gilt:

Verteilung:

$$P_X(\{x\}) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^x}{x!} \cdot I_{\{0,1,\ldots\}}(x)$$

Erwartungswert/Varianz:

$$E(X) = \lambda \quad \text{und} \quad Var(X) = \lambda$$

Interpretation: Die Poisson-Verteilung ist eine typische Verteilung einer sogenannten **Zählvariablen**, wie z.B. der Anzahl von Partikeln, die von einer radioaktiven Substanz pro Zeiteinheit ausgestrahlt werden, der Anzahl von Tippfehlern auf einer Buchseite oder der Anzahl von Jobs, die in einem bestimmten Zeitintervall eintreffen.

10 Funktionen von Zufallsvariablen

10.1 Transformationsformel für Dichten

Die ZV $X = (X_1, \dots X_n)$ habe die Dichte $f(x) \equiv f(x_1, \dots, x_n)$. $T := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) > 0\}$ bezeichne den Träger von f. Ferner seien

- $\varphi : T \to W \subseteq \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare, (stückweise) bijektive Abbildung[5] und
- $J_{\varphi^{-1}} := \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{1 \le \llcorner i,j \lrcorner \le n} := \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$

  die **Funktional-** oder **Jacobi-Matrix** von φ^{-1}.

Dann gilt für die Dichte $g(y_1, \dots, y_n)$ der ZV $Y := \varphi(X)$:

$$g(y) \equiv g(y_1, \dots, y_n) = \begin{cases} f[\underbrace{\varphi^{-1}(y)}_{=x}] \cdot |\det J_{\varphi^{-1}}| & , \quad y \in W \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Bemerkung: Für sogenannte Nullmengen[6] N gilt $\int_N f(x)\,dx = 0$. Die Bijektivität von φ kann vielfach dadurch erreicht werden, daß f auf diesen Nullmengen zu Null gesetzt wird, also T verkleinert wird.

Anwendungen:

- Die stetige ZV $X = (X_1, X_2)$ habe die Dichte $f(x_1, x_2)$. Dann besitzt die Summe $Z := X_1 + X_2$ die Dichte

  $$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z - t)\,dt\,.$$

  Falls X_1 und X_2 unabhängig sind mit den Dichten f_1 und f_2, vereinfacht sich die obige Formel zur **Faltungs-Formel**

  $$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) \cdot f_2(z - t)\,dt\,.$$

- Die stetige ZV $X = (X_1, X_2)$ habe die Dichte $f(x_1, x_2)$. Dann besitzt die Differenz $Y := X_1 - X_2$ die Dichte

  $$h(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, t - y)\,dt\,.$$

[5] d.h. für $y := \varphi(x)$ gilt $x = \varphi^{-1}(y)$

[6] i.e. Teilmengen N von $\mathbb{R}^n$ mit $0 \le \dim N \le n - 1$; Teilmengen der Dimension 0 sind Punkte, Teilmengen der Dimension 1 z.B. Geraden, ...

10.2 Inverse Transformation

Es seien U in $(0,1)$ gleichverteilt und X eine ZV mit streng monotoner und stetiger Vf F. Dann hat die ZV $F^{-1}(U)$ ebenfalls die Vf F.

10.3 Simulation diskreter Zufallsvariablen

Es seien $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ und X diskret verteilt mit Wertebereich $W_X = \{x_j \mid j = 1,2,3,\ldots\}$. Dann hat die ZV Y mit

$$Y = \begin{cases} x_1 & , \quad 0 < U < P_X(\{x_1\}) \\ x_j & , \quad \sum\limits_{i=1}^{j-1} P_X(\{x_i\}) \le U < \sum\limits_{i=1}^{j} P_X(\{x_i\}) \,, \ j = 2,3,\ldots \end{cases}$$

ebenfalls die Verteilung P_X.

10.4 Eigenschaften spezieller Verteilungen

10.4.1 Normalverteilung

- Die Zufallsvariablen X_i seien unabhängig[7] $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$-verteilt, $i = 1,\ldots,n$ und $\llcorner a, b_1, \ldots, b_n \lrcorner \in \mathbb{R}$ mit $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 > 0$. Dann ist die ZV
$$Y = a + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \cdot X_i\right)$$
$\mathcal{N}\left(a + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \cdot \mu_i, \sum\limits_{i=1}^{n} b_i^2 \cdot \sigma_i^2\right)$-verteilt.
- Die Zufallsvariablen X_i seien unabhängig $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt, $i = 1,\ldots,n$. Dann ist die ZV
$$Z = X_1^2 + \ldots + X_n^2$$
χ^2-verteilt mit n Freiheitsgraden.

10.4.2 Exponentialverteilung

Die Zufallsvariablen X_i seien unabhängig $\mathcal{E}x(\lambda_i)$-verteilt, $i = 1,\ldots,n$. Dann ist das Minimum der X_i wiederum exponentialverteilt mit dem Parameter $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

10.4.3 Poisson-Verteilung

Die Zufallsvariablen X_i seien unabhängig Poisson-verteilt mit den Parametern $\lambda_i > 0$, $i = 1,\ldots,n$. Dann ist die Summe der X_i wiederum Poisson-verteilt mit dem Parameter $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$.

[7] zur exakten Definition siehe $\rightarrow$ Mehrdimensionale Zufallsvariablen

11 Mehrdimensionale Zufallsvariablen

11.1 Definitionen

- Eine zweidimensionale Zufallsvariable (X, Y) heißt
  - ◇ **diskret** genau dann, wenn der Wertebereich $W_{(X,Y)} = \{(x_i, y_j) \mid \llcorner i, j \lrcorner \in \mathbb{N}\}$ höchstens abzählbar ist. Analog zu eindimensionalen Zufallsvariablen bezeichnen
  $$f(x,y) = \begin{cases} P_{X,Y}(\{(x_i, y_j)\}) & , \quad x = x_i, y = y_j \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$
  die **diskrete Dichtefunktion** und
  $$F(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} P(„X \leq x“\,, „Y \leq y“) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} f(x_i, y_j)$$
  die **diskrete Verteilungsfunktion**.
  - ◇ **stetig** genau dann, wenn eine nichtnegative, integrierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ existiert, die sog. **Dichtefunktion**, so daß die **Verteilungsfunktion** F folgende Gestalt besitzt:
  $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u,v)\, du dv\,.$$
- (X, Y) sei eine zweidimensionale ZV mit Dichte f.

Bezeichnungen	stetiger Fall	diskreter Fall
Randverteilungen	$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\, dv\right] du$	$F_X(x) = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_i} f(x_i, y_i)$
	$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\, du\right] dv$	$F_Y(y) = \sum_{x_i} \sum_{y_i \leq y} f(x_i, y_i)$
Randdichten	$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\, dt$	$f_X(x) = \sum_{y_i} f(x, y_i)$
	$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,y)\, dt$	$f_Y(y) = \sum_{x_i} f(x_i, y)$

- Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen **unabhängig**

  $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ihre gemeinsame Verteilung ist gleich dem Produkt der Randverteilungen

  $\Leftrightarrow$ ihre gemeinsame Dichte ist gleich dem Produkt der Randdichten

  $\Leftrightarrow$ $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} „X_i = x_i“\right) = \prod_{i=1}^{n} P(„X_i = x_i“)$ für diskrete X_i

- Die **Kovarianz** zweier ZV X und Y ist definiert als
$$Cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = E\left([X - E(X)] \cdot [Y - E(Y)]\right)\,.$$

- Die **Kovarianzmatrix** zweier ZV X und Y ist definiert als
$$K_{X,Y} = \begin{pmatrix} Var(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & Var(Y) \end{pmatrix}.$$
- Der **Korrelationskoeffizient** zweier ZV X und Y ist definiert als
$$\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)} \cdot \sqrt{Var(Y)}} \in [-1,1].$$
- Zwei Zufallsvariablen X und Y heißen **unkorreliert** genau dann, wenn
$$\rho(X,Y) = 0.$$

11.2 Rechenregeln

- $X_1, \ldots, X_n$ seien Zufallsvariable. Dann gilt:
  - ◇ $E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$
  - ◇ $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} Cov(X_i, Y_j)$
- $X_1, \ldots, X_n$ seien *unabhängige* Zufallsvariable. Dann gilt:
  - ◇ $E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$ (d.h. aus unabhängig folgt unkorreliert[8])
  - ◇ $Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

11.3 Zweidimensionale Normalverteilung

Eine ZV (X_1, X_2) heißt **zweidimensional normalverteilt** mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}^2$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{2,2}$, i.Z. $(X_1, X_2) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, genau dann, falls für die Dichte f gilt:
$$f(x_1, x_2) = \frac{\sqrt{\det(\Sigma^{-1})}}{2 \cdot \pi} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot (x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right]$$
mit einer positiv definiten Matrix Σ ‡.

Für die Parameter μ und Σ gilt:
$$E(x_i) = \mu_i\,, \ i = 1,2 \qquad \text{und} \qquad \Sigma = K_{X_1,X_2}$$

[8] Die Umkehrung gilt nur für die mehrdimensionale Normalverteilung (s.u.).

‡ $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$ heißt **positiv definit** $:\Leftrightarrow$ (1) $\Sigma = \Sigma^T$
(2) $x^T \Sigma x > 0\,, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$
($\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von Σ sind positiv)
($\Leftrightarrow$ $\det(\Sigma) > 0$ und $\sigma_{11} > 0$)

12 Zentraler Grenzwertsatz

$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariable mit gemeinsamem Erwartungswert μ und gemeinsamer Varianz σ^2. Dann sind die Zufallsvariablen

$$Y_n := X_1 + \ldots + X_n$$

asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert $n \cdot \mu$ und Varianz $n \cdot \sigma^2$ und

$$Z_n := \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \quad \left[= \bar{X} \right]$$

asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2/n, i.Z.

$$\lim_{n \to \infty} P\left(„\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (Z_n - \mu) \leq x“ \right) = \Phi(x) \, .$$

Faustregel:

Ab $n \geq 100$ können Y_n bzw. Z_n als normalverteilt betrachtet werden.

13 Schätzen von Parametern

13.1 Definitionen

Es seien die Verteilung P_X einer ZV X in Abhängigkeit eines unbekannten Parameters θ und n unabhängige, identisch P_X-verteilte Stichprobenvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gegeben.

- Eine ZV $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ heißt **Schätzvariable** oder **Schätzer** für den unbekannten Parameter θ, wenn θ in T nicht vorkommt[9].
- Ein **Schätzwert** ist eine Realisierung der Schätzvariablen.
- Eine Schätzvariable heißt **erwartungstreu** oder **unverzerrt** für $\tau : \theta \mapsto \tau(\theta) \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn
$$E\left[T(X_1, \ldots, X_n)\right] = \tau(\theta)\,.$$
- Die Differenz $E\left[T(X_1, \ldots, X_n)\right] - \tau(\theta)$ heißt **Bias** der Schätzvariablen.
- Eine erwartungstreue Schätzvariable T für $\tau(\theta)$ heißt **effizient** genau dann, wenn es für $\tau(\theta)$ keine erwartungstreue Schätzvariable T^* gibt mit
$$Var(T^*) < Var(T)\,.$$

13.2 Maximum-Likelihood

$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige, identisch verteilte Stichprobenvariablen mit der Dichte $f(x;\theta)$, wobei θ ein unbekannter Parameter ist, der geschätzt werden soll.

- $L(x_1, \ldots, x_n; \theta) := \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)$ heißt als Funktion von θ **Likelihood-Funktion** der Stichprobe.
- Ein **Maximum-Likelihood-Schätzwert** $\hat\theta = \hat\theta(x_1, \ldots, x_n)$ ist ein Wert, an dem die Likelihood-Funktion ein Maximum annimmt. Die dazugehörige ZV $\hat\theta(X_1, \ldots, X_n)$ heißt **Maximum-Likelihood-Schätzer** für θ.
- Üblicherweise bildet man zur Bestimmung des Maximums nicht die Ableitung von L, sondern (zur Vereinfachung der Rechnung) von $\ln(L) = \sum\limits_{i=1}^{n} \ln(f(x_1, \ldots, x_n;\theta)$. Am Wert von $\hat\theta$ ändert sich dabei nichts, da $\ln(\,\cdot\,)$ streng monoton ist.

[9] Dies ist beispielsweise bereits für alle konstanten Funktionen erfüllt; die Güte des jeweiligen Schätzers wird durch die nachfolgenden Eigenschaften bestimmt.

13.3 Konfidenzintervalle

13.3.1 Definitionen

Anstatt auf der Basis einer Stichprobenrealisierung den Wert des Parameters θ zu schätzen, kann man auch versuchen, ein Intervall $[t_1, t_2]$ anzugeben, das mit einer vorgegebenen Ws $1-\alpha$ den wahren Wert von θ enthält. Gesucht sind also zwei Zufallsvariablen $T_1 = T_1(X_1, \ldots, X_n)$ und $T_2 = T_2(X_1, \ldots, X_n)$, so daß

$$P\left(„T_1 \leq \theta \leq T_2“\right) = 1 - \alpha\,.$$

- $1-\alpha$ heißt **Konfidenzzahl** oder **Konfidenzniveau**.
- $[T_1,\, T_2]$ heißt **Konfidenzintervall** und die Grenzen entsprechend **untere** bzw. **obere Konfidenzgrenze**.

13.3.2 Normalverteilung

Nun sei eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-Verteilung zugrundegelegt mit unbekanntem μ und bekanntem σ^2. Dann lautet das symmetrische Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau $1-\alpha$:

$$\left[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot x_{1-\alpha/2}\,,\ \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot x_{1-\alpha/2}\right],$$

wobei $x_{1-\alpha/2}$ das $(1-\alpha/2)$-Quantil von Φ bezeichnet.

14 Tests

14.1 Allgemeiner Signifikanztest

Ziel: Aufgrund einer (unabhängigen) Stichprobe $X_1, \ldots, X_n$ mit Realisierung $x_1, \ldots, x_n$ sollen Aussagen über einen unbekannten Parameter der gegebenen Verteilung gemacht werden, die mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit erfüllt sind.

Vorgehensweise:

1) Annahme über die Verteilung (in Abh. eines unbekannten Parameters μ)
2) Formulierung der Nullhypothese $H_0 \ : \ \mu \in \Theta_0$ (Aussage über μ)
3) Wahl einer Testgröße $T = T(X_1, \ldots, X_n)$ und Bestimmung ihrer Verteilung unter H_0
4) Wahl eines Testniveaus $\alpha \in \{0.05, 0.01, 0.001, \ldots\}$
5) Bestimmung des kritischen Bereichs $K \subset \mathbb{R}^n$ von H_0 zum Niveau α, d.h. Wahl von K mit

$$P_{H_0}[\text{„}(X_1, \ldots, X_n) \in K\text{“}] \overset{(\leq)}{=} \alpha^{\dagger}$$

6) Entscheidungsregel:

<u>Falls</u> $(x_1, \ldots, x_n) \in K$,	wird H_0 abgelehnt
<u>sonst</u>	besteht kein Grund, H_0 abzulehnen.

Bezeichnungen:

- Sicherheits-Ws $1-\alpha$: $\quad P_{H_0}[\text{„}(X_1, \ldots, X_n) \notin K\text{“}] \geq 1-\alpha$
- Fehler 1. Art (H_0 wird irrtümlich abgelehnt): $\quad P_{H_0}[\text{„}(X_1, \ldots, X_n) \in K\text{“}] \leq \alpha^{\ddagger}$
- Fehler 2. Art (H_0 wird irrtümlich angenommen): $\quad P_{\mu}[\text{„}(X_1, \ldots, X_n) \notin K\text{“}]\,,\ \mu \in \bar{\Theta}_0$
  ($H_1 \ : \ \mu \in \bar{\Theta}_0$ heißt dann Alternative)
- Operationscharakteristik $\beta : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \quad [0,1] \\ \mu & \mapsto \quad P_{\mu}[\text{„}(X_1, \ldots, X_n) \notin K\text{“}] \end{cases}$
- Gütefunktion $\quad g(\mu) := 1 - \beta(\mu)$

† $P_{H_0}(A)$ bezeichnet die Wahrscheinlichkeit von A, falls die Nullhypothese H_0, d.h. $\mu \in \Theta_0$, gilt.
‡ Der Test ist genau so konstruiert, daß der Fehler 1.Art $\leq \alpha$ ist.

14.2 Gauß-Test

ad 1) $\llcorner X_1, \ldots, X_n \lrcorner$ seien unabhängig und $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit unbekanntem μ und bekanntem σ^2. $x_1, \ldots, x_n$ seien die entsprechenden Realisierungen.

ad 2) Zweiseitig : $\mu = \mu_0$
Einseitig : $\mu \leq \mu_0$ oder $\mu \geq \mu_0$

Die Alternative ist beim Signifikanztest in den hier betrachteten Fällen genau das Komplement der Nullhypothese, siehe auch ad 5).

ad 3) Zweiseitig :

Unter H_0 gilt:

$$\bar{X} \sim \mathcal{N}\left(\mu_0 \, , \frac{\sigma^2}{n}\right), \text{ d.h. } T(X_1, \ldots, X_n) := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{X} - \mu_0) \sim \mathcal{N}(0,1)$$

Einseitig :

siehe ad 5)

ad 5) Je nach Wahl der Nullhypothese unterscheidet man folgende drei Fälle:

Nullhypothese H_0	Alternative H_1	Krit.Bereich K
$\mu = \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\lvert T \rvert > x_{1-\alpha/2}$ [‡]
$\mu \leq \mu_0$	$\mu > \mu_0$	$T > x_{1-\alpha}$
$\mu \geq \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$T < x_\alpha$

[‡] als Abkürzung für $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \, : \, \lvert T(x_1, \ldots, x_n) \rvert > x_{1-\alpha/2}\}$

A Wertetabelle der Standardnormalverteilung

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{u} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \;=\; 1 - \Phi(-u)\,, \quad \text{z.B.} \;\; \Phi(1.32) = 0.90658\,.$$

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52791	0.53188	0.53586
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56356	0.56750	0.57143	0.57535
0.2	0.57926	0.58317	0.58707	0.59096	0.59484	0.59871	0.60257	0.60642	0.61026	0.61409
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64803	0.65173
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68438	0.68793
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71904	0.72240
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75175	0.75490
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78230	0.78524
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81057	0.81327
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83646	0.83891
1.0	0.84135	0.84375	0.84614	0.84850	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85993	0.86214
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88100	0.88298
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89973	0.90148
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92786	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95819	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.99010	0.99036	0.99061	0.99086	0.99111	0.99134	0.99158
2.4	0.99180	0.99202	0.99224	0.99245	0.99266	0.99286	0.99305	0.99324	0.99343	0.99361
2.5	0.99379	0.99396	0.99413	0.99430	0.99446	0.99461	0.99477	0.99492	0.99506	0.99520
2.6	0.99534	0.99547	0.99560	0.99573	0.99585	0.99598	0.99609	0.99621	0.99632	0.99643
2.7	0.99653	0.99664	0.99674	0.99683	0.99693	0.99702	0.99711	0.99720	0.99728	0.99736
2.8	0.99744	0.99752	0.99760	0.99767	0.99774	0.99781	0.99788	0.99795	0.99801	0.99807
2.9	0.99813	0.99819	0.99825	0.99831	0.99836	0.99841	0.99846	0.99851	0.99856	0.99861
3.0	0.99865	0.99869	0.99874	0.99878	0.99882	0.99886	0.99889	0.99893	0.99896	0.99900
3.1	0.99903	0.99906	0.99910	0.99913	0.99916	0.99918	0.99921	0.99924	0.99926	0.99929
3.2	0.99931	0.99934	0.99936	0.99938	0.99940	0.99942	0.99944	0.99946	0.99948	0.99950
3.3	0.99952	0.99953	0.99955	0.99957	0.99958	0.99960	0.99961	0.99962	0.99964	0.99965
3.4	0.99966	0.99968	0.99969	0.99970	0.99971	0.99972	0.99973	0.99974	0.99975	0.99976
3.5	0.99977	0.99978	0.99978	0.99979	0.99980	0.99981	0.99981	0.99982	0.99983	0.99983
3.6	0.99984	0.99985	0.99985	0.99986	0.99986	0.99987	0.99987	0.99988	0.99988	0.99989
3.7	0.99989	0.99990	0.99990	0.99990	0.99991	0.99991	0.99992	0.99992	0.99992	0.99992
3.8	0.99993	0.99993	0.99993	0.99994	0.99994	0.99994	0.99994	0.99995	0.99995	0.99995
3.9	0.99995	0.99995	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99996	0.99997	0.99997

Zusatzaufgaben

1 Aufgaben

1.1 Deskriptive Statistik

Z1 nach [Kredler, 1993]

Es sei eine Meßreihe $x_1, \ldots, x_n$ gegeben mit Mittelwert $\bar{x}$ und emp. Varianz s_x^2 .

a) Wie ändern sich $\bar{x}$ und s_x^2 durch Hinzunahme eines weiteren Meßpunktes x_{n+1} ?

b) Man berechne $\bar{x}$ und s_x^2 für die konkrete Meßreihe

$$501, \quad 498, \quad 505, \quad 495, \quad 503, \quad 496, \quad 498, \quad 502, \quad 497, \quad 495$$

per Hand. Wie ändern sich $\bar{x}$ und s_x^2, wenn die zusätzlichen Werte 504 und 506 berücksichtigt werden?

1.2 Ereignisräume und -algebren

Z2

Es seien Ω eine Menge und $\llcorner A, B, C \lrcorner \in 2^\Omega$. Man zeige:

$$(A \triangle B) \triangle C \; = \; A \triangle (B \triangle C) \, .$$

Z3

Es seien Ω eine Menge und $A_i \in 2^\Omega$, $i = 1, \ldots, n$. Man zeige:

$$\begin{aligned} & A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n \\ = \; & \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A_i \text{ für eine ungerade Anzahl von Indizes } i \in \{1, \ldots, n\}\} \, . \end{aligned}$$

Z4 [Chow & Teicher, 1978]

Es seien Ω eine Menge und $\llcorner A, B, C \lrcorner \in 2^\Omega$. Man zeige:

$$C = A \triangle B \implies A = C \triangle B \, .$$

Zusatzfrage: Gilt auch die Umkehrung?

1.3 Wahrscheinlichkeiten

Z5

a) Angenommen, es gilt $\binom{n}{20} = \binom{n}{30}$. Welchen Wert hat n?

b) Angenommen, es gilt $\binom{20}{n} = \binom{20}{n-6}$. Welchen Wert hat n?

Z6 [Kredler, 1993]

Es sei $\Omega = \{\omega_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$. Gibt es Konstanten $\llcorner c_1, c_2, c_3 \lrcorner \in \mathbb{R}$, so daß für folgende Festlegungen die Axiome eines Ws-Raumes $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ erfüllt sind? Man begründe seine Antworten.

a) $P(\{\omega_i\}) = c_1 \cdot \dfrac{\lambda^i}{i!}\,, \quad \lambda > 0\,,\ i \in \mathbb{N}_0\,.$

b) $P(\{\omega_i\}) = c_2 \cdot \lambda^i\,, \quad 0 < \lambda < 1\,,\ i \in \mathbb{N}_0\,.$

c) $P(\{\omega_i\}) = c_3 \cdot \dfrac{1}{i}\,, \quad i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad P(\{\omega_0\}) = 0\,.$

Z7 [Barth & Haller, 1985]

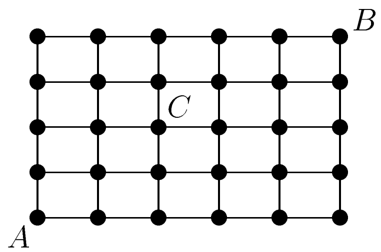
Antoine Gombaud Chevalier de Méré [1607-1685] war dem Glücksspiel zugetan und wußte aus langjähriger Erfahrung, daß es beim viermaligen Werfen eines Würfels günstig sei, auf das Auftreten mindestens einer Sechs zu setzen. Er überlegte sich nun, daß es ebenso günstig sein müßte, bei 24 Würfen mit 2 Würfeln auf das Auftreten mindestens einer Doppelsechs zu setzen.
Seine plausible Überlegung war folgende: Die Zahl der möglichen Ereignisse pro Wurf ist im 1. Fall 6, die Zahl der Würfe 4. Im 2. Fall gibt es $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten, also müssen $6 \cdot 4 = 24$ Würfe zugelassen werden. Bei dem neuen Spiel verlor de Méré jedoch öfter als ihm lieb war. Diese bittere Erfahrung erschütterte sein Vertrauen in die Mathematik, so daß er Blaise Pascal [1623-1662] gegenüber behauptete, daß die Mathematik lüge, wie Pascal am Mittwoch, dem 29. Juli 1654 an Pierre de Fermat [1601-1665] schrieb. Die Lösung dieses Problems teilte er allerdings nicht mit, da sie leicht zu erhalten sei…

Man zeige also, daß es wahrscheinlicher ist, bei 4 Würfen mit einem Würfel wenigstens eine Sechs zu erhalten als bei 24 Würfen mit zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs.

Z8 nach [LEHN ET AL., 1988], Aufgabe 11

Am Ende einer Party verabschieden sich die sechs Gäste, zwei Paare und zwei Einzelpersonen, vom Gastgeberpaar und voneinander mit Händedruck. Wie oft werden Hände gedrückt?

Z9 [KREDLER, 1993]



Im nebenstehenden Raster darf man nur nach rechts oder nach oben laufen.

Wieviele Wege gibt es von A nach B, die über C führen?

Z10 [KREDLER, 1993]

5 Studenten stehen Schlange für ein Skriptum zum Preis von 10 DM. 3 Studenten haben einen 10-DM-Schein, die beiden anderen einen 20-DM-Schein.

a) Man gebe aufgrund des Prinzips der Gleichwahrscheinlichkeit (Laplace-Annahme) einen geeigneten Ws-Raum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ an.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei anfangs leerer Kasse der Verkauf ohne Geldwechselschwierigkeiten abläuft?

Z11

Auf einem Parallelrechner sollen $k \in \mathbb{N}$ voneinander unterscheidbare Jobs auf $n > 1$ Prozessoren verteilt werden, wobei jeder Prozessor auch mehrere Jobs erhalten darf. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, daß

a) mindestens ein

b) genau ein

Prozessor keinen Job zugeteilt bekommt.

Z12

Es seien $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ ein Ws-Raum und $\llcorner A_1, \ldots, A_n \lrcorner \in \mathfrak{A}$ unabhängige Ereignisse. Man bestimme

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$$

in Abhängigkeit von $P(A_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Z13

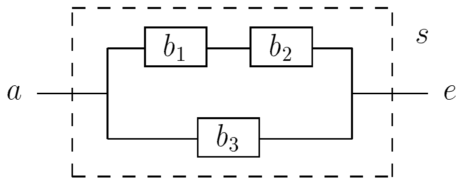
Es sei $\langle \Omega, 2^\Omega, P \rangle$ ein Ws-Raum mit

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \quad \text{und} \quad P(\{\omega_i\}) = \frac{1}{4}, \; i = 1, \ldots, 4 .$$

Man zeige, daß die Ereignisse $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$ und $C = \{\omega_1, \omega_3\}$ zwar paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind.

Z14

Es sei das folgende, aus den Bauteilen b_1 bis b_3 bestehende System $s = \{b_1, \ldots, b_3\}$ gegeben, das genau dann ausfällt, wenn keine intakte Verbindung mehr zwischen a und e existiert:



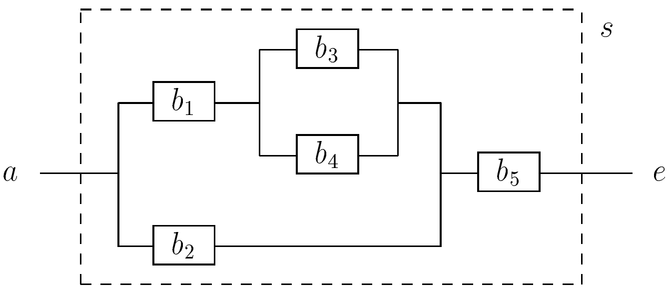
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß s bis zum Zeitpunkt t nicht ausfällt, wenn

- der Ausfall eines beliebigen Bauteils unabhängig vom Ausfall der anderen sein soll, und
- $P(B_i)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß das Bauteil b_i vor dem Zeitpunkt t nicht ausfällt mit

$$P(B_1) = 0.8 , \qquad P(B_2) = 0.9 , \qquad P(B_3) = 0.6 \text{ ?}$$

Z15

Es sei das folgende, aus den Bauteilen b_1 bis b_5 bestehende System $s = \{b_1, \ldots, b_5\}$ gegeben, das genau dann ausfällt, wenn keine intakte Verbindung zwischen a und e besteht:



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß s bis zum Zeitpunkt t nicht ausfällt, wenn

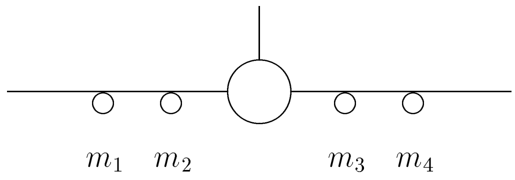
- der Ausfall eines beliebigen Bauteils unabhängig vom Ausfall der anderen sein soll, und
- $P(B_i)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß das Bauteil b_i vor dem Zeitpunkt t nicht ausfällt mit

$$P(B_1) = 0.8\,, \quad P(B_2) = 0.9\,, \quad P(B_3) = 0.6\,, \quad P(B_4) = 0.6\,, \quad P(B_5) = 0.8\ ?$$

Hinweis: Man zerlege s zunächst in einfachere Teilsysteme wie $s_1 = \{b_3, b_4\}$, $s_2 = \{b_1, s_1\}$, ...

Z16

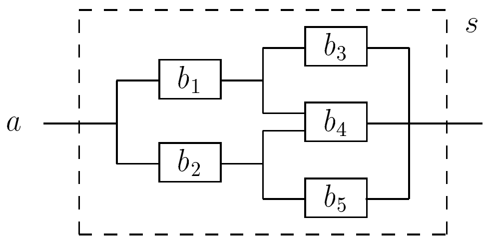
Ein Flugzeug



mit den Motoren m_1 bis m_4 stürzt ab, wenn auf mindestens einer Seite beide Motoren ausfallen. Die Ausfälle einzelner Motoren werden als unabhängige Ereignisse betrachtet mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 5%. Man berechne die Wahrscheinlichkeit, daß das Flugzeug nicht abstürzt.

Z17

Es sei das folgende, aus den Bauteilen b_1 bis b_5 bestehende System $s = \{b_1, \ldots, b_5\}$ gegeben, das genau dann ausfällt, wenn keine intakte Verbindung zwischen a und e besteht:



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(S)$, daß s bis zum Zeitpunkt t nicht ausfällt, wenn

- der Ausfall eines beliebigen Bauteils unabhängig vom Ausfall der anderen sein soll, und
- $P(B_i)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß das Bauteil b_i vor dem Zeitpunkt t nicht ausfällt mit

$$P(B_1) = 0.8\,,\quad P(B_2) = 0.9\,,\quad P(B_3) = 0.6\,,\quad P(B_4) = 0.6\,,\quad P(B_5) = 0.8\ ?$$

Hinweis: Man berechne zunächst $P(S \mid B_j)$ bzw. $P(S \mid \bar{B}_j)$ für ein geeignetes $j \in \{1, \ldots, 5\}$.

Z18

Den Materialien zur Entwicklung der TU München [TUM, 1994] lassen sich folgende Daten über unsere Informatik-StudentInnen entnehmen:

Studienbeginn	StudentInnenzahl im Fachsemester					
	1	3	5	7	9	11
WS 1987	432	385	344	309	276	242
WS 1988	419	357	333	308	240	230

Ein Beispiel zur Erläuterung: Im WS 1988 waren 385 StudentInnen des Jahrgangs 1987 im 3. Fachsemester (FS), und 419 Personen haben gerade mit dem Informatikstudium begonnen.

Man berechne unter geeigneten Unabhängigkeitsannahmen die Wahrscheinlichkeit, daß von zwei zufällig im Wintersemester 1988 ausgewählten StudentInnen aus dem ersten bzw. dritten Fachsemester nach drei Jahren (also im Wintersemester 1991)

a) beide b) keine c) mindestens eine d) höchstens eine e) genau eine

sechs Fachsemester weiter sind (bzw. ist).

Hinweis: Man verwende die relativen Häufigkeiten als Approximation für die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

Bemerkung: Der geringe Stichprobenumfang mag zwar die Ergebnisse in Frage stellen, nicht aber die prinzipielle Vorgehensweise. Man beachte, daß in der Praxis gerade im Bereich der Lebensversicherungsmathematik (Sterbetafeln, . . .) deutlich höhere Stichprobenumfänge vorliegen.

Z19 nach [Lehn et al., 1988], Aufgabe 25

Eine Nachrichtenquelle sende die Signale a_1, a_2, a_3 mit den Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0.6$, $p_2 = 0.3$, $p_3 = 0.1$. Nach der Übertragung durch einen gestörten Kanal wird vom Empfänger eines der Signale b_1, b_2, b_3 empfangen.

$$M = (p_{ij})_{1 \le \llcorner i,j \lrcorner \le 3} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix}$$

bezeichne die **Kanalmatrix**, d.h. die Matrix der bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$p_{ij} := P(\text{„}b_j \text{ wurde empfangen“} \mid \text{„}a_i \text{ wurde gesendet“})\,,\ 1 \le \llcorner i,j \lrcorner \le 3\,.$$

a) Man gebe einen geeigneten Ws-Raum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ an.

b) Man berechne mit Hilfe des Satzes von der totalen Ws die Wahrscheinlichkeiten q_j für das Empfangen des Signals $b_j, 1 \leq j \leq 3$.

c) Man berechne mit Hilfe des Satzes von Bayes die bedingten Wahrscheinlichkeiten r_{ji}, daß a_i gesendet wurde, falls b_j empfangen wird für $1 \leq \llcorner i, j \lrcorner \leq 3$.

Z20

10 Bezirkstagskandidaten erhalten von ihrer Partei vor den bevorstehenden Wahlen die Zusage für einen der Listenplätze 6 bis 15. Die folgende Tabelle gibt für die verschiedenen Listenplätze die Ws an, in den Bezirkstag gewählt zu werden:

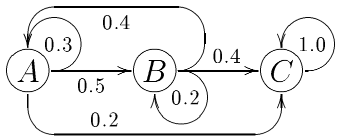
Listenplatz	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Ws [in %]	48	43	40	37	35	28	26	24	22	20

a) Man berechne unter der Laplace-Annahme die Wahrscheinlichkeit, daß Kandidat 3 gewählt wird.

b) Nun erfährt Kandidat 3, daß er auf Listenplatz 6 gesetzt wird, wenn sein Konzept von der Parteispitze angenommen wird. Andernfalls wird er auf Listenplatz 15 gesetzt. Wie groß muß die Wahrscheinlichkeit für die Annahme mindestens sein, damit die Wahrscheinlichkeit, gewählt zu werden, größer als in a) ist?

Z21

Es sei das folgende **Übergangsdiagramm** mit den 3 Zuständen A, B und C gegeben:



Die Zahlen an den Pfeilen geben für jeden Schritt die Wahrscheinlichkeit an, im aktuellen Zustand zu verweilen oder in einen anderen zu wechseln.
Wie groß ist bei einem Start in A die Wahrscheinlichkeit, nach 10 oder weniger Schritten in den Zustand C zu gelangen?

Z22

Eine aus den Klammersymbolen **(** und **)** bestehende Liste heißt **Klammergebirge**, wenn für beliebiges $\ell \in \mathbb{N}$ unter den ersten ℓ Elementen der Liste mindestens soviele öffnende Symbole **(** wie schließende Symbole **)** enthalten sind. Die Differenz aus der Anzahl der öffnenden und schließenden Symbole einer derartigen Teilliste wird als aktuelle **Höhe**[1]

[1] Im Hinblick auf das zugrundeliegende **Kellerprinzip** spricht man häufig auch von der **Tiefe** des Klammergebirges.

des Klammergebirges bezeichnet.

Nehmen wir an, daß das Klammergebirge bislang nur aus dem öffnenden Symbol **(** besteht und die Symbole **(** bzw. **)** mit den Wahrscheinlichkeiten α bzw. $\beta := 1 - \alpha$ angefügt werden. Man skizziere in Abhängigkeit von α die Wahrscheinlichkeit, daß das Klammergebirge nach höchstens 10 weiteren Symbolen entweder geschlossen ist oder die maximal erlaubte Höhe von 5 erreicht hat.

1.4 Zufallsvariable

Z23

Um zu entscheiden, ob eine Warenlieferung angenommen werden soll, wird der folgende zweistufige Stichprobenplan durchgeführt:

> Wenn in der 1. Stichprobe vom Umfang 10 höchstens ein fehlerhaftes Stück gefunden wird, wird die Lieferung angenommen, bei mehr als zwei abgelehnt.
> Eine 2. Stichprobe vom Umfang 20 ist durchzuführen, wenn genau zwei Ausschußstücke gefunden werden.
> Sind dann in der 1. und 2. Stichprobe zusammen höchstens drei Ausschußstücke, so wird die Lieferung angenommen, ansonsten entgültig abgelehnt.

Wie groß ist bei einem Ausschußanteil von $\alpha = 5\%$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Lieferung angenommen wird, unter den Annahmen, daß

- die Stichproben unabhängig sind und
- die Entnahme einer Stichprobe den Ausschußanteil nicht verändert?

Z24

X sei eine Zufallsvariable mit $W_X = \mathbb{N}$. Man zeige:

X ist modifiziert geometrisch verteilt mit dem Parameter $p \in (0,1)$, d.h.

$$P(„X = i“) = p \cdot q^{i-1}, \; i \in \mathbb{N}$$

$\iff$ $P(„X = i“ \mid „X > i-1“) = p, \; i \in \mathbb{N}.$

Z25 [Kredler, 1993]

Die Anzahl von Jobs in einem Rechner kann als Poisson-verteilte Zufallsvariable X mit Parameter $\lambda > 0$ angenommen werden, d.h.

$$P_X(\{i\}) \equiv P(„X = i“) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}, \; i \in \mathbb{N}_0.$$

Manchmal will man den Wert 0 absichtlich ausschließen und geht über zu der **gestutzten** Zufallsvariable Y mit den Werten $1, 2, 3, \ldots$ und

$$P_Y(\{i\}) \equiv P(„Y = i“) = \alpha \cdot \frac{\lambda^i}{i!}\,, \text{ für } \alpha \in \mathbb{R} \text{ und } i \in \mathbb{N}\,.$$

a) Man wähle α so, daß P_Y eine Verteilung wird.

b) Man bestimme $E(Y)$ und $Var(Y)$ mit Hilfe von $E(X) = \lambda = Var(X)$.

Z26

X sei eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Man gebe – wenn möglich – jeweils ein Beispiel an für X mit

a) $E(X^2) > \mu^2$ b) $E(X^2) = \mu^2$ c) $E(X^2) < \mu^2$.

Z27

X sei eine diskrete Zufallsvariable mit $W_X = \mathbb{N}_0$ und $E(X^2) < \infty$. Man zeige analog zu **A3.2**:

$$E(X^2) \;=\; \sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)\cdot P(„X > i“)\,.$$

Z28 [Kredler, 1993]

Vor einem Krankenhaus, das an einer von Nord nach Süd verlaufenden Straße liegt, wurde eine Verkehrszählung vorgenommen. Es ergab sich, daß die mittlere Anzahl der aus Norden kommenden Fahrzeuge 100 und der aus Süden kommenden Fahrzeuge 80 pro Stunde beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als 3 Fahrzeuge pro Minute an dem Krankenhaus vorbeifahren?

Z29

Man gebe Bedingungen für die reellwertigen Parameter α und β an, so daß

$$f(x;\alpha,\beta) \;:=\; \alpha\cdot(x-1)^2 \;+\; \beta$$

eine Dichte auf $[0, 2]$ ist.

Hinweis: Man stelle zunächst β als Funktion von α dar.

Z30

X sei eine stetige ZV mit einer bzgl. 0 achsensymmetrischen Dichte und u_α das α-Quantil von X, $0 < \alpha < 1$. Wie groß ist $u_{0.1}$, wenn bekannt ist, daß $u_{0.9}$ den Wert 0.75 besitzt?

Z31

Ein symmetrischer Würfel mit den Seiten 1 bis 20 werde zweimal unabhängig geworfen. X und Y seien die Ergebnisse der einzelnen Würfe. Man bestimme $E(\min\{X, Y\})$.

Hinweis: Man verwende dabei ohne Beweis: $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Z32

Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 seien unabhängig und jeweils in $(0,1)$ gleichverteilt. Man zeige, daß die Summe $Z := X_1 + X_2$ in $(0,2)$ **symm. dreieckverteilt** ist, d.h. daß Z die Dichte

$$g(z) = \begin{cases} z & , \ z \in (0,1) \\ 2-z & , \ z \in [1,2) \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Z33

X und Y seien unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $\alpha > 0$ bzw. $\beta > 0$. Man bestimme mit Hilfe der Faltungsformel aus [Greiner & Tinhofer, 1996] die Dichte der Zufallsvariable $Z := X + Y$.

Z34

U_1 und U_2 seien unabhängige, in $(0,1)$ gleichverteilte Zufallsvariablen.

a) Wie lautet die gemeinsame Dichte f von (U_1, U_2)?

b) Man zeige, daß $Z := U_1 - U_2$ in $(-1,1)$ symmetrisch dreieckverteilt ist mit der Dichte

$$g(z) = \begin{cases} 1+z & , \ z \in (-1,0) \\ 1-z & , \ z \in [0,1) \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases} .$$

c) Man zeichne die Dichte g von Z und berechne $\delta := P(„|Z| \leq 0.5“)$.

d) Nun seien X_1 und X_2 unabhängig $\mathcal{N}(0.5, \sigma^2)$-verteilt mit unbekannter Varianz $\sigma^2 > 0$. Wie klein muß σ^2 mindestens sein, so daß $P(„|X_1 - X_2| \leq 0.5“) \overset{!}{\geq} \delta$ gilt?

Man verwende zur Beantwortung der Frage

d1) zunächst die exakte Verteilung von $X_1 - X_2$

d2) und anschließend die Tschebyscheff-Ungleichung.

Z35 nach [Kredler, 1993]

Bei einem Workshop sind pro Tag 10 Vorträge mit jeweils anschließender Diskussion angesetzt – 4 Vorträge unmittelbar hintereinander am Vormittag und nach einer kurzen Mittagspause die anderen 6 am Nachmittag. Die Längen V_i bzw. D_i des i-ten Vortrags bzw. der i-ten Diskussion (in Minuten) können als gemeinsam normalverteilt angenommen werden mit

$$\begin{array}{lll} E(V_i) = 30 & Var(V_i) = 15 & \\ E(D_i) = 15 & Var(D_i) = 8 & i = 1, \ldots, 10\,. \\ & Cov(V_i, D_i) = -5 & \end{array}$$

Für die Länge M der Mittagspause gelte: $M \sim \mathcal{N}(30, 14)$. $B_i := V_i + D_i$ bezeichne die Dauer eines Beitrags, wobei im weiteren angenommen werden kann, daß die Längen M und B_i, $1 \leq i \leq 10$, unabhängige Zufallsvariablen sind.

a) Man berechne den Erwartungswert und die Varianz des i-ten Beitrags, $i = 1, \ldots, 10$.

b) Man berechne den Erwartungswert und die Varianz der Gesamtdauer aller 10 Beiträge eines Tages.

c) Der erste Vortrag beginnt pünktlich um 9.00 Uhr. Man bestimme die Wahrscheinlichkeit, daß der letzte Beitrag vor 16.45 Uhr beendet ist (d.h. alle Teilnehmer genügend Zeit haben, um bis 17.00 Uhr in der Empfangshalle zu einem gemeinsamen Umtrunk zu erscheinen).

Z36 [Kredler, 1993]

Eine Münze mit den Seiten 0 und 1 werde zweimal unabhängig geworfen.

a) Man gebe aufgrund des Prinzips der Gleichwahrscheinlichkeit (Laplace-Annahme) einen geeigneten Ws-Raum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ an.

b) Nun seien X das Minimum und Y die Summe der Ergebnisse des Münzwurfexperiments.

b1) Welche Werte können X und Y annehmen?

b2) Man gebe in einer geeigneten Tabelle die gemeinsame Verteilung von X und Y an.

b3) Sind X und Y unabhängig?

c) Man berechne $\rho(X,Y)$.

Z37

U sei in $(-1,1)$ gleichverteilt.

a) Das Intervall $[-1,1]$ werde durch U in zwei Teile gespalten.

a1) Man gebe die Länge des größeren Teilstücks als Funktion von U an.

a2) Man bestimme die mittlere Länge des größeren Teilstücks.

Nun sei zusätzlich $V := U^2$.

b) Sind U und V unkorreliert? Man begründe seine Entscheidung.

c) Sind U und V stochastisch unabhängig? Man begründe seine Entscheidung.

Z38 [Kredler, 1993]

Man zeige, daß mit $\mu = (\mu_1,\mu_2)^T$, $x = (x_1,x_2)^T$ und $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ positiv definit durch

$$f(x) \equiv f(x_1,x_2) = \frac{\sqrt{\det(\Sigma^{-1})}}{2\cdot\pi}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)\right]$$

eine Dichte gegeben ist.

Hinweise: Man betrachte die Eigenwertzerlegung von Σ^{-1} und führe eine geeignete Variablentransformation durch. Eine ZV (X_1,X_2) mit obiger Dichte heißt **(zweidimensional) normalverteilt** mit den Parametern μ und Σ, i.Z.

$$(X_1,X_2) \sim \mathcal{N}(\mu,\Sigma)\,.$$

Ferner gilt[2]:

$$E(X_i) = \mu_i \qquad \text{und} \qquad \Sigma = K_{X_1,X_2} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_2,X_1) & Var(X_2) \end{pmatrix}.$$

[**Kovarianzmatrix** von (X_1,X_2)]

[2]zum Beweis siehe beispielsweise [Hafner, 1989]

Z39

Die Zufallsvariablen U_1 und U_2 seien unabhängig gleichverteilt in $(0,1)$. Man zeige mit Hilfe der Transformationsformel für Dichten, daß die Zufallsvariablen

$$X_1 := \sqrt{-2 \cdot \ln U_1} \cdot \sin(2\pi \cdot U_2) \quad \text{und} \quad X_2 := \sqrt{-2 \cdot \ln U_1} \cdot \sin(2\pi \cdot U_2 - \theta)$$

mit $\cos(\theta) = \rho$ und $-1 < \rho < 1$ zweidimensional normalverteilt sind mit dem Erwartungswert $(0,0)^T$ und der Kovarianzmatrix $\Sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Z40

X_n, $n \in \mathbb{N}$, seien Erlang-verteilte Zufallsvariablen mit der Stufenzahl n und dem Erwartungswert 2.

a) Man zeichne die Dichte von X_n für $n \in \{2, 4, 8, 16, 32, \ldots, 512\}$.

b) Welche Zufallsvariable erhält man für $n \to \infty$?

Z41

Angenommen, Sie gehen nach einem anstrengenden Tag an der Uni noch schnell in den Supermarkt zum Einkaufen. Als Sie an die Kassen gelangen, wird an jeder der beiden offenen Kassen gerade eine Person bedient. Ferner nehmen wir an, daß die Bedienzeiten an den jeweiligen Kassen unabhängig mit dem Parameter λ exponential-verteilt sind und sich kein weiterer Kunde an den Kassen einfindet, während Sie auf die erste freie Kasse warten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Bedienung eines der beiden anderen Kunden erst nach der Ihren abgeschlossen ist?

Hinweis: Verwenden Sie zur Beantwortung der Frage ein geeignetes Übergangsdiagramm und nutzen Sie dabei die Eigenschaften der Exponentialverteilung aus.

Z42

$X_1, X_2, \ldots$ sei eine Folge unabhängiger, identisch mit Verteilungsfunktion F verteilter Zufallsvariablen. Ferner sei N eine von den X_i unabhängige, $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsvariable mit erzeugender Funktion G. Man zeige für die Verteilungsfunktion F_{Y_N} der Zufallsvariable $Y_N := \max\{X_1, \ldots, X_N\}$:

$$F_{Y_N} = G \circ F .$$

1.5 Schätzen und Testen

Z43

$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige und in $(0, \lambda)$ gleichverteilte Zufallsvariable.

a) Man gebe einen erwartungstreuen Schätzer $U(X_1, \ldots, X_n)$ für λ an.

b) Eine Stichprobe vom Umfang $n = 48$ ergab das Stichprobenmittel $\bar{x} = 10$. Man gebe unter Verwendung des Zentralen Grenzwertsatzes ein symmetrisches 95%-Konfidenzintervall für λ an.

Z44

Die Zufallsvariablen U_1 und U_2 seien unabhängig und in $(0, \lambda)$ gleichverteilt mit $\lambda > 0$.

a) Man zeige, daß die Zufallsvariable $Z := \min\{U_1, U_2\}$ die Vf

$$G(z) := P(„Z \leq z") = \begin{cases} 0 & , \; z \leq 0 \\ \frac{2\lambda z - z^2}{\lambda^2} & , \; 0 < z < \lambda \\ 1 & , \; \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

b) Man berechne $E(Z)$.

Nun sei $\lambda > 0$ unbekannt.

c) Man bestimme $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß der Schätzer

$$T(U_1, U_2) := \alpha \cdot \min\{U_1, U_2\} \; (= \alpha \cdot Z\,)$$

erwartungstreu ist für $\tau(\lambda) = \lambda$.

d) Nun wurden die Werte 13.2 und 10.3 als Realisierungen von U_1 und U_2 ermittelt. Man gebe den auf diesen Beobachtungen basierenden konkreten Schätzwert für $\tau(\lambda)$ an.

Z45

$X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängige, identisch exponentialverteilte Zufallsvariablen mit (unbekanntem) Erwartungswert $\lambda > 0$. Ferner sei $n > 2$.

a) $T(X_1, \ldots, X_n) := X_1 + \min\{X_2, \ldots, X_{n-1}\} + X_n$ sei eine Schätzvariable für $\tau(\lambda) = \lambda$. Man berechne den Bias von T.

b) Man gebe mit Hilfe von a) eine erwartungstreue Schätzvariable für $\tau(\lambda) = \lambda$ an.

c) Eine Stichprobe vom Umfang $n = 100$ ergab das Stichprobenmittel $\bar{x} = 4.25$. Man gebe unter Verwendung des Zentralen Grenzwertsatzes ein konkretes 90%-Konfidenzintervall für λ an.

Z46

$X_1, \dots, X_n$ sei eine Stichprobe aus einer mit dem (unbekannten) Erwartungswert μ exponentialverteilten Grundgesamtheit. Man bestimme für die konkreten Stichproben $x_1, \dots, x_n$ mit $\bar{x} = 10$ und $n \in \{25, 50, 100, 200, 500, 2000\}$ jeweils ein exaktes und ein auf dem Zentralen Grenzwertsatz basierendes asymptotisches 95%-Konfidenzintervall für μ.

Z47 nach [Allen, 1990]

Die Zufallsvariable X sei $Beta(\lambda + 1, 1)$-verteilt mit der Dichte

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} (\lambda + 1) \cdot x^{\lambda} & , \quad x \in (0,1) \\ 0 & , \quad \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}^+$ unbekannt ist. Man bestimme für eine konkrete Stichprobe $x_1, \dots, x_n$ den ML-Schätzer $\hat{\lambda}$.

Z48 (vgl. **E 12.2**)

$X_1, \dots, X_n$ seien unabhängige Zufallsvariable mit identischem Mittelwert μ und den (u.U. unterschiedlichen) Varianzen $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$. Man ermittle unter allen erwartungstreuen und in den X_i linearen Schätzern für μ denjenigen mit minimaler Varianz.

2 Lösungen

2.1 Deskriptive Statistik

Z1

a) In manchen Fällen (z.B. bei Zeitreihendaten) fallen in regelmäßigen Abständen neue Daten an. Bei Eintreffen eines neuen Meßwertes sollen dann Mittelwert und empirische Varianz aktualisiert werden. Die neuen Kenngrößen sollen dann nur aus den alten und dem jeweils neuen Wert berechnet werden. Dies hat zwei Vorteile:

- ◇ Rechenzeitersparnis
- ◇ Es müssen nicht alle vergangenen Werte im Speicher gehalten werden. Oft sind die vergangenen Daten auf einem Speichermedium mit langsamer Zugriffszeit.

$\bar{x}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ bezeichne im weiteren den Mittelwert für n Meßpunkte.

Standardansatz: (3 Mult./3 Add.)

$$\bar{x}_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1} x_i = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n+1}\cdot x_{n+1} = \frac{n}{n+1}\cdot\bar{x}_n + \frac{1}{n+1}\cdot x_{n+1}\,.$$

Aber: Bei jedem Update wird der Korrekturterm $\frac{n}{n+1}$ benötigt!

Alternative:

Wir speichern $S_{n,\mu} := \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)$ mit einem geeigneten $\mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\boxed{\begin{aligned} S_{n+1,\mu} &= S_{n,\mu} + (x_{n+1} - \mu) \\ \bar{x}_{n+1} &= \frac{1}{n+1}\cdot S_{n+1,0} = \frac{1}{n+1}\cdot S_{n+1,\mu} + \mu \end{aligned}}$$

(für $\mu = 0$: 1 Mult./2 Add.)

Analog kann man für die empirische Varianz vorgehen:

Es seien $Q_{n,\mu} := \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$ und

$$s_n^2 := \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - n(\bar{x}_n - \mu)^2\right] \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{n-1}\left[Q_{n,\mu} - \frac{1}{n}\cdot S_{n,\mu}^2\right].$$

Dann gilt

$$\boxed{\begin{aligned} Q_{n+1,\mu} &= Q_{n,\mu} + (x_{n+1} - \mu)^2 \\ s_{n+1}^2 &= \frac{1}{n}\left[Q_{n+1,\mu} - \frac{1}{n+1} \cdot S_{n+1,\mu}^2\right] \end{aligned}}$$

Auch hier wird nicht s_n^2, sondern die Quadratsumme $Q_{n,\mu}$ gespeichert.

Insbesondere beim Rechnen mit einfacher Genauigkeit ist die Konstante μ sorgfältig zu wählen: Falls eine a priori-Schätzung $\hat{x}$ für $\bar{x}$ vorliegt, dann wähle man $\mu = \hat{x}$. Andernfalls setze man z.B. $\mu = x_1$.

b) Die Vorteile der obigen Rechnung werden nun an einem Beispiel demonstriert. Wir wählen zur Vereinfachung der Rechnung im weiteren $\mu = 500$.

- $\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu) + \mu = \frac{1}{10}\underbrace{(1-2+5-5+3-4-2+2-3-5)}_{=-10=S_{10,500}} + 500$
  $= 499 = \bar{x}_{10}$
- $Q_{n,\mu} = \sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = (1+4+25+25+9+16+4+4+9+25) = 122 = Q_{10,500}$
- $s_n^2 = \frac{1}{n-1}\left[Q_{n,\mu} - \frac{1}{n} \cdot S_{n,\mu}^2\right] = \frac{1}{9}\left(122 - \frac{(-10)^2}{10}\right) = \frac{112}{9} = 12.\bar{4} = s_{10}^2$

Nach Berücksichtigung der zusätzlichen Beobachtungen $x_{11} = 504$ und $x_{12} = 506$ (als Information wurden $S_{10,500}$ und $Q_{10,500}$ gespeichert) erhalten wir schließlich:

- $S_{12,500} = S_{10,500} + (x_{11} - \mu) + (x_{12} - \mu) = -10 + 4 + 6 = 0$
- $Q_{12,500} = Q_{10,500} + (x_{11} - \mu)^2 + (x_{12} - \mu)^2 = 122 + 16 + 36 = 174$
- $\bar{x}_{12} = \frac{1}{12}S_{12,500} + 500 = 0 + 500 = 500$
- $s_{12}^2 = \frac{1}{11}\left[Q_{12,500} - \frac{1}{12}S_{12,500}^2\right] = \frac{174}{11} - 0 = 15.82$

2.2 Ereignisräume und -algebren

Z2

Die Behauptung folgt unmittelbar durch explizites Umformen:

$$\begin{aligned} (A \triangle B) \triangle C &= \left[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\right] \triangle C \\ &\overset{A2.5}{=} \left\{\left[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\right] \cap \bar{C}\right\} \cup \left\{\left[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})\right] \cap C\right\} \\ &= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} A \triangle (B \triangle C) &= A \triangle \left[(B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C)\right] \\ &\overset{A2.5}{=} \left\{\bar{A} \cap \left[(B \cap \bar{C}) \cup (\bar{B} \cap C)\right]\right\} \cup \left\{A \cap \left[(B \cap C) \cup (\bar{B} \cap \bar{C})\right]\right\} \\ &= (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) \end{aligned}$$

Z3

Der Beweis erfolgt durch Induktion nach n:

Induktionsanfang $(n = 2)$: Klar!

Induktionsschritt $(n \to n+1)$: Wir führen eine **Fallunterscheidung** durch für $\omega \in A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_{n+1} \overset{Z2}{=} (A_1 \triangle A_2 \triangle \ldots \triangle A_n) \triangle A_{n+1}$:

- **$\omega \in A_{n+1}$:** Dann gilt $\omega \notin A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$, d.h. ω liegt in einer geraden Anzahl von Mengen $A_1, \ldots, A_n$ und damit in einer ungeraden Anzahl von Mengen $A_1, \ldots, A_{n+1}$. ✓
- **$\omega \notin A_{n+1}$:** Dann gilt $\omega \in A_1 \triangle \ldots \triangle A_n$, d.h. ω liegt in einer ungeraden Anzahl von Mengen $A_1, \ldots, A_n$ und damit in einer ungeraden Anzahl von Mengen $A_1, \ldots, A_{n+1}$. ✓

Z4

Es sei $C = A \triangle B$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} C \triangle B &= (A \triangle B) \triangle B = \Big[(A \triangle B) \cap \bar{B}\Big] \cup \Big[(\overline{A \triangle B}) \cap B\Big] \\ &= \Big(\Big[(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)\Big] \cap \bar{B}\Big) \cup \Big(\Big[(A \cap B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})\Big] \cap B\Big) \\ &= (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) = A \cap (\underbrace{\bar{B} \cup B}_{= \Omega}) = A\,. \end{aligned}$$

Zusatzfrage: Die Umkehrung gilt ebenfalls. Man vertausche dazu lediglich A und C.

2.3 Wahrscheinlichkeiten

Z5

a) Wegen der Symmetrie

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

gilt $k = 20$ und $n - k = n - 20 \overset{!}{=} 30$, d.h. $n = 50$.

b) Analog zu a) erhält man die Bedingung $20 - n \overset{!}{=} n - 6$, d.h. $2n = 26$ bzw. $n = 13$.

Z6

Für $p_i := P(\{\omega_i\})$ muß gelten 1) $0 \le p_i \le 1$ und 2) $P(\Omega) = P(\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\{\omega_i\}) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = 1$.

Aus 1) folgt: $c_i \ge 0$, $i = 1, 2, 3$.

Aus 2) ergibt sich:

a) $1 \overset{!}{=} \sum_{i=0}^{\infty} p_i \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} c_1 \frac{\lambda^i}{i!} \;=\; c_1 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \;=\; c_1 \cdot e^{\lambda} \quad\Longrightarrow\quad c_1 \;=\; e^{-\lambda}\,.$

b) $1 \overset{!}{=} \sum_{i=0}^{\infty} p_i \;=\; \sum_{i=0}^{\infty} c_2 \cdot \lambda^i \;=\; c_2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i \overset{0<\lambda<1}{=} \frac{c_2}{1-\lambda} \quad\Longrightarrow\quad c_2 \;=\; 1-\lambda\,.$

c) Bekanntlich divergiert die harmonische Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$, und damit auch $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_3}{i}$ für $c_3 > 0$. Ebensowenig kann 2) für $c_3 = 0$ erfüllt werden, da $P(\Omega) = c_3 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 0 \neq 1$. In diesem Fall existiert also kein Ws-Raum.

Z7

Würfeln $\hat{=}$ Urnenexperiment „Ziehen mit Zurücklegen"

- Ergebnisraum für 4-maliges Werfen eines Würfels:

$$\Omega_1 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4) \mid 1 \leq \omega_i \leq 6\,;\; i = 1, \ldots, 4\}\,,\; |\Omega_1| = 6^4\,.$$

Mit $A \equiv$ „mind. eine Sechs" (d.h. $\bar{A} \equiv$ „keine Sechs") gilt:

$$P(\bar{A}) = \frac{5^4}{6^4} \left(= \frac{\text{Anzahl der für } \bar{A} \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} \right).$$

Damit erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zu

$$P(A) \;=\; 1 - P(\bar{A}) \;=\; 1 - \frac{5^4}{6^4} \approx 0.518\,.$$

- Ergebnisraum für 24-maliges Werfen von zwei Würfeln:

$$\Omega_2 = \{\big((\omega_1, \rho_1), \ldots, (\omega_{24}, \rho_{24})\big) \mid 1 \leq \llcorner\omega_i, \rho_i\lrcorner \leq 6\,;\; i = 1, \ldots, 24\}\,,\; |\Omega_2| = 36^{24}\,.$$

Mit $B \equiv$ „mind. eine Doppelsechs" (d.h. $\bar{B} \equiv$ „keine Doppelsechs") gilt:

$$P(\bar{B}) = \frac{35^{24}}{36^{24}} \left(= \frac{\text{Anzahl der für } \bar{B} \text{ günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} \right).$$

Damit erhalten wir die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(B)$ zu

$$P(B) \;=\; 1 - P(\bar{B}) \;=\; 1 - \frac{35^{24}}{36^{24}} \approx 0.491 \underline{< P(A)}\,.$$

Z8

Unter der unrealistischen Annahme, daß jeder jedem die Hand gibt (also auch Paare untereinander), gibt es $\binom{8}{2} = 28$ Möglichkeiten, aus den acht Personen zwei auszuwählen, die sich die Hände schütteln. Die gesuchte Anzahl beträgt damit ebenfalls 28.

Wesentlich realistischer ist die Annahme, daß Paare einander nicht die Hand geben, sondern jeweils gemeinsam die Party verlassen bzw. im Falle der Gastgeber in der Wohnung bleiben. Verabschieden sich zwei Paare voneinander, so werden viermal Hände gedrückt. Wir fassen zur einfacheren Rechnung im weiteren die beiden Einzelpersonen ebenfalls als Paar auf[1]. Dann gibt es $\binom{4}{2} = 6$ Möglichkeiten, aus den vier Paaren zwei auszuwählen, die sich die Hände schütteln. Die gesuchte Anzahl beträgt damit unter Berücksichtigung, daß sich die beiden Einzelpersonen ebenfalls die Hand geben, $6 \cdot 4 + 1 = 25$.

Bemerkung: Zu dem letzten Ergebnis gelangt man natürlich auch durch die folgende Überlegung: Bei acht Personen werden insgesamt 28 mal die Hände geschüttelt. Keines der drei Paare verabschiedet sich untereinander, so daß sich die gesuchte Gesamtanzahl um drei auf 25 verringert.

Z9

- Ein zulässiger Weg von A nach C ist eine beliebige Kombination von je zwei Schritten nach rechts $\boxed{\text{r}}$ und oben $\boxed{\text{o}}$, also:

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline r&r&o&o\\ \hline r&o&r&o\\ \hline r&o&o&r\\ \hline o&r&r&o\\ \hline o&r&o&r\\ \hline o&o&r&r\\ \hline\end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 6 = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \\ \text{Möglichkeiten}\end{array}$$

Zur Erläuterung:

Zähler: Insgesamt 4! Möglichkeiten, die 4 Elemente $\boxed{\text{r}}$, $\boxed{\text{r}}$, $\boxed{\text{o}}$, $\boxed{\text{o}}$ (geordnet) zu kombinieren.

Nenner: Die beiden $\boxed{\text{r}}$'s können nicht unterschieden werden, d.h. je $2! = 2$ Möglichkeiten werden auf eine reduziert (analog für die $\boxed{\text{o}}$'s).

- Ein zulässiger Weg von C nach B ist eine beliebige Kombination von drei Schritten nach rechts $\boxed{\text{r}}$ und zwei nach oben $\boxed{\text{o}}$, also:

$$\left.\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline r&r&r&o&o\\ \hline r&r&o&r&o\\ \hline r&r&o&o&r\\ \hline r&o&r&r&o\\ \hline r&o&o&r&r\\ \hline r&o&r&o&r\\ \hline o&r&r&r&o\\ \hline o&r&r&o&r\\ \hline o&r&o&r&r\\ \hline o&o&r&r&r\\ \hline\end{array}\right\} \quad 10 = \binom{5}{2} \text{ Möglichkeiten}$$

[1]Sie mögen es uns verzeihen. ☺

Somit existieren $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 60$ Wege von A nach B über C (aus insgesamt $\binom{9}{5} = 126$ Wegen von A nach B über beliebige Zwischenstationen).

Z10

a) $S_1, \ldots, S_5$ seien die anstehenden Studenten. Man erhält alle möglichen Ereignisse durch Permutation von $S_1, \ldots, S_5$. Damit gilt für den gesuchten Ws-Raum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$:

- $\Omega = \{\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_5) \mid \{\omega_1, \ldots, \omega_5\} = \{S_1, \ldots, S_5\}\}$
- $\mathfrak{A} = 2^{\Omega}$
- $P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{|\Omega|} = \dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120} \quad \forall\, \omega \in \Omega\,.$

b) A bezeichne im weiteren das Ereignis „Verkauf ohne Geldwechselschwierigkeiten" . O.B.d.A. seien die Studenten S_1, S_2 und S_3 im Besitz eines 10-DM-Scheins und S_4, S_5 im Besitz eines 20-DM-Scheins. Zur Überprüfung von Wechselschwierigkeiten genügt es zunächst, die Reihenfolge zwischen S_1, S_2 und S_3 (bzw. S_4 und S_5) außer Acht zu lassen. Wir identifizieren dazu S_1, S_2 und S_3 mit $\boxed{1}$, S_4 und S_5 mit $\boxed{2}$. Dann treten in folgenden Fällen keine Wechselprobleme auf:

$$\boxed{1|1|1|2|2} \quad \boxed{1|1|2|1|2} \quad \boxed{1|1|2|2|1} \quad \boxed{1|2|1|2|1} \quad \boxed{1|2|1|1|2}$$

Zur Berechnung von $P(A)$ muß jetzt noch die Reihenfolge berücksichtigt werden: Für jeden der obigen fünf Fälle existieren $3! \cdot 2!$ Anordnungen. Also gilt nach der Abzählregel:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3! \cdot 2! \cdot 5}{5!} = \frac{6 \cdot 2 \cdot 5}{120} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}\,.$$

Z11

a) Für $k < n$ ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit offensichtlich gleich 1 . Sei also $k \geq n$. Mit den Bezeichnungen

- $A \;\equiv$ „mindestens ein Prozessor erhält keinen Job"
- $A_i \;\equiv$ „Prozessor i erhält keinen Job"

gilt:

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

$$P\left(\bigcap_{\rho=1}^{m} A_{i_\rho}\right) = \frac{(n-m)^k}{n^k} = \left(1 - \frac{m}{n}\right)^k, \quad m = 1, \ldots, n \;\text{ und }\; i_\mu \neq i_\rho \text{ für } \mu \neq \rho$$

Erläuterung: Wenn die m Prozessoren $i_1, \ldots, i_m$ nicht belegt sein sollen, gibt es für jeden Job nur $n - m$ Zuordnungsmöglichkeiten, also insgesamt $(n-m)^k$. Die angegebene Wahrscheinlichkeit erhält man unmittelbar mit der Abzählregel.

Nach der Siebformel gilt schließlich:

$$P(A) \;=\; P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \overset{\text{A2.10}}{=} \sum_{i=1}^{n}\left[(-1)^{i+1}\cdot\left(1-\frac{i}{n}\right)^k\cdot\binom{n}{i}\right].$$

Bemerkung: Für $n=3$ und $k=5$ erhält man beispielsweise $P(A)=31/81$.

b) Für $k<n-1$ ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit offensichtlich gleich 0. Sei also $k\geq n-1$. Mit den Bezeichnungen

- $G \;\equiv$ „genau ein Prozessor erhält keinen Job“
- $G_i \;\equiv$ „nur Prozessor i erhält keinen Job“

gilt:

$$\begin{aligned} G \;&=\; \bigcup_{i=1}^{n} G_i \\ |G_i| \;&\overset{\text{a)}}{=}\; (n-1)^k-\sum_{j=1}^{n-1}\left[(-1)^{j+1}\cdot(n-1-j)^k\cdot\binom{n-1}{j}\right] \qquad [\text{unabhängig von } i] \end{aligned}$$

Erläuterung: Wenn der i-te Prozessor nicht belegt sein soll, gibt es $(n-1)^k$ Möglichkeiten, die k Jobs auf die verbleibenden $n-1$ Prozessoren zu verteilen. Nach a) sind darunter $\sum_{j=1}^{n-1}\left[(-1)^{j+1}\cdot(n-1-j)^k\cdot\binom{n-1}{j}\right]$ Möglichkeiten[2], daß mindestens einer dieser $n-1$ Prozessoren keinen Job erhält. Wenn man dieses Ereignis analog zu a) mit A bezeichnet, dann ergibt sich die gesuchte Mächtigkeit von $\bar{A}$, also die Anzahl der Möglichkeiten, daß jeder der $n-1$ Prozessoren zumindest einen Job erhält, als $(n-1)^k-|A|$.

Da die G_i disjunkt sind, gilt:

$$\begin{aligned} P(G) \;&=\; P\left(\bigcup_{i=1}^{n} G_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} P(G_i) \\ &\overset{\text{s.o.}}{=}\; \frac{n\cdot\left((n-1)^k-\sum_{j=1}^{n-1}\left[(-1)^{j+1}\cdot(n-1-j)^k\cdot\binom{n-1}{j}\right]\right)}{n^k} \end{aligned}$$

Bemerkung: Für $n=3$ und $k=5$ erhält man beispielsweise $P(G)=30/81$. Zu diesem Ergebnis gelangt man auch mit der folgenden Überlegung: Das Ereignis A umfaßt neben allen Elementarereignissen aus G zusätzlich noch die drei Elementarereignisse „i-ter Prozessor erhält alle Jobs“, $i=1,2,3$. Damit gilt wiederum mit der Abzählregel:

$$P(G) \;=\; P(A)-\frac{3}{3^5} \;=\; \frac{31}{81}-\frac{1}{81} \;=\; \frac{30}{81}.$$

[2] i.e. unter Verwendung von $n-1$ statt n der Zähler von $P(A)$ wegen der Gleichgewichtung der Elementarereignisse

Z12

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n}) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \ldots \cap \bar{A}_n) \overset{\text{A2.18}}{=} 1 - \prod_{i=1}^{n} P(\bar{A}_i) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^{n} [1 - P(A_i)]\,. \end{aligned}$$

Die Siebformel wird in diesem Fall also nicht benötigt.

Z13

Mit $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}$ gilt

- $P(A \cap B) = P(\{\omega_2\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)\,,$
- $P(A \cap C) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(C)\,,$
- $P(B \cap C) = P(\{\omega_3\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(B) \cdot P(C)\,,$

aber

$$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0 \;\neq\; \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)\,.$$

Z14

$$\begin{aligned} P(S) &:= P(\text{„}S \text{ fällt nicht aus“}) \\ &= P([A_1 \cap A_2] \cup A_3) \overset{\text{R5}}{=} P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &\overset{\text{U}}{=} P(A_1) \cdot P(A_2) + P(A_3) - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \\ &= 0.8 \cdot 0.9 + 0.6 - 0.8 \cdot 0.9 \cdot 0.6 \\ &= 0.72 + 0.6 - 0.432 \;=\; 0.888\,. \end{aligned}$$

Z15

Mit dem Hinweis erhält man:

- $S_1 := \{A_3, A_4\}$:

$$\begin{aligned} P(S_1) &\overset{\text{def}}{=} P(\text{„}S_1 \text{ fällt nicht aus“}) \;=\; P(A_3 \cup A_4) \\ &\overset{\text{U, R5}}{=} P(A_3) + P(A_4) - P(A_3) \cdot P(A_4) \;=\; 0.6 + 0.6 - 0.36 \;=\; 0.84 \end{aligned}$$

- $S_2 := \{A_1, S_1\}$:

$$P(S_2) \;=\; P(A_1 \cap S_1) \;\overset{\text{U}}{=}\; P(A_1) \cdot P(S_1) \;=\; 0.8 \cdot 0.84 \;=\; 0.672$$

- $S_3 := \{A_2, S_2\}$:

$$P(S_3) \;=\; P(A_2 \cup S_2) \;\overset{\text{U,R5}}{=}\; P(A_2) + P(S_2) - P(A_2) \cdot P(S_2) \;=\; 0.9672$$

- $S = \{S_3, A_5\}$:

$$P(S) \;=\; P(S_3 \cap A_5) \;\overset{\text{U}}{=}\; P(S_3) \cdot P(A_5) \;=\; 0.9672 \cdot 0.8 \;=\; 0.77376$$

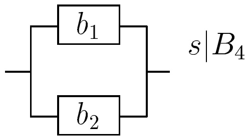
Z16

Es seien $M_i \equiv$ „Motor m_i fällt aus“, $i = 1, \ldots, 4$. Dann gilt:

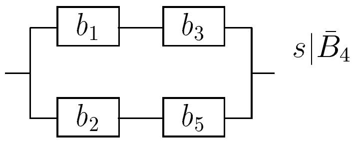
$$\begin{aligned}
&P(\text{„Flugzeug stürzt nicht ab“}) \;=\; 1 - P(\text{„Flugzeug stürzt ab“}) \\
&\;=\; 1 - P[(M_1 \cap M_2) \cup (M_3 \cap M_4)] \\
&\overset{\text{R5}}{=}\; 1 - [\,P(M_1 \cap M_2) + P(M_3 \cap M_4) - P(M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4)\,] \\
&\overset{\text{U}}{=}\; 1 - [\,P(M_1) \cdot P(M_2) + P(M_3) \cdot P(M_4) - P(M_1) \cdot P(M_2) \cdot P(M_3) \cdot P(M_4)\,] \\
&\;=\; 1 - 0.05^2 - 0.05^2 + 0.05^4 \;\approx\; 99.5\% \,.
\end{aligned}$$

Z17

Offensichtlich stellen die Verbindungen zum Bauteil b_4 Probleme dar, die durch Fallunterscheidung beseitigt werden können:

- b_4 ist intakt: 

$$\begin{aligned}
P(S \mid B_4) \;&=\; P(B_1 \cup B_2) \;\overset{\text{U,R5}}{=}\; P(B_1) + P(B_2) - P(B_1) \cdot P(B_2) \\
&=\; 0.8 + 0.9 - 0.72 \;=\; 0.98
\end{aligned}$$

- b_4 ist defekt: 

$$\begin{aligned}
P(S|\bar{B}_4) \;&=\; P([B_1 \cap B_3] \cup [B_2 \cap B_5]) \\
&\overset{\text{U,R5}}{=}\; P(B_1) \cdot P(B_3) + P(B_2) \cdot P(B_5) - P(B_1) \cdot P(B_2) \cdot P(B_3) \cdot P(B_5) \\
&=\; 0.48 + 0.72 - 0.3456 \;=\; 0.8544
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von der totalen Ws gilt dann:

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \mid B_4) \cdot P(B_4) + P(S \mid \bar{B}_4) \cdot P(\bar{B}_4) \\ &= 0.98 \cdot 0.6 + 0.8544 \cdot (1 - 0.6) \;=\; 92.976\%\,. \end{aligned}$$

Z18

Für $i = 1, 3$ seien

$A_i \;\equiv$ „StudentIn aus dem i-ten FS im WS 1988 ist nach 3 Jahren im $(i+6)$-ten FS“ .

Dann gilt mit # als Abkürzung für die Anzahl der StudentInnen:

$$P(A_i) \;\approx\; \frac{\#[(i+6)\text{-tes FS im WS 1991}]}{\#[i\text{-tes FS im WS 1988}]}\,,\; i = 1, 3\,.$$

a) $P(\text{„beide“}) \;=\; P(A_1 \cap A_3) \overset{\text{U}}{=} P(A_1) \cdot P(A_3) \;=\; \frac{308}{419} \cdot \frac{276}{385} \;\approx\; 52.7\%$

b) $P(\text{„keine“}) \;=\; P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_3) \overset{\text{A2.18}}{=} P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_3) \;=\; \left(1 - \frac{308}{419}\right) \cdot \left(1 - \frac{276}{385}\right) \;\approx\; 7.5\%$

c) $P(\text{„mindestens eine“}) \;=\; 1 - P(\text{„keine“}) \overset{\text{b)}}{\approx} 92.5\%$

d) $P(\text{„höchstens eine“}) \;=\; 1 - P(\text{„beide“}) \overset{\text{a)}}{\approx} 47.3\%$

e) $P(\text{„genau eine“}) \;=\; 1 - P(\text{„beide“ oder „keine“}) \;=^{\dagger}\; 1 - [P(\text{„beide“}) + P(\text{„keine“})]$
$\overset{\text{a), b)}}{\approx} 39.8\%$

Z19

a) Bei der Übertragung eines einzelnen Zeichens ist nur von Interesse, welches Zeichen gesendet und welches empfangen wurde. Wir benötigen also die Ereignisse $E_{ij} := A_i \cap B_j$, wobei

- $A_i \equiv$ „Signal a_i wird gesendet“ , $i = 1, 2, 3$, und
- $B_j \equiv$ „Signal b_j wird empfangen“ , $j = 1, 2, 3$.

Damit gilt für den gesuchten Ws-Raum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$:

- $\Omega = \{E_{ij} \,|\, 1 \leq i, j \leq 3\}$
- $\mathfrak{A} = 2^{\Omega}$
- $P : \mathfrak{A} \to [0, 1]$ Ws-Maß mit
  - $\diamond$ $P(A_i) = p_i \quad i = 1, 2, 3$

[†] wegen der Unvereinbarkeit der beiden Ereignisse

$$\diamond \; \sum_{j=1}^{3} P(B_j) = 1\,.$$

b) $q_j = P(B_j) \overset{\text{R10}}{=} \sum_{i=1}^{3} P(A_i) \cdot P(B_j \mid A_i) \; = \; \sum_{i=1}^{3} p_i \cdot p_{ij}\,, \quad j = 1, 2, 3\,.$

Vektoriell zusammengefaßt erhalten wir also:

$$(q_1, q_2, q_3) = (p_1, p_2, p_3) \cdot M = (0.6, 0.3, 0.1) \cdot \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.0 & 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} = (0.63, 0.27, 0.10)\,.$$

c) $r_{ji} = P(A_i \mid B_j) = \dfrac{P(B_j \mid A_i) \cdot P(A_i)}{P(B_j)} = \dfrac{p_{ij} \cdot p_i}{q_j}\,, \quad 1 \leq \llcorner j, i \lrcorner \leq 3\,.$

Somit gilt schließlich:

$$R := (r_{ji})_{1 \leq \llcorner j,i \lrcorner \leq 3} = \begin{pmatrix} 0.86 & 0.14 & 0.00 \\ 0.22 & 0.66 & 0.11 \\ 0.00 & 0.30 & 0.70 \end{pmatrix}.$$

Z20

a) $W \equiv$ „Kandidat 3 wird gewählt“,

$L_j \equiv$ „Kandidat 3 ist auf Listenplatz j“, $j = 6, \ldots, 15$.

Über die Verteilung auf die Listenplätze liegen keine Informationen vor. Nach der Laplace-Annahme ist folglich

$$P(L_j) = \frac{9!}{10!} = \frac{1}{10}\,, \quad j = 6, \ldots, 15\,.$$

Nach dem Satz von der totalen Ws gilt damit:

$$P(W) = \sum_{j=6}^{15} P(W \mid L_j) \cdot P(L_j) \overset{\text{Tabelle}}{=} \frac{1}{10} \cdot (0.48 + 0.43 + \cdots + 0.20) = 32.3\%\,.$$

b) Mit $A \equiv$ „Konzept wird angenommen“ gilt:

$$\begin{aligned} P(W) &= P(W \mid A) \cdot P(A) + P(W \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) \\ &= P(W \mid L_6) \cdot P(A) + P(W \mid L_{15}) \cdot P(\bar{A}) \\ &= 0.48 \cdot P(A) + 0.2 \cdot [1 - P(A)] \; = \; 0.28 \cdot P(A) + 0.2 \overset{\text{a)}}{>} 0.323 \end{aligned}$$

$$\iff \quad P(A) > \frac{0.123}{0.28} \approx 43.93\%\,.$$

Z21

Mit den Bezeichnungen „$S_i = A$“ für das Ereignis „das System ist nach i Schritten im Zustand A“, ... lassen sich die sog. *Übergangsmatrizen* M_i des Systems definieren als

$$\begin{pmatrix} P(„S_i = A“ \mid „S_{i-1} = A“) & P(„S_i = B“ \mid „S_{i-1} = A“) & P(„S_i = C“ \mid „S_{i-1} = A“) \\ P(„S_i = A“ \mid „S_{i-1} = B“) & P(„S_i = B“ \mid „S_{i-1} = B“) & P(„S_i = C“ \mid „S_{i-1} = B“) \\ P(„S_i = A“ \mid „S_{i-1} = C“) & P(„S_i = B“ \mid „S_{i-1} = C“) & P(„S_i = C“ \mid „S_{i-1} = C“) \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich ist M_i eine stochastische Matrix und für das gegebene System unabhängig von i. Aus diesem Grund verzichten wir auf den Index und erhalten

$$M = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt nach dem Satz von der totalen Ws mit

$$\pi_i := \Big(P(„S_i = A“),\, P(„S_i = B“),\, P(„S_i = C“)\Big): [3]$$

$$\pi_i \;=\; \pi_{i-1}\cdot M \;=\; (\pi_{i-2}\cdot M)\cdot M \;=\; \pi_{i-2}\cdot M^2 \;=\; \ldots \;=\; \pi_0\cdot M^i.$$

Für die Anfangsverteilung

$$\pi_0 \;=\; (1,0,0) \quad \text{(das System startet in } A)$$

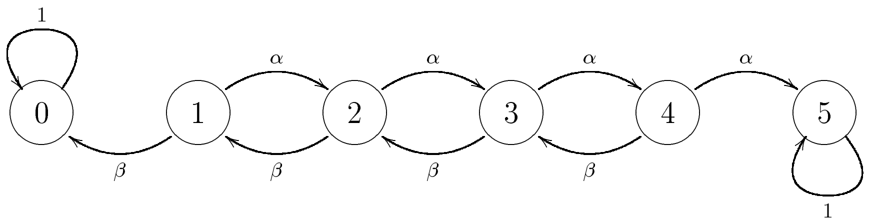
erhält man also nach 10 Schritten die Verteilung

$$\pi_{10} \;=\; \pi_0\cdot M^{10} \;\approx\; (0.0157, 0.0157, 0.9686)\,,$$

d.h. der Zustand C wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 96.86% in 10 oder weniger[4] Schritten erreicht.

Z22

Die Situation läßt sich am einfachsten durch das folgende Übergangsdiagramm darstellen, wobei die Knoten die jeweilige Höhe K des Klammergebirges, d.h. die Anzahl von nicht geschlossenen Klammersymbolen **(** , angeben:



Die Überprüfung des Klammergebirges wird beendet, sobald entweder $K = 0$ oder $K = 5$ erreicht wird. Die entsprechenden Knoten dürfen folglich nicht mehr verlassen werden und

[3] Damit erhält man z.B. mit Hilfe des Projektionsvektors $(0,1,0)^T$ die Wahrscheinlichkeit $P(„S_i = B“)$ als $\pi_i \cdot (0,1,0)^T$.

[4] da C absorbierend ist, d.h. nicht mehr verlassen werden kann

werden daher auch **absorbierende** Knoten genannt.

Gesucht ist bei einem Start in $K = 1$ [bzw. der entsprechenden Startverteilung $(0, 1, 0, 0, 0, 0)$] die Wahrscheinlichkeit, daß nach höchstens 10 weiteren Symbolen einer der Endknoten erreicht ist. Da die Endknoten absorbierend sind, ergibt sich diese Wahrscheinlichkeit zu

$$\underbrace{(0,1,0,0,0,0) \cdot M^{10} \cdot (1,0,0,0,0,0)^T}_{K=0 \text{ wird erreicht}} + \underbrace{(0,1,0,0,0,0) \cdot M^{10} \cdot (0,0,0,0,0,1)^T}_{K=5 \text{ wird erreicht}},$$

wobei

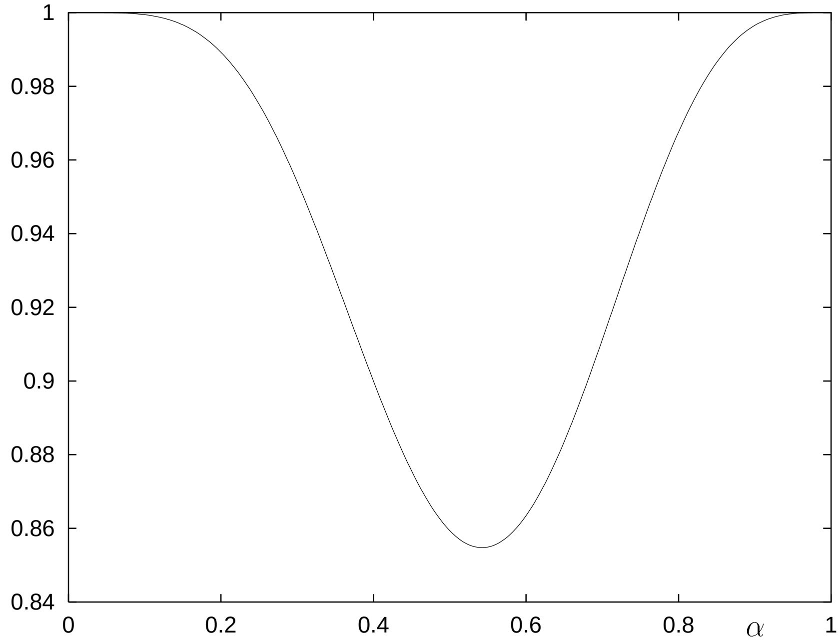
$$M := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die korrespondierende Übergangsmatrix bezeichne [vgl. **A2.25**]. Für die konkrete Berechnung verwenden wir *MuPAD* und erhalten

```
   *----*    MuPAD 1.3  ---  Multi Processing Algebra Data Tool
  /|   /|
 *----* |    Copyright (c) 1992-96 by B. Fuchssteiner, Automath
 | *--|-*    University of Paderborn.  All rights reserved.
 |/   |/
 *----*      Licensed to: Lehrstuhl VIII fuer Informatik

>> export (linalg);

>> MExpr := Dom::Matrix();

     Dom::Matrix(Dom::ExpressionField(id, iszero))

>> M := MExpr( [ [1,0,0,0,0,0], [b,0,a,0,0,0], [0,b,0,a,0,0],
&>               [0,0,b,0,a,0], [0,0,0,b,0,a], [0,0,0,0,0,1]]);

                    +-                  -+
                    |  1, 0, 0, 0, 0, 0  |
                    |  b, 0, a, 0, 0, 0  |
                    |  0, b, 0, a, 0, 0  |
                    |  0, 0, b, 0, a, 0  |
                    |  0, 0, 0, b, 0, a  |
                    |  0, 0, 0, 0, 0, 1  |
                    +-                  -+
```

```
                     +-                 -+
                     |  1, 0, 0, 0, 0, 0  |
                     |  b, 0, a, 0, 0, 0  |
                     |  0, b, 0, a, 0, 0  |
                     |  0, 0, b, 0, a, 0  |
                     |  0, 0, 0, b, 0, a  |
                     |  0, 0, 0, 0, 0, 1  |
                     +-                 -+

>> v := MExpr( [[0,1,0,0,0,0]] );

                      +-                -+
                      | 0, 1, 0, 0, 0, 0 |
                      +-                -+

>> w1 := transpose(MExpr( [[1,0,0,0,0,0]] ));

                           +-   -+
                           |  1  |
                           |  0  |
                           |  0  |
                           |  0  |
                           |  0  |
                           |  0  |
                           +-   -+

>> w2 := transpose(MExpr( [[0,0,0,0,0,1]] ));

                           +-   -+
                           |  0  |
                           |  0  |
                           |  0  |
                           |  0  |
                           |  0  |
                           |  1  |
                           +-   -+

>> b := 1-a;

     - a + 1

>> (v*M^10*w1 + v*M^10*w2)[1,1];

            4    2        3     4        5
     - a + a  + a (- a + 1)  + 3a (- a + 1)  +

                                       2
     a(- a + 1)(- a + a(- a + 1)  + 1) +

       3        2          2              3
     5a (- a + 1) ((- a + 1)  + 2 a(- a + 1) ) +

       4                 3        2                       2
     3a (- a + 1)(a + a (- a + 1)  + a(- a + 1)(a + a (- a + 1))) +

       3        2     4               2       2
     5a (- a + 1)  (2a (- a + 1) + a (a + a (- a + 1))) + 1
```

bzw. in graphischer Form mit `gnuplot`:



Erwartungsgemäß liegt das Minimum knapp über $\alpha = 0.5$, da das Klammergebirge mit einem öffnenden Symbol **(** beginnt.

2.4 Zufallsvariable

Z23

X_i bezeichne die Anzahl der fehlerhaften Stücke in der i-ten Stichprobe, $i = 1, 2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & P(\text{„Lieferung wird angenommen“}) \\ & = P\left[\text{„}X_1 \le 1\text{“} \cup \text{„}X_1 = 2, X_1 + X_2 \le 3\text{“}\right] = P(\text{„}X_1 \le 1\text{“}) + P(\text{„}X_1 = 2, X_2 \le 1\text{“}) \\ & \stackrel{\mathrm{U}}{=} \binom{10}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^{10} + \binom{10}{1} \alpha^1 (1-\alpha)^9 \\ & + \binom{10}{2} \alpha^2 (1-\alpha)^8 \cdot \left[\binom{20}{0} \alpha^0 (1-\alpha)^{20} + \binom{20}{1} \alpha^1 (1-\alpha)^{19}\right] \approx 96.88\% \,. \end{aligned}$$

Z24

„$\Rightarrow$“ Es sei $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt mit $P(\text{„}X = i\text{“}) = p \cdot (1-p)^{i-1}$ und $P(\text{„}X > i\text{“}) = (1-p)^i$:

$$P(\text{„}X = i\text{“} \mid \text{„}X > i-1\text{“}) = \frac{P(\text{„}X = i\text{“})}{P(\text{„}X > i-1\text{“})} = \frac{p \cdot (1-p)^{i-1}}{(1-p)^{i-1}} = p \,. \quad \checkmark$$

„$\Leftarrow$" Aus

$$\begin{aligned} p &= P(„X=i\text{“} \mid „X>i-1\text{“}) = \frac{P(„X=i\text{“})}{P(„X>i-1\text{“})} \\ &= \frac{P(„X>i-1\text{“}) - P(„X>i\text{“})}{P(„X>i-1\text{“})} = 1 - \frac{P(„X>i\text{“})}{P(„X>i-1\text{“})} \end{aligned}$$

folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} P(„X>i\text{“}) &= (1-p)\cdot P(„X>i-1\text{“}) = (1-p)^2 \cdot P(„X>i-2\text{“}) \\ &= \ldots = (1-p)^i \cdot P(„X>0\text{“}) = (1-p)^i\,, \end{aligned}$$

und damit

$$P(„X=i\text{“}) \overset{\text{s.o.}}{=} p\cdot P(„X>i-1\text{“}) = p\cdot(1-p)^{i-1}\,. \qquad \checkmark$$

Z25

a) Wegen
$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha\cdot\frac{\lambda^i}{i!} = \alpha\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\lambda^i}{i!} - 1\right) = \alpha\cdot\left(e^{\lambda}-1\right) \overset{!}{=} 1$$
ergibt sich α zu $\dfrac{1}{e^{\lambda}-1}$.

b) Für den Erwartungswert und die Varianz von Y gilt:

$$\begin{aligned} E(Y) &\overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} i\cdot\frac{1}{e^{\lambda}-1}\cdot\frac{\lambda^i}{i!} = \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}\cdot\sum_{i=0}^{\infty} i\cdot\frac{\lambda^i}{i!}\cdot e^{-\lambda} \\ &= \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}\cdot E(X) = \frac{\lambda\cdot e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1} = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}} \\ E(Y^2) &\overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} i^2\cdot\frac{1}{e^{\lambda}-1}\cdot\frac{\lambda^i}{i!} = \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}\cdot\sum_{i=0}^{\infty} i^2\cdot\frac{\lambda^i}{i!}\cdot e^{-\lambda} \\ &= \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}\cdot E(X^2) = \frac{e^{\lambda}}{e^{\lambda}-1}\cdot\left[Var(X)+E(X)^2\right] = \frac{\lambda+\lambda^2}{1-e^{-\lambda}} \\ Var(Y) &= E(Y^2)-E(Y)^2 = \frac{\lambda+\lambda^2}{1-e^{-\lambda}} - \frac{\lambda^2}{(1-e^{-\lambda})^2} \\ &= \frac{\lambda\cdot\left(1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}\right)}{(1-e^{-\lambda})^2} \end{aligned}$$

Z26

a) $E(X^2) > \mu^2 \quad\Longleftrightarrow\quad Var(X) = E(X^2)-E(X)^2 = E(X^2)-\mu^2 > 0$

Beispiele für X:

- $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, wegen $Var(X) = 1 > 0$

- $X \sim \mathcal{E}x(\lambda)$, wegen $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} > 0$

  $\vdots$

b) $E(X^2) = \mu^2 \quad \Longleftrightarrow \quad Var(X) = 0$

Beispiel für X: $X(\omega) = a \in \mathbb{R} \ \ \forall\, \omega \in \Omega$. Denn:

$$E(X) = 1 \cdot a = a \quad \text{und} \quad Var(X) \stackrel{\text{def}}{=} E\left([X - E(X)]^2\right) = E\left([a-a]^2\right) = E(0) = 0\,.$$

c) $E(X^2) < \mu^2 \quad \Longleftrightarrow \quad Var(X) < 0$

Dieser Fall kann nicht eintreten, da $Var(X) = E\left([X - E(X)]^2\right) \geq 0$ wegen $[X - E(X)]^2 \geq 0$.

Z27

Für das zweite Moment von X gilt:

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{i=1}^{\infty} i^2 \cdot P(\text{„}X = i\text{“}) \stackrel{(L)}{=} \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{i}(2k-1)\cdot P(\text{„}X = i\text{“}) \\
&= P(\text{„}X = 1\text{“}) \\
&\quad + P(\text{„}X = 2\text{“}) + 3\cdot P(\text{„}X = 2\text{“}) \\
&\quad + P(\text{„}X = 3\text{“}) + 3\cdot P(\text{„}X = 3\text{“}) + 5\cdot P(\text{„}X = 3\text{“}) \\
&\quad \vdots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\sum_{i=k}^{\infty} P(\text{„}X = i\text{“}) \quad [\text{bisher zeilenweise, jetzt spaltenweise}] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}(2k-1)\cdot P(\text{„}X \geq k\text{“}) = \sum_{i=0}^{\infty}(2i+1)\cdot P(\text{„}X > i\text{“})\,. \quad \checkmark
\end{aligned}$$

Es bleibt noch der Beweis der Behauptung

$$i^2 = \sum_{k=1}^{i}(2k-1)\,, \tag{L}$$

der am einfachsten per Induktion erfolgt:

Induktionsanfang $(i = 1)$: Klar!

Induktionsschritt $(i \to i+1)$:

$$\sum_{k=1}^{i+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{i}(2k-1) + 2(i+1) - 1 = i^2 + 2(i+1) - 1 = i^2 + 2i + 1 = (i+1)^2\,. \quad \checkmark$$

Z28

Die pro Minute in nördlicher bzw. südlicher Richtung vorbeifahrenden Fahrzeuge können als Poisson-verteilt angenommen werden. Sicher ist auch die Annahme, daß die Anzahl der Fahrzeuge für jede Richtung unabhängig ist, eine ausreichende Beschreibung der Realität. Als Zeiteinheit ergibt sich aus der Fragestellung 1 Minute. Weiter seien

$X \equiv$ „Anzahl der aus nördlicher Richtung kommenden Fahrzeuge pro Zeiteinheit" und

$Y \equiv$ „Anzahl der aus südlicher Richtung kommenden Fahrzeuge pro Zeiteinheit".

Dann sind X und Y unabhängig und Poisson-verteilt mit den Raten (bzw. Parametern) $\frac{100}{60}$ und $\frac{80}{60}$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(„X+Y>3")$.

Nach [Greiner & Tinhofer, 1996] ist $X+Y$ Poisson-verteilt mit der Rate $\frac{100}{60}+\frac{80}{60}=\frac{180}{60}=3$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} P(„X+Y>3") &= 1-P(„X+Y\le 3") \\ &= 1-\sum_{i=0}^{3}\frac{3^i}{i!}\cdot e^{-3} \;=\; 1-e^{-3}\cdot\left(1+3+\frac{3^2}{2!}+\frac{3^3}{3!}\right) \\ &= 1-e^{-3}\cdot\left(1+3+\frac{9}{2}+\frac{9}{2}\right) \;=\; 1-13\cdot e^{-3} \;\approx\; 35.3\%\,. \end{aligned}$$

Z29

$$f \text{ ist Dichte auf } [0,2] \iff \begin{array}{ll} (1) & \displaystyle\int_0^2 f(x;\alpha,\beta)\,dx = 1 \\ (2) & f(x;\alpha,\beta)\ge 0 \quad \forall\, x\in[0,2] \end{array}$$

ad (1):
$$\int_0^2 f(x;\alpha,\beta)\,dx = \left[\alpha\cdot\frac{(x-1)^3}{3}\right]_0^2 + \big[\beta\cdot x\big]_0^2 = \frac{\alpha}{3}+\frac{\alpha}{3}+2\cdot\beta \overset{!}{=} 1$$

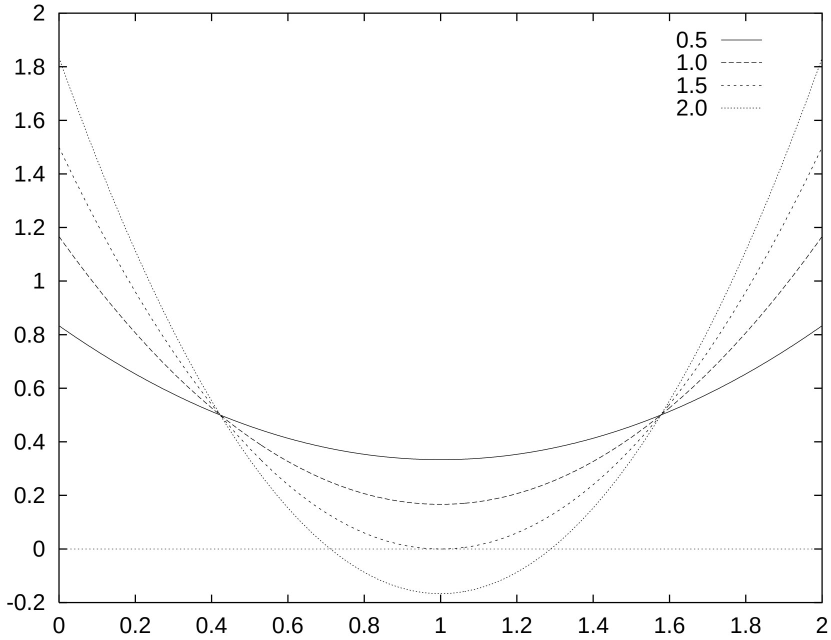
$$\iff \quad 2\cdot\alpha+6\cdot\beta=3 \quad\iff\quad \beta=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\alpha\,.$$

ad (2): Fallunterscheidung:

- $\alpha=0$: Dann ist $\beta=\frac{1}{2}>0$.
- $\alpha>0$: $\alpha\cdot(x-1)^2$ nimmt ein Minimum mit dem Wert 0 an der Stelle $x=1$ an, d.h. β muß ≥ 0 sein. Also:

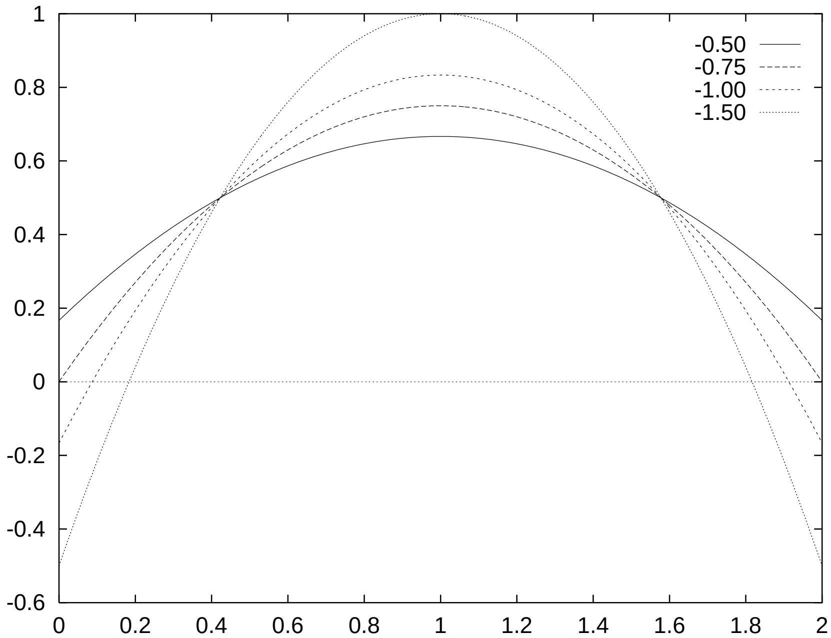
$$\beta\ge 0 \quad\iff\quad \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\alpha\ge 0 \quad\iff\quad \alpha\le\frac{3}{2}\,.$$

Nachfolgend sind die Graphen von $f(x;\alpha,\beta)$ abgebildet für $\beta=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdot\alpha$ und $\alpha\in\{0.5,1.0,1.5,2.0\}$:



- $\alpha < 0$: $\quad \alpha \cdot (x-1)^2$ nimmt ein Minimum mit dem Wert $\alpha < 0$ an den Stellen 0 und 2 an, d.h. β muß $\geq -\alpha$ sein. Also:

$$\beta \geq -\alpha \iff \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \alpha \geq -\alpha \iff \frac{2}{3} \cdot \alpha \geq -\frac{1}{2} \iff \alpha \geq -\frac{3}{4}.$$



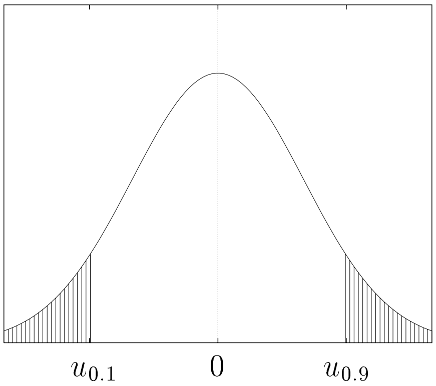
Insgesamt erhält man die Bedingungen:

$$-\frac{3}{4} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \alpha.$$

Z30

Wie wir der nachfolgenden Zeichnung leicht entnehmen können, gilt:

$$u_{0.1} = -u_{0.9} = -0.75\,.$$



Z31

Standardansatz: Es seien $Z := \min\{X, Y\}$ und $(i, j) :=$ „$X = i, Y = j$“. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
„Z = 1“ &\equiv \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,20),(2,1),(3,1),\ldots,(20,1)\} \\
„Z = 2“ &\equiv \{(2,2),(2,3),\ldots,(2,20),(3,2),(4,2),\ldots,(20,2)\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Allgemein gilt schließlich für $1 \leq \ell \leq 20$:

$$„Z = \ell“ \equiv \{(\ell,\ell),(\ell,\ell+1),\ldots,(\ell,20),(\ell+1,\ell),\ldots,(20,\ell)\}\,,$$

d.h.

$$P(„Z = \ell“) \overset{\text{U}}{=} \frac{2(20-\ell)+1}{20^2}$$

und

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{\ell=1}^{20} \ell \cdot P(„Z = \ell“) = \frac{41}{400} \sum_{\ell=1}^{20} \ell - \frac{2}{400} \sum_{\ell=1}^{20} \ell^2 \\
&= \frac{41}{400} \cdot \frac{20 \cdot 21}{2} - \frac{2}{400} \cdot \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{6} = \frac{41 \cdot 20 \cdot 21}{400} \left[\frac{1}{2} - \frac{2}{6}\right] \\
&= \frac{41 \cdot 21}{120} = 7.175\,.
\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg: Es sei wiederum $Z := \min\{X, Y\}$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
P(„Z > k“) &= P(„X > k“, „Y > k“) \overset{\text{U}}{=} P(„X > k“) \cdot P(„Y > k“) \\
&= \begin{cases} \left(\frac{20-k}{20}\right)^2 & , \ 0 \leq k \leq 20 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
E(Z) &\overset{\text{A3.2}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} P(„Z > k“) = \sum_{k=0}^{20} \left(\frac{20-k}{20}\right)^2 \overset{j:=20-k}{=} \frac{1}{400} \sum_{j=1}^{20} j^2 \\
&= \frac{20 \cdot 21 \cdot 41}{400} = \frac{21 \cdot 41}{120} = 7.175\,.
\end{aligned}$$

Z32

Für die Dichte f_i von X_i gilt: $f_i(x) = \begin{cases} 1 & , \ x \in (0,1) \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases} \quad , \quad i = 1,2\,.$

Nach Voraussetzung sind X_1 und X_2 unabhängig, besitzen also die gemeinsame Dichte

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) = \begin{cases} 1 & , \ \llcorner x_1, x_2 \lrcorner \in (0,1) \\ 0 & , \ \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach [Greiner & Tinhofer, 1996] gilt für die Dichte g von $Z := X_1 + X_2$:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, z-t)\, dt\,.$$

Wegen

- $f(t,\cdot) = 0$ für $t \notin (0,1)$ und
- $f(\,\cdot\,, z-t) = 0$ für $z - t \notin (0,1)$, d.h. $(t \leq z-1) \vee (t \geq z)$

ist der Integrand $f(t, z-t)$ also genau auf der Menge

$$T_z := \{t \mid t \in (0,1) \cap (z-1, z)\}$$

ungleich 0. Dies führt zu folgender Fallunterscheidung:

- $z \leq 0 \ \vee \ z \geq 2$, d.h. $T_z = \emptyset\,. \quad \Rightarrow \quad g(z) = 0\,. \quad \checkmark$
- $0 < z < 1$, d.h. $T_z = (0, z)\,. \quad \Rightarrow \quad g(z) = \int\limits_0^z f(t, z-t)\, dt = \int\limits_0^z 1\, dt = z\,. \quad \checkmark$
- $1 \leq z < 2$, d.h. $T_z = (z-1, 1)\,.$
  $\Rightarrow \quad g(z) = \int\limits_{z-1}^{1} f(t, z-t)\, dt = \int\limits_{z-1}^{1} 1\, dt = 1 - (z-1) = 2 - z\,. \quad \checkmark$

Z33

f bezeichne die Dichte von X, g entsprechend die Dichte von Y. Dann gilt

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{cl} \lambda \cdot e^{-\alpha x} & , \ x > 0 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad g(y) = \left\{ \begin{array}{cl} \lambda \cdot e^{-\beta y} & , \ y > 0 \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

Nach der Faltungsformel ergibt sich die gesuchte Dichte h von $Z := X + Y$ zu

$$h(z; \alpha, \beta) \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(z-t)\, dt\,.$$

Wegen $[\,f(t) = 0$ für $t \leq 0\,]$ und $[\,g(z-t) = 0$ für $z \leq t\,]$ erhält man weiter

$$h(z; \alpha, \beta) \ = \ \int_0^z \alpha \cdot e^{-\alpha t} \cdot \beta \cdot e^{-\beta(z-t)}\, dt \ = \ \alpha \cdot \beta \cdot e^{-\beta z} \int_0^z e^{-(\alpha-\beta)t}\, dt\,.$$

Fallunterscheidung:

$\alpha = \beta$:

$$h(z;\alpha,\alpha) \;=\; \alpha^2 \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z 1\,dt \;=\; \alpha^2 \cdot z \cdot e^{-\alpha z}\,.$$

$\alpha \neq \beta$:

$$\begin{aligned} h(z;\alpha,\beta) \;&=\; \alpha\cdot\beta\cdot e^{-\beta z}\left[-\frac{1}{\alpha-\beta}\cdot e^{-(\alpha-\beta)t}\right]_0^z \\ &=\; \frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha-\beta}\cdot e^{-\beta z}\left(1-e^{-(\alpha-\beta)z}\right) \;=\; \frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha-\beta}\left(e^{-\beta z}-e^{-\alpha z}\right). \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Für $\alpha \neq \beta$ heißt eine Zufallsvariable Z mit der obigen Dichte **hypoexponential-verteilt**, für $\alpha = \beta$ **Erlang-verteilt**, jeweils mit der Stufenzahl 2.
- Mit Hilfe der Regel von L'Hospital kann man

  $$\lim_{\beta\to\alpha} h(z;\alpha,\beta) = h(z;\alpha,\alpha)$$

  zeigen, so daß im weiteren ohne Fallunterscheidung die Dichte von Z als

  $$h(z;\alpha,\beta) := \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\alpha-\beta}\cdot\left(e^{-\beta z}-e^{-\alpha z}\right) & , \quad z > 0 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

  angegeben werden kann.

Z34

a) Nach Voraussetzung sind U_1 und U_2 unabhängig, besitzen also die gemeinsame Dichte

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & , \quad \llcorner x_1, x_2 \lrcorner \in (0,1) \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Für die Dichte g von $Z := U_1 - U_2$ gilt:

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t, t-z)\,dt\,.$$

Wegen

- $f(t,\cdot) = 0$ für $t \notin (0,1)$ und
- $f(\,\cdot\,, t-z) = 0$ für $t - z \notin (0,1)$, d.h. $(t \leq z) \vee (t \geq z+1)$

ist der Integrand $f(t,t-z)$ also genau auf der Menge

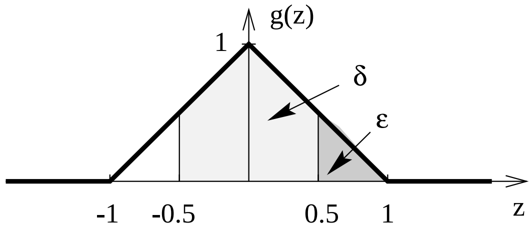
$$T_z := \{t \mid t \in (0,1) \cap (z, z+1)\}$$

ungleich 0 (und konstant 1). Dies führt zu folgender Fallunterscheidung:

- $z \leq -1 \ \vee \ z \geq 1$, d.h. $T_z = \emptyset$.
  $\Rightarrow \quad g(z) = 0 \,. \qquad \checkmark$
- $-1 < z < 0$, d.h. $T_z = (0, z+1)$.
  $\Rightarrow \quad g(z) = \int\limits_0^{z+1} f(t, t-z)\,dt = \int\limits_0^{z+1} 1\,dt = z+1 \,. \qquad \checkmark$
- $0 \leq z < 1$, d.h. $T_z = (z, 1)$.
  $\Rightarrow \quad g(z) = \int\limits_z^{1} f(t, t-z)\,dt = \int\limits_z^{1} 1\,dt = 1-z \,. \qquad \checkmark$

c) Aus der Zeichnung erhält man sofort:

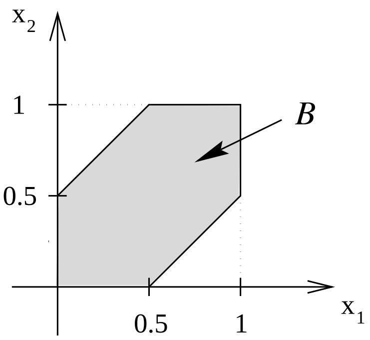
$$\begin{aligned} \delta &= 1 - 2\cdot\varepsilon = 1 - 2\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot 0.5^2}_{\text{Dreiecksfläche}} \\ &= 0.75\,. \end{aligned}$$



Alternativer Lösungsweg zur Bestimmung von δ: Ohne Verwendung der Dichte von Z erhält man

$$\delta \;=\; P(„|Z| \leq 0.5“) \;=\; P(„-0.5 \leq Z \leq 0.5“) \;=\; \int_B f(x_1, x_2)\,dx_2\,dx_1$$

$$\text{wobei } B \;=\; \{(x_1, x_2) \mid -0.5 \leq x_1 - x_2 \leq 0.5, 0 \leq \llcorner x_1, x_2 \lrcorner \leq 1\}$$



$$\begin{aligned} &= 1 - \int_{x_1=0.5}^{1}\int_{x_2=0}^{x_1-0.5} f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1 - \int_{x_1=0}^{0.5}\int_{x_2=0.5+x_1}^{1} f(x_1,x_2)\,dx_2\,dx_1 \\ &= 1 - \int_{x_1=0.5}^{1}\int_{x_2=0}^{x_1-0.5} 1\,dx_2\,dx_1 - \int_{x_1=0}^{0.5}\int_{x_2=0.5+x_1}^{1} 1\,dx_2\,dx_1 \\ &= 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \;=\; \frac{3}{4}\,. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Da f konstant ist, lassen sich die beiden nicht gefärbten Dreiecksbereiche natürlich auch einfacher mit geometrischen Überlegungen bestimmen. Allerdings ist dann die allgemeine Vorgehensweise nicht mehr erkennbar.

d) Wegen $X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$ gilt:

d1) $P(„|X_1 - X_2| \le 0.5“) \;=\; P(„-0.5 \le X_1 - X_2 \le 0.5“)$

$$= \; P\left(„-\frac{0.5}{\sqrt{2}\sigma} \le \frac{X_1 - X_2}{\sqrt{2}\sigma} \le \frac{0.5}{\sqrt{2}\sigma}“\right) \;=\; 2 \cdot \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{2}\sigma}\right) - 1 \overset{!}{\ge} \delta$$

$$\iff \quad \Phi\left(\frac{0.5}{\sqrt{2}\sigma}\right) \ge \frac{1+\delta}{2} \overset{c)}{=} 0.875 \quad \iff \quad \frac{0.5}{\sqrt{2}\sigma} \ge \Phi^{-1}(0.875) \approx 1.15$$

$$\iff \quad \sigma^2 \le \frac{0.25}{2 \cdot 1.15^2} \approx 0.0945$$

d2) $P(„|X_1 - X_2| \le 0.5“) \;=\; 1 - P(„|X_1 - X_2 - 0| > 0.5“)$

$$\overset{\text{T-Ungl.}}{\ge} \; 1 - \frac{2\sigma^2}{0.25} \overset{!}{\ge} 0.75 \quad \iff \quad 0.25 \ge \frac{2\sigma^2}{0.25} \quad \iff \quad \sigma^2 \le \frac{0.25^2}{2} = 0.03125$$

Z35

a) Für den Erwartungswert und die Varianz des i-ten Beitrags gilt:

$$\begin{aligned} E(B_i) &= E(V_i + D_i) \;=\; E(V_i) + E(D_i) \;=\; 30 + 15 \;=\; 45 \\ Var(B_i) &= Var(V_i + D_i) \;=\; Var(V_i) + Var(D_i) + 2 \cdot Cov(V_i, D_i) \\ &= 15 + 8 - 2 \cdot 5 \;=\; 13 \end{aligned}$$

b) Für den Erwartungswert und die Varianz der Gesamtdauer $\sum_{i=1}^{10} B_i$ gilt:

$$E\left(\sum_{i=1}^{10} B_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{10} E(B_i) \;=\; 450 \quad \text{und} \quad Var\left(\sum_{i=1}^{10} B_i\right) \overset{\text{U}}{=} \sum_{i=1}^{10} Var(B_i) \;=\; 130\,.$$

c) Gesucht ist die Ws des Ereignisses „$G < 465$“, wobei $G := \sum_{i=1}^{4} B_i + M + \sum_{i=5}^{10} B_i$.
Mit $E(G) = 450 + E(M) = 480$ und $Var(G) \overset{\text{U}}{=} 130 + Var(M) = 144$ erhält man:

$$\begin{aligned} P(„G < 465“) &= P\left(„\underbrace{\frac{G - E(G)}{\sqrt{Var(G)}}}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} < \frac{465 - 480}{12}“\right) \;=\; \Phi\left(-\frac{15}{12}\right) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{5}{4}\right) \;=\; 1 - \Phi(1.25) \;=\; 1 - 0.8944 \;=\; 10.56\%\,. \end{aligned}$$

Z36

a) $\Omega = \{0,1\}^2\,,\quad \mathfrak{A} = 2^{\Omega}\,,\quad P(\{\omega\}) = \dfrac{1}{4}\ \ \forall\,\omega \in \Omega\,.$

b1) Die Wertebereiche von X und Y ergeben sich zu $W_X = \{0,1\}$ und $W_Y = \{0,1,2\}$.

b2)

X \ Y	0	1	2	$p_{i\bullet}$
0	0.25	0.50	0.00	0.75
1	0.00	0.00	0.25	0.25
$p_{\bullet j}$	0.25	0.50	0.25	1.00

b3) Nein, da z.B. $0 = P(\text{„}X=1\text{“}, \text{„}Y=1\text{“}) \neq P(\text{„}X=1\text{“}) \cdot P(\text{„}Y=1\text{“}) = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}\,.$

c) Es gilt:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= 0\cdot\frac{3}{4} + 1\cdot\frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{4}\\
E(X^2) &= 0^2\cdot\frac{3}{4} + 1^2\cdot\frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{4}\\
E(Y) &= 0\cdot\frac{1}{4} + 1\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} \;=\; 1\\
E(Y^2) &= 0^2\cdot\frac{1}{4} + 1^2\cdot\frac{1}{2} + 2^2\cdot\frac{1}{4} \;=\; \frac{3}{2}\\
Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \;=\; \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \;=\; \frac{3}{16}\\
Var(Y) &= E(Y^2) - E(Y)^2 \;=\; \frac{3}{2} - 1^2 \;=\; \frac{1}{2}\\
E(X\cdot Y) &= 0\cdot 0\cdot\frac{1}{4} + 0\cdot 1\cdot\frac{1}{2} + 0\cdot 2\cdot 0 + 1\cdot 0\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot\frac{1}{4} \;=\; \frac{1}{2}\\
Cov(X,Y) &= E(X\cdot Y) - E(X)\cdot E(Y) \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot 1 \;=\; \frac{1}{4}\\
\rho(X,Y) &= \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)}\cdot\sqrt{Var(Y)}} \;=\; \frac{1}{4}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}}\cdot\sqrt{2} \;=\; \sqrt{\frac{2}{3}} \;\approx\; 0.82
\end{aligned}
$$

Z37

a1) U spaltet das Intervall $[-1,1]$ in die beiden Teile $[-1,U]$ und $(U,1]$. Die Länge $g(U)$ des größeren Teilintervalls ergibt sich folglich in Abhängigkeit von U zu

$$
g(U) \;=\; \max\{U+1, 1-U\} \;=\; \begin{cases} U+1 & , \quad U > 0 \\ 1-U & , \quad U \leq 0\,. \end{cases}
$$

a2) Offensichtlich ist $g(U)$ stetig. Damit gilt mit der Dichte $f(u) = \frac{1}{2} \cdot I_{(-1,1)}(u)$ von U:

$$\begin{aligned} E[g(U)] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(u) f(u)\, du \;=\; \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{0} (1-u)\, du + \frac{1}{2} \cdot \int_{0}^{1} (u+1)\, du \\ &= \frac{1}{2}\left(\left[u - \frac{u^2}{2} \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{u^2}{2} + u \right]_{0}^{1} \right) \;=\; \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 \right) \;=\; \frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

b) Wegen

$$E(U) \;=\; \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} u\, du \;=\; \left[\frac{u^2}{4} \right]_{-1}^{1} \;=\; 0$$

und

$$E(U \cdot V) \;=\; E(U^3) \;=\; \frac{1}{2} \cdot \int_{-1}^{1} u^3\, du \;=\; \left[\frac{u^4}{8} \right]_{-1}^{1} \;=\; 0$$

ist

$$Cov(U,V) \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{E(U \cdot V)}_{=\,0} - \underbrace{E(U)}_{=\,0} \cdot E(V) \;=\; 0\,,$$

d.h. U und V sind unkorreliert.

c) U und V sind stochastisch abhängig, da z.B.

$$\begin{aligned} P(\text{„}U \le -0.75\text{“}, \text{„}V \le 0.25\text{“}) &= P(\text{„}U \le -0.75\text{“}, \text{„}-0.5 \le U \le 0.5\text{“}) \\ &= P(\emptyset) = 0 \\ &\neq \underbrace{P(\text{„}U \le -0.75\text{“})}_{>\,0} \cdot \underbrace{P(\text{„}V \le 0.25\text{“})}_{>\,0}\,. \end{aligned}$$

Z38

Definition:

$\Sigma \in \mathbb{R}^{2,2}$ heißt **positiv definit** $:\Leftrightarrow$ (1) $\Sigma = \Sigma^T$
(2) $x^T \Sigma x > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$
($\Leftrightarrow$ alle Eigenwerte von Σ sind positiv) □

Wegen (1) ist Σ diagonalisierbar, und man erhält als Eigenwertzerlegung

$$\Sigma = U \cdot \Lambda \cdot U^T = (u_1, u_2) \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot \begin{pmatrix} u_1^T \\ u_2^T \end{pmatrix}$$

mit
- $\Sigma u_i = \lambda_i u_i\,, \; i = 1,2$
- $UU^T = U^T U = Id_2 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, d.h. die u_i sind orthonormierte Eigenvektoren.

Nach (2) gilt: $\lambda_i > 0\,,\ i = 1, 2\,.$

Weiter:
- $\Sigma^{-1} = U \cdot \Lambda^{-1} \cdot U^T$, wegen
$(U \cdot \Lambda \cdot U^T) \cdot (U \cdot \Lambda^{-1} \cdot U^T) = U \cdot \Lambda \cdot \underbrace{U^T U}_{=\, Id_2} \cdot \Lambda^{-1} \cdot U^T = U \cdot \Lambda \cdot \Lambda^{-1} \cdot U^T$
$= \ U \cdot U^T = Id_2$
- $\Lambda^{-1} = \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1})$ [trivial]
- $\det(\Sigma^{-1}) = \det(U \cdot \Lambda^{-1} \cdot U^T) = \det(U) \cdot \det(\Lambda^{-1}) \cdot \det(U^T)$
$= \ 1 \cdot (\lambda_1^{-1} \cdot \lambda_2^{-1}) \cdot 1 \ = \ (\lambda_1 \cdot \lambda_2)^{-1}$

Zur Berechnung des gesuchten Integrals wird eine sogenannte Hauptachsentransformation durchgeführt (vgl. Normalformen von Kegelschnitten): Es sei also

$$y := U^T(x - \mu) \quad (\Leftrightarrow \ x = \mu + Uy)$$

mit

$$U = \left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)_{1 \le \llcorner i,j \lrcorner \le 2}, \quad |\det(U)| = 1\,.$$

Dann erhält man mit der Transformationsformel für Dichten:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x)\, dx \ &= \ \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2} y^T \Lambda^{-1} y\right) \cdot |\det(U)|\, dy \\
&= \ \frac{1}{2\pi\sqrt{\lambda_1 \lambda_2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{\lambda_1} + \frac{y_2^2}{\lambda_2}\right)\right] dy_1 dy_2 \\
&= \ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_1}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{y_1^2}{\lambda_1}\right)}_{=:\ f_1(y_1;\lambda_1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\lambda_2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{y_2^2}{\lambda_2}\right)}_{=:\ f_2(y_2;\lambda_2)} dy_1 dy_2 \\
&= \ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y_1;\lambda_1)\, dy_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(y_2;\lambda_2)\, dy_2 \ = \ 1 \cdot 1 \ = \ 1,
\end{aligned}$$

[da $f_i(y_i;\lambda_i)$ offensichtlich die Dichte einer (eindimensional) $\mathcal{N}(0, \lambda_i)$-verteilten ZV ist, $i = 1, 2$].

Mit $f(x) \ge 0$ folgt die Behauptung. ✓

Z39

Wegen $-1 < \rho < 1$ ist Σ positiv definit, und es gilt:

$$\det \Sigma = 1 - \rho^2 \quad \text{und} \quad \Sigma^{-1} = \frac{1}{1 - \rho^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Ermittlung der Dichte $f(x_1, x_2)$ von (X_1, X_2) wird also sicherlich der folgende Term benötigt:

$$\begin{aligned}
(X_1, X_2)\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} &= X_1^2 - 2\rho X_1 X_2 + X_2^2 \\
= \quad & -2\ln(U_1)\cdot\left[\sin^2(2\pi U_2) - 2\rho\sin(2\pi U_2)\sin(2\pi U_2-\theta) + \sin^2(2\pi U_2 - \theta)\right] \\
= \quad & -2\ln(U_1)\cdot\Big[\sin^2(2\pi U_2) - 2\rho\sin(2\pi U_2)\left[\sin(2\pi U_2)\rho - \cos(2\pi U_2)\sin(\theta)\right] \\
& + \left[\sin(2\pi U_2)\rho - \cos(2\pi U_2)\sin(\theta)\right]^2\Big] \quad \text{(Additionstheorem des Sinus)} \\
= \quad & -2\ln(U_1)\cdot\left[\sin^2(2\pi U_2) - 2\rho^2\sin^2(2\pi U_2) + \rho^2\sin^2(2\pi U_2) + \cos^2(2\pi U_2)\sin^2(\theta)\right] \\
= \quad & -2\ln(U_1)\cdot\left[\sin^2(2\pi U_2)(1-\rho^2) + \cos^2(2\pi U_2)(1-\rho^2)\right] \quad = \quad -2(1-\rho^2)\ln(U_1)\,,
\end{aligned}$$

d.h.

$$U_1 = \exp\left[-\frac{1}{2}\cdot(X_1, X_2)\,\Sigma^{-1}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\right].$$

Nach der Transformationsregel ergibt sich $f(x_1, x_2)$ zu

$$f(x_1, x_2) = g(u_1, u_2)\cdot\left|\det\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\right|,$$

wobei

- $g(u_1, u_2) = \begin{cases} 1 & , \ \llcorner u_1, u_2 \lrcorner \in (0,1) \\ 0 & , \ \text{sonst} \end{cases}$
- $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}\right) = \begin{pmatrix} -\dfrac{\sin(2\pi\cdot u_2)}{u_1\cdot\sqrt{-2\cdot\ln u_1}} & 2\pi\cdot\sqrt{-2\cdot\ln u_1}\cdot\cos(2\pi\cdot u_2) \\ -\dfrac{\sin(2\pi\cdot u_2-\theta)}{u_1\cdot\sqrt{-2\cdot\ln u_1}} & 2\pi\cdot\sqrt{-2\cdot\ln u_1}\cdot\cos(2\pi\cdot u_2-\theta) \end{pmatrix}$
- $\begin{aligned}\left|\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j}\right)\right| &= \frac{2\pi}{u_1}\cdot\left|-\sin(2\pi\cdot u_2)\cos(2\pi\cdot u_2-\theta) + \cos(2\pi\cdot u_2)\sin(2\pi\cdot u_2-\theta)\right| \\ &= \frac{2\pi}{u_1}\cdot|\sin(-\theta)| \ = \ \frac{2\pi}{u_1}\cdot\sin(\theta)\,, \text{ da } \ 0<\theta<\pi \ \text{ wegen } \ -1<\rho<1 \\ &= \frac{2\pi}{u_1}\cdot\sqrt{1-\rho^2}\,.\end{aligned}$

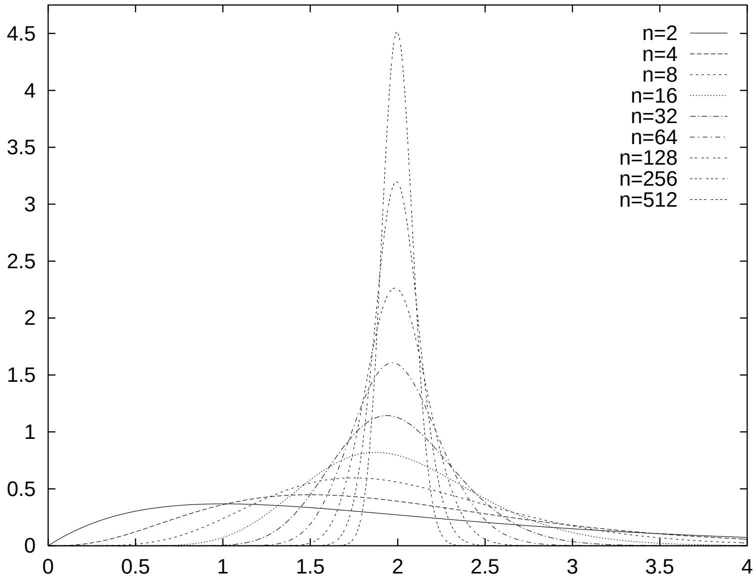
Zusammen erhält man:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2\sqrt{1-\rho^2}}\cdot(x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -\rho \\ -\rho & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]. \qquad \checkmark$$

Z40

a) λ_n bezeichne den Parameter der Verteilung von X_n. Wegen $E(X_n) = n/\lambda_n \stackrel{!}{=} 2$ muß also $\lambda_n = n/2$ sein, d.h. die Dichte von X_n lautet

$$\left\{ \begin{array}{cc} \left(\frac{n}{2}\right)^n \cdot \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-nt/2} & , \; t > 0 \\ 0 & , \; \text{sonst.} \end{array} \right\}$$



b) Nach **A4.3** gilt: $\quad Var(X_n) = \dfrac{n}{\lambda_n^2} = \dfrac{4}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$

X_∞ ist also eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 2 und Varianz 0 und nimmt folglich den konstanten Wert 2 mit Wahrscheinlichkeit 1 an.

Bemerkung: Man beachte, daß X_∞ bei einer Interpretation als Grenzwert von stetigen Zufallsvariablen formal die Dichte

$$\delta_2(t) = \left\{ \begin{array}{cc} \infty & , \; t = 2 \\ 0 & , \; \text{sonst} \end{array} \right\}$$

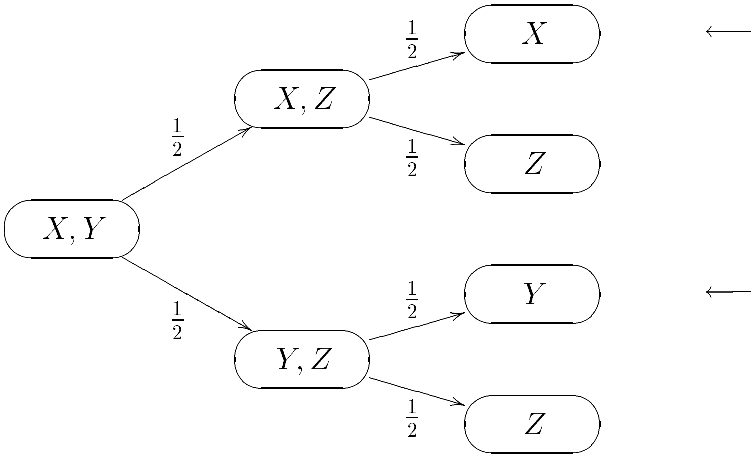
besitzt.

Z41

An den beiden Kassen konkurrieren jeweils zwei $\mathcal{E}x(\lambda)$-verteilte Bedienungen, die nach Voraussetzung voneinander unabhängig sind. Nach **A4.7** sind daher die Wahrscheinlichkeiten, daß die Bedienung an der ersten bzw. der zweiten Kasse schneller erfolgt, identisch gleich

$$\frac{\lambda}{\lambda + \lambda} = \frac{1}{2}\,.$$

Bezeichnen wir die beiden ersten Kunden mit X und Y, sowie den nachfolgend eintreffenden Kunden mit Z, so erhalten wir das folgende Übergangsdiagramm



wobei beispielsweise X, Y bedeutet, daß gerade die Kunden X und Y an der Kasse bedient werden, und die Pfeile $\longleftarrow$ die für unsere Fragestellung interessanten Ausgänge bezeichnen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit läßt sich dann unmittelbar ablesen als

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \;=\; \frac{1}{2}\,.$$

Z42

$$\begin{aligned} F_{Y_N}(y) &= P(„Y_N \le y") \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} P(„Y_N \le y" \mid „N = n") \cdot P(„N = n") \\ &\overset{\text{U}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(„\max\{X_1, \ldots, X_n\} \le y") \cdot P(„N = n") \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(„X_1 \le y", \ldots, „X_n \le y") \cdot P(„N = n") \\ &\overset{\text{U}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} F^n(y) \cdot P(„N = n") \overset{\text{def}}{=} G(F(y)) \;=\; (G \circ F)(y)\,. \qquad \checkmark \end{aligned}$$

2.5 Schätzen und Testen

Z43

a) $U(X_1, \ldots, X_n) = 2 \cdot \bar{X}$, denn

$$E(U) \;=\; 2 \cdot E(\bar{X}) \;=\; \frac{2}{n} \cdot E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \;=\; \frac{2}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} E(X_i) \;=\; \frac{2}{n} \cdot n \cdot \frac{\lambda}{2} \;=\; \lambda\,.$$

b) Für $\bar{X}$ gilt:

$$E(\bar{X}) \;=\; \frac{\lambda}{2}\,, \qquad Var(\bar{X}) \;=\; \frac{1}{n^2} \cdot Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \;\overset{\text{U}}{=}\; \frac{n \cdot Var(X_1)}{n^2} \;=\; \frac{\lambda^2}{12 \cdot n}\,.$$

Nach dem Zentralen Grenzwertsatz ist

$$U := \frac{\sqrt{12 \cdot n}}{\lambda} \cdot \left(\bar{X} - \frac{\lambda}{2} \right)$$

asymptotisch standardnormalverteilt. Für $\alpha = 0.05$ sind also nun a und b gesucht mit

$$P(„a \leq U \leq b“) = 1 - \alpha\,.$$

Diese Gleichung ist beispielsweise erfüllt für $b = x_{1-\alpha/2}$ und $a = x_{\alpha/2}$, und man erhält:

$$\begin{aligned}
0.95 &\approx P(„x_{0.025} \leq U \leq x_{0.975}“) \\
&= P(„-x_{0.975} \leq U \leq x_{0.975}“) \\
&= P\left(„-x_{0.975} \leq \frac{\sqrt{12 \cdot n}}{\lambda} \cdot \left(\bar{X} - \frac{\lambda}{2}\right) \leq x_{0.975}“\right) \\
&= P\left(„-x_{0.975} \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{\sqrt{12 \cdot n}} \leq 2 \cdot \bar{X} - \lambda \leq x_{0.975} \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{\sqrt{12 \cdot n}}“\right) \\
&= P\left(„1 - x_{0.975} \cdot \frac{2}{\sqrt{12 \cdot n}} \leq \frac{2 \cdot \bar{X}}{\lambda} \leq 1 + x_{0.975} \cdot \frac{2}{\sqrt{12 \cdot n}}“\right) \\
&= P\left(„\frac{\sqrt{12 \cdot n} - 2 \cdot x_{0.975}}{\sqrt{12 \cdot n}} \leq \frac{2 \cdot \bar{X}}{\lambda} \leq \frac{\sqrt{12 \cdot n} + 2 \cdot x_{0.975}}{\sqrt{12 \cdot n}}“\right) \\
&= P\left(„\frac{2 \cdot \bar{X} \cdot \sqrt{12 \cdot n}}{\sqrt{12 \cdot n} + 2 \cdot x_{0.975}} \leq \lambda \leq \frac{2 \cdot \bar{X} \cdot \sqrt{12 \cdot n}}{\sqrt{12 \cdot n} - 2 \cdot x_{0.975}}“\right).
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das konkrete 95%-Konfidenzintervall zu

$$\left[\frac{20}{1 + 1.96/12}, \frac{20}{1 - 1.96/12} \right] \approx [17.19, 23.90]\,.$$

Z44

a) Für die Vf F von U_1 (bzw. U_2) gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \; x \leq 0 \\ \frac{x}{\lambda} & , \; 0 < x < \lambda \\ 1 & , \; \text{sonst.} \end{cases}$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
G(z) &= P(„Z \leq z“) \;=\; 1 - P(„Z > z“) \;=\; 1 - P(„\min\{U_1, U_2\} > z“) \\
&= 1 - P(„U_1 > z“, „U_2 > z“) \overset{\text{U}}{=} 1 - P(„U_1 > z“) \cdot P(„U_2 > z“) \\
&= 1 - [1 - F(z)]^2 \;=\; 2 \cdot F(z) - F^2(z) \\
&= \left\{ \begin{array}{cl} 0 & , \; z \leq 0 \\ \frac{2z}{\lambda} - \frac{z^2}{\lambda^2} & , \; 0 < z < \lambda \\ 1 & , \; \text{sonst} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cl} 0 & , \; z \leq 0 \\ \frac{2\lambda z - z^2}{\lambda^2} & , \; 0 < z < \lambda \\ 1 & , \; \text{sonst} \end{array} \right\} \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b) Wegen $Z \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \int_0^\infty [1-G(z)]\,dz \overset{\text{a)}}{=} \int_0^\lambda \left(1-\frac{2\lambda z - z^2}{\lambda^2}\right) dz \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\cdot\int_0^\lambda (\lambda^2 - 2\lambda z + z^2)\,dz = \frac{1}{\lambda^2}\cdot\left[\lambda^2 z - 2\lambda\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}\right]_0^\lambda \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\cdot\left(\lambda^3 - \lambda^3 + \frac{\lambda^3}{3}\right) = \frac{\lambda}{3}\,. \end{aligned}$$

c) $E(T) = E(\alpha \cdot Z) = \alpha \cdot E(Z) \overset{\text{b)}}{=} \alpha \cdot \frac{\lambda}{3} \overset{!}{=} \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = 3\,.$

d) $T(u_1, u_2) \overset{\text{c)}}{=} 3 \cdot \min\{13.2, 10.3\} = 30.9\,.$

Z45

a) Wegen

$$\begin{aligned} E(T) &= E(X_1 + \min\{X_2,\ldots,X_{n-1}\} + X_n) \\ &= E(X_1) + E(\min\{X_2,\ldots,X_{n-1}\}) + E(X_n) \\ &\overset{\text{U}}{=} \lambda + \frac{\lambda}{n-2} + \lambda = \frac{2n-3}{n-2}\cdot\lambda \end{aligned}$$

ergibt sich der Bias zu

$$E(T) - \tau(\lambda) = \frac{2n-3-n+2}{n-2}\cdot\lambda = \frac{n-1}{n-2}\cdot\lambda\,.$$

b) Nach a) ist $\frac{n-2}{2n-3}\cdot\lambda$ erwartungstreu für $\tau(\lambda) = \lambda\,.$

c) Für $\bar{X}$ gilt:

$$E(\bar{X}) = \lambda \quad \text{und} \quad Var(\bar{X}) \overset{\text{U}}{=} \frac{\lambda^2}{n}\,.$$

Mit dem Zentralen Grenzwertsatz erhält man damit:

$$\begin{aligned} 0.9 &\approx P\left(\text{„} -x_{0.95} \leq \frac{\sqrt{n}}{\lambda}(\bar{X}-\lambda) \leq x_{0.95}\text{“}\right) \\ &= P\left(\text{„}\sqrt{n} - x_{0.95} \leq \frac{\sqrt{n}\cdot\bar{X}}{\lambda} \leq \sqrt{n} + x_{0.95}\text{“}\right) \\ &= P\left(\text{„}\frac{\sqrt{n}\cdot\bar{X}}{\sqrt{n}+x_{0.95}} \leq \lambda \leq \frac{\sqrt{n}\cdot\bar{X}}{\sqrt{n}-x_{0.95}}\text{“}\right)\,. \end{aligned}$$

Das konkrete 90%-Konfidenzintervall lautet also $[3.651, 5.084]\,.$

Z46

Am einfachsten ist sicherlich zunächst die Bestimmung der asymptotischen Konfidenzintervalle: Mit $E(X_i) = \mu$ und $Var(X_i) = \mu^2$, $i = 1, \ldots, n$, ist

$$U := \frac{\sqrt{n}}{\mu}\left(\bar{X} - \mu\right)$$

nach dem Zentralen Grenzwertsatz asymptotisch standardnormalverteilt. Dann gilt für $\alpha > 0.5$:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha \;&\approx\; P\left(„x_{\alpha/2} \le U \le x_{1-\alpha/2}“\right) \;=\; P\left(„-x_{1-\alpha/2} \le \frac{\sqrt{n}}{\mu}\left(\bar{X} - \mu\right) \le x_{1-\alpha/2}“\right) \\ &=\; P\left(„\sqrt{n} - x_{1-\alpha/2} \le \frac{\sqrt{n}\cdot\bar{X}}{\mu} \le \sqrt{n} + x_{1-\alpha/2}“\right) \\ &=\; P\left(„\frac{\sqrt{n}\cdot\bar{X}}{\sqrt{n} + x_{1-\alpha/2}} \le \mu \le \frac{\sqrt{n}\cdot\bar{X}}{\sqrt{n} - x_{1-\alpha/2}}“\right). \end{aligned}$$

Im weiteren wollen wir nun exakte Konfidenzintervalle für μ bestimmen. Dazu ist es wie bei der vorherigen Herleitung erforderlich, neben den Stichprobenvariablen X_i auch μ ins Spiel zu bringen. Gesucht sind also neue Zufallsvariable $Y_i := f(X_i, \mu)$ für eine geeignete Funktion f. Wir setzen speziell $Y_i := (2\cdot X_i)/\mu$, $i = 1, \ldots, n$, da für $y > 0$ nun gilt:

$$P(„Y_i \le y“) \;=\; P\left(„\frac{2\cdot X_i}{\mu} \le y“\right) \;=\; P\left(„X_i \le \frac{y\cdot\mu}{2}“\right) \;=\; 1 - \exp\left(-\frac{y}{2}\right).$$

Die Y_i sind also wiederum exponentialverteilt bzw. bei genauerer Betrachtung χ^2-verteilt mit 2 Freiheitsgraden. Nun ist auch klar, warum wir genau diese Transformation gewählt haben: Wir sind damit wie bei der Standardnormalverteilung in der Lage, Quantile zu verwenden, die in der Literatur tabelliert sind. Entsprechend ist

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{2\cdot X_i}{\mu} \;=\; \frac{2n}{\mu}\cdot\bar{X}$$

χ^2-verteilt mit $2n$ Freiheitsgraden, und wir erhalten schließlich:

$$1 - \alpha \;=\; P\left(„\chi^2_{2n;\alpha/2} \le \frac{2n}{\mu}\cdot\bar{X} \le \chi^2_{2n;1-\alpha/2}“\right) \;=\; P\left(„\frac{2n\cdot\bar{X}}{\chi^2_{2n;1-\alpha/2}} \le \mu \le \frac{2n\cdot\bar{X}}{\chi^2_{2n;\alpha/2}}“\right).$$

Nun bleibt nur noch, die angegebenen Werte für n und $\bar{x}$ in beide Formeln einzusetzen:

n	asympt.	exakt
25	[7.184, 16.447]	[7.001, 15.452]
50	[7.830, 13.835]	[7.718, 13.473]
100	[8.361, 12.438]	[8.297, 12.290]
200	[8.783, 11.609]	[8.747, 11.545]
500	[9.194, 10.961]	[9.178, 10.938]
2000	[9.580, 10.458]	[9.576, 10.453]

Wie erwartet, stimmen die Konfidenzintervalle für steigenden Stichprobenumfang n immer besser überein. Desweiteren nähern sich die Grenzen der Konfidenzintervalle immer mehr dem gemessenen Stichprobenmittel.

Z47

Für die Likelihood-Funktion $L(x,\lambda)$ gilt:

$$\begin{aligned}
L(x,\lambda) &= (\lambda+1)^n \cdot \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda} \\
\ln(L(x,\lambda)) &= n\cdot\ln(\lambda+1) \;+\; \lambda\cdot\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \\
\left.\frac{d\ln(L(x,\lambda))}{d\lambda}\right|_{\lambda=\hat\lambda} &= n\cdot\frac{1}{\hat\lambda+1} \;+\; \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \;\stackrel{!}{=}\; 0 \\
&\Leftrightarrow\; n\cdot\frac{1}{\hat\lambda+1} \;=\; -\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i) \\
&\Leftrightarrow\; \hat\lambda \;=\; -\left(1+\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln(x_i)}\right)
\end{aligned}$$

Wegen

$$\left.\frac{d^2\ln(L(x,\lambda))}{d\lambda^2}\right|_{\lambda=\hat\lambda} \;=\; -n\cdot\frac{1}{(\hat\lambda+1)^2} \;<\; 0$$

ist $\hat\lambda$ tatsächlich der gesuchte ML-Schätzer.

Z48

Die Menge K der in X_i linearen Schätzvariablen ergibt sich zu

$$K := \left\{ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i \mid \llcorner\alpha_1,\ldots,\alpha_n\lrcorner \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für ein beliebiges $U=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i X_i \;\in K$ gilt weiter:

$$\begin{aligned}
E(U) &= E\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i E(X_i) \;=\; \mu\cdot\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,, \\
Var(U) &= Var\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i X_i\right) \;\stackrel{\text{U}}{=}\; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2 Var(X_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sigma_i^2\,,
\end{aligned}$$

und damit:

$$\begin{aligned}
U \text{ ist erwartungstreu} \quad &\Longleftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i = 1 \\
U \text{ hat minimale Varianz} \quad &\Longleftrightarrow\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\sigma_i^2 \;\text{ ist minimal}
\end{aligned}$$

Es ist also eine Lösung des Optimierungsproblems

$$\min_{\alpha_i} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 \mid \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}$$

gesucht, wobei wir aufgrund der Nebenbedingung als Lösungsverfahren den Ansatz der **Lagrange-Multiplikatoren** verwenden:

Gesucht sind $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*, \lambda^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \nabla_\alpha \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sigma_i^2 - \lambda^* \left(1 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \right) \right] \Bigg|_{\alpha=\alpha^*} & = & 0 \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* & = & 1 \end{array}}$$

Explizit erhalten wir:

$$\left. \begin{array}{rcl} 2\alpha_1^* \sigma_1^2 + \lambda^* & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 2\alpha_n^* \sigma_n^2 + \lambda^* & = & 0 \end{array} \right\} \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^* = 1 \qquad (2)$$

Aus (1) folgt

$$\alpha_i^* = \frac{\lambda^*}{2\sigma_i^2}, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (3)$$

(3) in (2) liefert unmittelbar:

$$1 \overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* \overset{(3)}{=} \frac{\lambda^*}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{\sigma_j^2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} \lambda^* & = & \dfrac{2}{\sum_{j=1}^{n} 1/\sigma_j^2} \\ \alpha_i^* & = & \dfrac{1/\sigma_i^2}{\sum_{j=1}^{n} 1/\sigma_j^2}, \quad i = 1, \ldots, n. \end{array}$$

Man beachte, daß die Lösung des Lagrange-Ansatzes lediglich einer notwendigen Bedingung für ein Minimum unter Nebenbedingungen genügt. Für den Nachweis, daß die α_i^* tatsächlich ein Minimum des gesuchten Problems liefern, sei auf Vorlesungen über quadratische Optimierung verwiesen.

Erwartungsgemäß wird also die Schätzvariable mit der kleinsten Varianz am stärksten gewichtet. Dennoch ist es auf den ersten Blick überraschend, daß auch alle anderen Schätzvariablen mit nichtverschwindenden Gewichten in die Linearkombination eingehen.

Klausurvorbereitung

1 Allgemeine Bemerkungen

Bei der Umsetzung alter Klausuraufgaben der Veranstaltung „Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik I für Informatiker“ in die Lehrbücher

- [Greiner & Tinhofer, 1996] (Aufgaben $\boxed{\mathbf{A}\boldsymbol{m.n}}$) und
- [Greiner, 1997] (Aufgaben $\boxed{\mathbf{E}\,\boldsymbol{m.n}}$)

bzw. die hier enthaltenen Zusatzaufgaben $\boxed{\mathbf{Z}\,\boldsymbol{m}}$ wurden sowohl einige Formulierungen geändert, als auch die Punkteverteilung und Hinweise zur weiteren Bearbeitung von Teilaufgaben entfernt. Für eine gezielte Prüfungsvorbereitung sind deshalb hier alle bisherigen Klausuraufgaben mit Aufgabenreferenzen und Punkten für Teilaufgaben angeführt.

Vor den nun folgenden Originalangaben seien zum Abschluß noch einige allgemeine Hinweise zur Bearbeitung angeführt:

- Die Arbeitszeit betrug jeweils 120 Minuten.
- Als Hilfsmittel waren erlaubt:
  - ◇ Formelsammlung für Klausuren[1] (siehe Teil 1)
  - ◇ Taschenrechner
- Zum Bestehen waren jeweils 17 der insgesamt möglichen 40 Punkte erforderlich.

[1] Aussagen der Formelsammlung durften ohne Beweis verwendet werden, falls dies in der Angabe nicht *explizit* verboten wurde.

2 Klausurangaben

2.1 Semestralklausur Sommersemester 1994

Aufgabe 1 **(5 Punkte)** → $\boxed{\textbf{E 3.1}}$

Ein sechsseitiger Würfel werde viermal geworfen.

a) Geben Sie aufgrund des Prinzips der Gleichwahrscheinlichkeit (Laplace-Annahme) einen geeigneten Ws-Raum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ an: → $2\frac{1}{2}$

$\Omega =$

$\mathfrak{A} =$

$P(\{\omega\}) = \qquad\qquad\qquad \forall\, \omega \in \Omega$

b) a_i bezeichne die Augenzahl beim i-ten Wurf ($1 \leq i \leq 4$), d.h. $\omega = (a_1, a_2, a_3, a_4)$ $\forall\, \omega \in \Omega$. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

$$A = \{\omega \in \Omega \mid a_1 < a_2 < a_3 < a_4\}\,. \quad \to \quad 2\tfrac{1}{2}$$

Aufgabe 2 **(7 Punkte)** → $\boxed{\textbf{E 5.3}}$

Aufgrund der Daten einer Umfrage unter Informatikstudenten wurden folgende drei Gruppen gebildet:

Gruppe	Anfertigen von WaSti-Hausaufgaben	prozentualer Anteil der Befragten	davon mit bestandener WaSti-Klausur
H_1	regelmäßig	5%	95%
H_2	ab und zu	20%	60%
H_3	nie	75%	20%

a) K bezeichne das Ereignis „Informatikstudent hat Klausur bestanden“. Geben Sie folgende Wahrscheinlichkeiten an: → 2

$P(H_1) =$	$P(K \mid H_1) =$	$P(\bar{K} \mid H_1) =$
$P(H_2) =$	$P(K \mid H_2) =$	$P(\bar{K} \mid H_2) =$
$P(H_3) =$	$P(K \mid H_3) =$	$P(\bar{K} \mid H_3) =$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewählter Student mit bestandener Klausur nie Hausaufgaben angefertigt hat? → 3

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Bayes.

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewählter Student, der die Klausur nicht bestanden hat, regelmäßig Hausaufgaben angefertigt hat? → 2

Aufgabe 3 (2 Punkte) → E 10.9

(X_1, X_2) sei $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$-verteilt mit $\mu = (2,3)^T$ und $\Sigma = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $E(X_1 \cdot X_2)$.

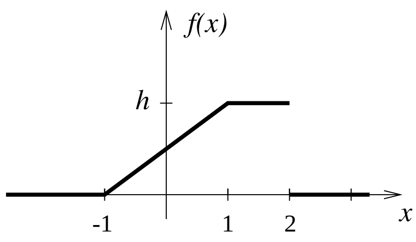
Hinweis: Verwenden Sie die Kovarianz $Cov(X_1, X_2)$.

Aufgabe 4 (8 Punkte) → E 8.1

a) Bestimmen Sie $h \in \mathbb{R}$ so, daß die rechts skizzierte Abbildung f eine Dichtefunktion wird.

Hinweis: Sie brauchen dazu nicht unbedingt die funktionale Darstellung

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -1 \\ h \cdot (x+1)/2 & , \quad -1 \le x < 1 \\ h & , \quad 1 \le x < 2 \\ 0 & , \quad 2 \le x \end{cases}$$



Der Rechenweg muß ersichtlich sein! → $2\frac{1}{2}$

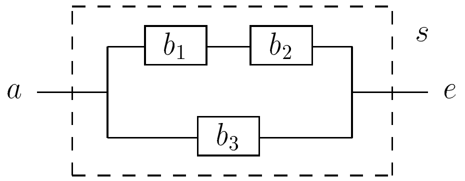
b) Berechnen Sie den Erwartungswert (→ $2\frac{1}{2}$) und das 40%-Quantil (→ 3) einer ZV X mit der in a) gegebenen Dichte.

[Falls Sie a) nicht beantwortet haben, verwenden Sie $h = 0.5$]

Hinweis: Überlegen Sie zunächst, ob das Quantil größer oder kleiner 1 ist.

Aufgabe 5 (5 Punkte) → Z14

Es sei das folgende, aus den Bauteilen b_1 bis b_3 bestehende System s gegeben, das genau dann ausfällt, wenn keine intakte Verbindung mehr zwischen a und e existiert:



Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß s bis zum Zeitpunkt t nicht ausfällt, wenn

- der Ausfall eines beliebigen Bauteils unabhängig vom Ausfall der anderen sein soll, und
- $P(B_i)$ die Ws bezeichnet, daß das Bauteil b_i vor dem Zeitpunkt t nicht ausfällt mit

$$P(B_1) = 0.8 \qquad P(B_2) = 0.9 \qquad P(B_3) = 0.6\,?$$

Aufgabe 6 **(5 Punkte)** $\rightarrow$ $\boxed{\textbf{A1.9}}$

Berechnen Sie in Abhängigkeit des unbekannten Wertes $u \in \mathbb{R}$ für die folgende Meßreihe

$$4 \quad 1 \quad u \quad 3 \quad 5 \quad 2$$

a) das Stichprobenmittel (i.e. den empirischen Mittelwert) $\bar{x} = \bar{x}(u)$ $\rightarrow$ 1

b) das 20%-gestutzte Mittel $\bar{x}_{20\%} = \bar{x}_{20\%}(u)$ $\rightarrow$ 4

Hinweis: Führen Sie eine Fallunterscheidung nach u durch.

Aufgabe 7 **(8 Punkte)** $\rightarrow$ $\boxed{\textbf{E 13.2}}$

Einem Labor wird eine Lieferung neuer, preisgünstigerer Reagenzgläser angeboten. Voraussetzung für einen Kauf ist allerdings, daß die Reagenzgläser einen Schmelzpunkt von mindestens $\mu_0 = 650$ (^{0}C) aufweisen. Bei einer Stichprobe von $n = 30$ ergab sich als Stichprobenmittel $\bar{x} = 648.8$, wobei die Meßwerte $x_1, \ldots, x_{30}$ als Realisierungen von unabhängigen, identisch $\mathcal{N}(\mu, 900)$-verteilten Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_{30}$ angenommen werden.

a) Formulieren Sie einen geeigneten (Gauß-)Test, der gewährleistet, daß die Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung einer Lieferung hinreichend guter Qualität (also mit einem Schmelzpunkt größer oder gleich 650 (^{0}C)) höchstens 5% beträgt (Fehler 1.Art). Mit anderen Worten: Geben Sie Nullhypothese, Alternative und Testniveau an. $\rightarrow$ 2

b) Wird die Lieferung auf der Basis der Beobachtungsdaten angenommen? Begründen Sie Ihre Entscheidung. $\rightarrow$ $2\frac{1}{2}$

Hinweis: Für das α-Quantil x_α von Φ gilt: $x_\alpha = -x_{1-\alpha}$

c) Wie klein darf $\bar{x}$ im obigen Test höchstens sein, so daß H_0 nicht abgelehnt wird? $\rightarrow$ 1

d) Bestimmen Sie für den obigen Test den Fehler 2.Art, wenn $\tilde{\mu} = 635.0$ der tatsächliche Wert von μ ist. $\rightarrow$ $2\frac{1}{2}$

2.2 Nachholklausur Wintersemester 1994/95

Aufgabe 1 **(5 Punkte)** → $\boxed{\textbf{E 1.9}}$

Bei einer Vorlesung im Sommersemester wurden folgende Daten beobachtet:

Woche	i	1	2	3	4	5	6	7	8
Außentemperatur (in ^{0}C)	x_i	19	17	24	27	22	29	26	31
Teilnehmerzahl	y_i	47	51	46	42	48	38	41	36

$$\sum_i x_i = 195 \qquad \sum_i x_i^2 = 4917 \qquad \sum_i y_i = 349 \qquad \sum_i y_i^2 = 15415 \qquad \sum_i x_i y_i = 8338$$

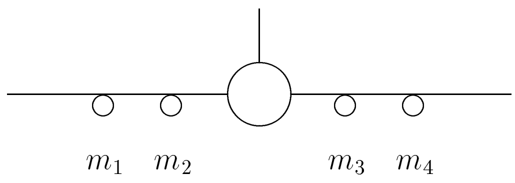
a) Berechnen Sie Achsenabschnitt und Steigung der empirischen Regressionsgerade des Merkmals Y (Teilnehmerzahl) bzgl. X (Außentemperatur). → 3

b) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten r_{xy}. → 1

c) Ist der lineare Ansatz gerechtfertigt? Begründen Sie Ihre Entscheidung. → 1

Aufgabe 2 **(5 Punkte)** → $\boxed{\textbf{Z16}}$, $\boxed{\textbf{E 14.1}}$

Ein Flugzeug



mit den Motoren m_1 bis m_4 stürzt ab, wenn auf mindestens einer Seite beide Motoren ausfallen. Die Ausfälle einzelner Motoren werden als unabhängige Ereignisse betrachtet mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils 5%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß das Flugzeug nicht abstürzt.

Aufgabe 3 **(8 Punkte)** → $\boxed{\textbf{E 7.5}}$

Gegeben sei eine Urne mit 4 grünen und 2 roten Kugeln. Zwei Spieler, X und Y, ziehen abwechselnd eine Kugel ohne Zurücklegen, wobei Spieler X beginnt. Wer zuerst eine rote Kugel zieht, hat gewonnen. Für das Ziehen der Kugeln gelte das Prinzip der Gleichwahrscheinlichkeit (Laplace-Annahme).

a) Vervollständigen Sie die folgende Wahrscheinlichkeitstabelle. $\rightarrow$ $1\frac{1}{2}$

Hinweis: Beachten Sie, daß ein zweiter Zug nur möglich ist, wenn im ersten Zug keine rote Kugel gezogen wurde, daß ein dritter Zug nur möglich ist, wenn...

		P(„in Zug i gezogene Kugel ist ...“)	
Zug i	Spieler	rot	grün
1	X		
2	Y	$\frac{2}{5}$	
3	X		
4	Y		$\frac{1}{3}$
5	X	1	
6	Y	–	–

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Spieler X gewinnt? $\rightarrow$ $1\frac{1}{2}$

c) Die (diskrete) ZV A bezeichne die Anzahl der Ziehungen pro Spiel. Geben Sie die Verteilung P_A von A an. $\rightarrow$ $1\frac{1}{2}$

$P_A(\{1\}) =$

$P_A(\{2\}) =$ Bedenken Sie: $\sum_{i=1}^{5} P_A(\{i\}) = 1$

$P_A(\{3\}) =$

$P_A(\{4\}) =$

$P_A(\{5\}) =$

d) Berechnen Sie $E(A)$ (→ $1\frac{1}{2}$) (also die mittlere Anzahl der Ziehungen pro Spiel) und $Var(A)$ (→ 2).

[Verwenden Sie $P_A(\{1\}) = \frac{4}{15}$, $P_A(\{2\}) = \frac{1}{15}$, $P_A(\{3\}) = \frac{2}{15}$, $P_A(\{4\}) = \frac{5}{15}$ und $P_A(\{5\}) = \frac{3}{15}$, falls Sie c) nicht beantwortet haben. Die angegebenen Werte sind <u>nicht</u> die Ergebnisse von c)!]

Aufgabe 4 **(4 Punkte)** → $\boxed{\textbf{E 16.3}}$

U sei in $(0,1)$ gleichverteilt. Zeigen Sie, daß die ZV $Z := 2 - 2 \cdot \sqrt{U}$ die Vf

$$F(z) = P(„Z \leq z“) = \begin{cases} 0 & , \ z \leq 0 \\ 1 - \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 & , \ 0 < z < 2 \\ 1 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Hinweis: Denken Sie an die inverse Transformation.

Aufgabe 5 **(11 Punkte)** → $\boxed{\textbf{Z44}}$

Die Zufallsvariablen U_1 und U_2 seien unabhängig und in $(0, \lambda)$ gleichverteilt mit $\lambda > 0$.

a) Wie lautet die Vf F von U_1 (bzw. U_2) ? → 1

b) Zeigen Sie, daß die ZV $Z := \min\{U_1, U_2\}$ die Vf

$$G(z) := P(„Z \leq z“) = \begin{cases} 0 & , \ z \leq 0 \\ \frac{2\lambda z - z^2}{\lambda^2} & , \ 0 < z < \lambda \\ 1 & , \ \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt. → 5

c) Zeigen Sie: $E(Z) = \frac{\lambda}{3}$. → 3

Nun sei $\lambda > 0$ unbekannt.

d) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$ so, daß der Schätzer

$$T(U_1, U_2) := \alpha \cdot \min\{U_1, U_2\} \ (= \alpha \cdot Z \ )$$

erwartungstreu ist für λ. → 2

Aufgabe 6 (7 Punkte) → **E 13.4**

Die Laufzeit L (in Sekunden) eines stochastischen Suchverfahrens auf einer Workstation werde als $\mathcal{N}(\mu, 36)$-verteilt angenommen mit unbekanntem $\mu \in \mathbb{R}^+$.

a) Wie groß darf das Stichprobenmittel $\bar{l}$ aus 100 unabhängig voneinander ermittelten Meßwerten $l_1, \ldots, l_{100}$ für die Laufzeit höchstens sein, damit die Nullhypothese

$$H_0 \ : \ \mu \leq 24.5$$

auf einem Testniveau α von

a1) 5%

a2) 1%

nicht verworfen wird? → 3

b) Nun sei die tatsächliche mittlere Laufzeit $\mu = 24$. Bestimmen Sie ein möglichst kleines $\delta \in \mathbb{R}^+$ so, daß höchstens 1% aller Läufe eine höhere Laufzeit als δ aufweisen. → 4

2.3 Semestralklausur Sommersemester 1995

Aufgabe 1 **(7 Punkte)** → **E 3.6**

Gegeben seien ein Parallelrechner mit 3 Prozessoren p_1, p_2, p_3 und 5 (im Gegensatz zu den Übungsaufgaben) voneinander unterscheidbare Jobs.

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Jobs zufällig auf die einzelnen Prozessoren zu verteilen, wenn jedem Prozessor auch mehrere Jobs zugeteilt werden dürfen? → 1

Für die weiteren Teilaufgaben gelte das Prinzip der Gleichwahrscheinlichkeit (Laplace-Annahme).

b) Bestimmen Sie die Ws, daß Prozessor p_1 keinen Job zugeteilt bekommt. → $1\frac{1}{2}$

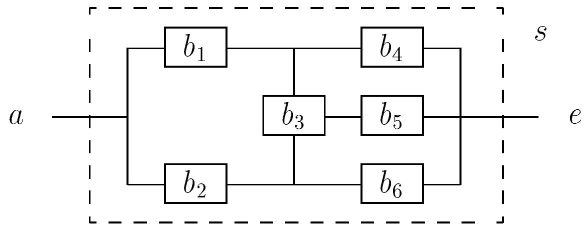
c) Bestimmen Sie die Ws, daß mindestens ein Prozessor keinen Job zugeteilt bekommt. → $4\frac{1}{2}$

Hinweis: Verwenden Sie die Siebformel für die Ereignisse

$$A_i \;\equiv\; \text{„Prozessor } p_i \text{ erhält keinen Job"}\,,\; i = 1, 2, 3\,.$$

Aufgabe 2 **(8 Punkte)** → **A2.20**

Es sei das folgende, aus den Bauteilen b_1 bis b_6 bestehende System $s = \{b_1, \ldots, b_6\}$ gegeben, das genau dann ausfällt, wenn keine intakte Verbindung zwischen a und e besteht:



Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(S)$, daß s bis zum Zeitpunkt t nicht ausfällt, wenn der Ausfall eines beliebigen Bauteils unabhängig vom Ausfall der anderen sein soll, und $P(B_i)$ die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, daß das Bauteil b_i vor dem Zeitpunkt t nicht ausfällt mit

i	1	2	3	4	5	6
$P(B_i)$	0.8	0.9	0.6	0.6	0.7	0.8

.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst $P(S \mid B_j)$ bzw. $P(S \mid \bar{B}_j)$ für ein geeignetes $j \in \{1, \ldots, 6\}$.

Aufgabe 3 (3 Punkte) → $\boxed{\textbf{A2.5}}$

Es seien Ω eine Menge und $\llcorner A, B \lrcorner \in 2^{\Omega}$. Bekanntlich bedeutet

$$A \triangle B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B),$$

daß genau eines der beiden Ereignisse A und B eintritt. Nun sei zusätzlich noch $C \in 2^{\Omega}$. Bedeutet dann

$$A \triangle B \triangle C \ := \ (A \triangle B) \triangle C,$$

daß genau eines der drei Ereignisse A, B und C eintritt?

Begründen Sie Ihre Antwort z.B. durch eine Skizze oder durch mengenalgebraische Umformungen.

Aufgabe 4 (5 Punkte) → $\boxed{\textbf{A1.7}}$

Es sei die Meßreihe (x_i, y_i) gegeben mit

i	1	2	3	4
x_i	1	3	5	7
y_i	2	4	6	u

und einem unbekannten Wert $u \in \mathbb{R}$. Wählen Sie – wenn möglich – u so, daß

a) $r_{xy} = 1$ → 2 b) $r_{xy} = -1$ → 1 c) $r_{xy} = 0$ → 2

ist. Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

Hinweis: In den Teilaufgaben a) und b) ist es nicht nötig, r_{xy} explizit zu bestimmen und die jeweilige Gleichung nach u aufzulösen.

Aufgabe 5 (10 Punkte) → $\boxed{\textbf{E 16.2}}$, $\boxed{\textbf{Z37}}$

U sei in $(-1, 1)$ gleichverteilt.

a) Geben Sie eine Abbildung $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so daß $X := h(U)$ diskret verteilt ist mit

$$P_X(\{-1\}) = 0.25\,, \qquad P_X(\{0\}) = 0.35\,, \qquad P_X(\{2\}) = 0.15\,, \qquad P_X(\{3\}) = 0.20$$

und $E(X) = 1$. → 6

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst $P(„a \leq U \leq b“)$ für $-1 < a \leq b < 1$ und beachten Sie, daß P_X durch die obigen Forderungen noch nicht vollständig festgelegt ist.

Nun sei zusätzlich $V := U^2$.

b) Sind U und V stochastisch unabhängig? Begründen Sie Ihre Entscheidung. $\rightarrow$ 1

c) Sind U und V unkorreliert? Begründen Sie Ihre Entscheidung. $\rightarrow$ 3

Aufgabe 6 **(7 Punkte)** $\rightarrow$ **A3.20**, **A5.4**

Für $\alpha > 1$ und $c \in \mathbb{R}$ sei

$$f(x;\alpha,c) := \begin{cases} \dfrac{c}{x^{\alpha+1}} & , \quad x \in [1,\infty) \\ 0 & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

a) Wählen Sie c so, daß $f(x;\alpha,c)$ eine Dichte wird. Begründen Sie Ihre Entscheidung. $\rightarrow$ $2\frac{1}{2}$

b) Nun sei X eine Zufallsvariable mit der Dichte $f(x;\alpha,\alpha)$, wobei α unbekannt ist. Bestimmen Sie für eine konkrete Stichprobe $x_1,\ldots,x_n$ den Maximum-Likelihood-Schätzer α^*. $\rightarrow$ $4\frac{1}{2}$

2.4 Nachholklausur Wintersemester 1995/96

Aufgabe 1 (6 Punkte) $\rightsquigarrow$ **A2.8**

Sechs Studierende $S_1, \ldots, S_6$ nehmen in einem Seminarraum Platz, dessen sechs Sitzplätze in einer Reihe angeordnet sind. Im weiteren gelte das Prinzip der Gleichwahrscheinlichkeit (Laplace-Annahme).

a) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ an. $\rightarrow$ 2

$\Omega =$

$\mathfrak{A} =$

$P(\{\omega\}) = \qquad \forall\, \omega \in \Omega$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß die Studierenden S_3 und S_5 bei zufälliger Wahl der Sitzplätze nebeneinander sitzen. $\rightarrow$ $2\frac{1}{2}$

c) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit in b), wenn die sechs Sitzplätze in einem Kreis angeordnet sind? $\rightarrow$ $1\frac{1}{2}$

Aufgabe 2 (5 Punkte) $\rightarrow$ **A2.23**

Bei der Übertragung auf einem binären Kanal kommen die Zeichen **O** und **L** im Verhältnis 3:4 vor. Ein **O** wird mit einer Wahrscheinlichkeit von 20% fehlerhaft übermittelt (d.h. als **L** empfangen), ein **L** mit einer Wahrscheinlichkeit von 30% (d.h. als **O** empfangen). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß

a) bei der Übertragung eines Zeichens ein Fehler auftritt. $\rightarrow$ $2\frac{1}{2}$

b) ein **O** gesendet wurde, wenn ein **O** empfangen wird. $\rightarrow$ $2\frac{1}{2}$

Aufgabe 3 (8 Punkte) $\rightarrow$ **E 7.3**

In einem Rechnerraum befinden sich fünf nicht vernetzte, identisch ausgestattete PC's. Erfahrungsgemäß tritt jeweils bei einem einzelnen PC mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 30.12% in einem Zeitraum von 24 Stunden kein Systemabsturz ein. Im weiteren werde angenommen, daß die Zahl der Systemabstürze pro Rechner innerhalb von 24 Stunden durch eine Poisson-verteilte ZV hinreichend gut beschrieben werden kann.

a) Zeigen Sie, daß der Parameter dieser Poisson-Verteilung (in etwa) gleich 1.2 ist. → 2

Zur Erinnerung: Für eine Poisson-verteilte ZV X gilt: $P(„X = i") = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^i}{i!}$, $i \in \mathbb{N}_0$.

b) Bestimmen Sie unter geeigneten Unabhängigkeitsannahmen die Wahrscheinlichkeit, daß im Rechnerraum innerhalb von 24 Stunden

b1) jeder Rechner mindestens einmal abstürzt. → 4

b2) genau 13 Systemabstürze eintreten. → 2

Aufgabe 4 (2 Punkte) → $\boxed{\text{E 1.13}}$

Gibt es eine Meßreihe $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ mit $s_x^2 = 4$, $s_y^2 = 9$ und $s_{xy} = -7.5$? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Hinweis: Denken Sie an den empirischen Korrelationskoeffizienten.

Aufgabe 5 (5 Punkte) → $\boxed{\text{A3.21}}$

Zur Modellierung der Bedienzeit B für die Bearbeitung von Aufträgen durch Zentralprozessoren wird häufig die entartete Exponentialverteilung mit den Parametern $s \in (0, 1)$ und $\lambda > 0$ verwendet:

$$F_B(t) := P(„B \leq t") := \begin{cases} 1 - s \cdot e^{-\lambda t} & , \text{ für } t \geq 0 \\ 0 & , \text{ sonst.} \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie $P(„B = 0")$ in Abhängigkeit von s. → $1\frac{1}{2}$

b) Ist B mit der obigen Verteilung eine stetige ZV? Begründen Sie Ihre Entscheidung. → 1

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von B. → $2\frac{1}{2}$

Aufgabe 6 (9 Punkte) → $\boxed{\text{A5.1}}$

Die tatsächlich benötigte CPU-Zeit einer Benutzersitzung an einer Workstation werde als eine Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und der Varianz $\sigma^2 = 6.25$ [sec^2] angenommen. Wieviele unabhängige Messungen der CPU-Zeiten sollen mindestens durchgeführt werden, so daß mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% der Betrag der Differenz zwischen dem arithmetischen Mittel der Meßwerte und μ kleiner als 0.1 ist? Verwenden Sie zur Beantwortung der Frage

a) den Zentralen Grenzwertsatz. $\rightarrow$ 7

b) die Ungleichung von Tschebyscheff. $\rightarrow$ 2

Aufgabe 7 **(5 Punkte)** $\rightarrow$ **E 13.4**

Die Laufzeit L (in Sekunden) eines stochastischen Suchverfahrens auf einer Workstation werde als $\mathcal{N}(\mu, 36)$-verteilt angenommen mit unbekanntem $\mu \in \mathbb{R}^+$.

Wie klein muß das Testniveau α mindestens sein, so daß die Nullhypothese

$$H_0 \; : \; \mu \leq 24.5$$

für das Stichprobenmittel $\bar{l} = 25.7$ aus $n = 100$ Messungen nicht verworfen wird?

2.5 Semestralklausur Sommersemester 1996

Aufgabe 1 (6 Punkte) → $\boxed{\textbf{E 3.6}}$

Gegeben seien ein Parallelrechner mit 3 Prozessoren p_1, p_2, p_3 und 5 voneinander unterscheidbare Jobs.

a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, diese Jobs zufällig auf die einzelnen Prozessoren zu verteilen, wenn jedem Prozessor auch mehrere Jobs zugeteilt werden dürfen?
→ 1

b) Man bestimme unter der Laplace-Annahme (Prinzip der Gleichwahrscheinlichkeit) die Wahrscheinlichkeit, daß genau ein Prozessor keinen Job zugeteilt bekommt.
→ 5

Hinweis: Man verwende dazu die Ereignisse $B_i \equiv$ „Prozessor p_i erhält keinen, die anderen beiden mindestens einen Job“, $i = 1, 2, 3$.

Aufgabe 2 (7 Punkte) → $\boxed{\textbf{A1.9}}$, $\boxed{\textbf{E 1.4}}$

In Abhängigkeit des unbekannten Wertes $u \in \mathbb{R}$ sei die folgende Meßreihe gegeben:

$$4 \quad 1 \quad u \quad 3 \quad 5 \quad 2$$

a) Man bestimme das Stichprobenmittel $\bar{x} = \bar{x}(u)$. → 1

b) Man bestimme den Median $\tilde{x} = \tilde{x}(u)$. → 2

c) Für welchen Wert von u ist die Varianz $s_x^2 = s_x^2(u)$ der Meßreihe minimal? Man begründe seine Entscheidung. → 4

Aufgabe 3 (5 Punkte) → $\boxed{\textbf{E 15.5}}$

Für die Ereignisse A, B und C eines Ws-Raumes $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ gelte:

- $P(C \mid A \cap B) > P(C \mid B)$
- $P(C \mid A \cap \bar{B}) > P(C \mid \bar{B})$
- A und B sind stochastisch unabhängig.

Man zeige, daß unter diesen Voraussetzungen $P(C \mid A) > P(C)$ gilt.

Aufgabe 4 (9 Punkte) → **A3.19**

Man gebe Bedingungen für die reellwertigen Parameter α und β an, so daß

$$f(x;\alpha,\beta) := \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{\alpha-\beta} \cdot \left(e^{-\beta x} - e^{-\alpha x}\right) & , \quad x \in (0,\infty) \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

eine Dichtefunktion ist, und begründe seine Entscheidungen.

Hinweis: Man unterscheide zunächst die Fälle $\alpha \neq \beta$ (→ $3\frac{1}{2}$) und $\alpha = \beta$ (→ $5\frac{1}{2}$).

Aufgabe 5 (8 Punkte) → **E 9.7**

T_1 und T_2 seien unabhängige Zufallsvariable. Man bestimme $P(„|T_1 - T_2| \leq 15“)$ unter der Annahme, daß

a) T_1 und T_2 jeweils gleichverteilt sind auf dem Intervall $(0, 45)$, → 4

b) T_1 und T_2 jeweils normalverteilt sind mit Erwartungswert 25 und Varianz 50. → 4

Aufgabe 6 (5 Punkte) → [Greiner & Tinhofer, 1996], Abschnitt 5.3, Bsp. (2)

Es sei eine mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$ Poisson-verteilte Grundgesamtheit gegeben. Man bestimme für eine konkrete Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ den Maximum-Likelihood-Schätzer λ^*.

2.6 Nachholklausur Wintersemester 1996/97

Aufgabe 1 **(5 Punkte)** $\rightarrow$ $\boxed{\textbf{E1.11}}$

Es sei eine zweidimensionale Meßreihe $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ gegeben, die von einem unbekannten Parameter $u \in \mathbb{R}$ abhängt. Wie muß u gewählt werden, so daß die dazugehörige Regressionsgerade des Merkmals Y bzgl. X durch den Ursprung läuft?

Man beantworte diese Frage für die konkreten Meßreihen

a)

i	1	2	3
x_i	-1	0	1
y_i	0	u	0

$\rightarrow$ $1\frac{1}{2}$

b)

i	1	2	3
x_i	-1	0	1
y_i	1	u	0

$\rightarrow$ $3\frac{1}{2}$

Aufgabe 2 **(6 Punkte)** $\rightsquigarrow$ $\boxed{\textbf{E2.2}}$

Es sei $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Man bestimme die von $\mathcal{E}_1 := \{\{1,2\}, \{3\}, \{4\}\}$ erzeugte σ-Algebra. $\rightarrow$ 2

b) Man bestimme die von $\mathcal{E}_2 := \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$ erzeugte σ-Algebra. $\rightarrow$ 4

Aufgabe 3 **(5 Punkte)** $\rightarrow$ $\boxed{\textbf{A2.22}}$

Ein aus drei Bauteilen bestehendes System s heißt **(2-aus-3)-System**, wenn es intakt bleibt, solange mindestens zwei Bauteile intakt sind. $\alpha \in (0, 1]$ bezeichne im weiteren die Wahrscheinlichkeit, daß ein Bauteil vor dem Zeitpunkt t nicht ausfällt, wobei die Ausfälle einzelner Teile als unabhängige Ereignisse angenommen werden können. $P(S)$ bezeichne entsprechend die Wahrscheinlichkeit, daß s bis zum Zeitpunkt t nicht ausfällt.

a) Man zeige: $P(S) = 3{\cdot}\alpha^2 - 2{\cdot}\alpha^3$. $\rightarrow$ 3

b) Für welche Werte von α ist $P(S) > \alpha$? $\rightarrow$ 2

Aufgabe 4 **(9 Punkte)** ⇝ $\boxed{\textbf{E5.3}}$

Aufgrund der Daten einer Umfrage unter Informatikstudenten wurden folgende drei Gruppen gebildet:

Gruppe	Anfertigen von Stochastik-Hausaufgaben	prozentualer Anteil der Befragten	davon mit bestandener Stochastik-Klausur
H_1	regelmäßig	5%	95.0%
H_2	ab und zu	20%	12.5%
H_3	nie	75%	3.0%

a) K bezeichne das Ereignis „Informatikstudent hat Klausur bestanden“. Man gebe folgende Wahrscheinlichkeiten an: → 1

$P(H_1) =$ $\quad$ $P(K \mid H_1) =$ $\quad$ $P(\bar{K} \mid H_1) =$

$P(H_2) =$ $\quad$ $P(K \mid H_2) =$ $\quad$ $P(\bar{K} \mid H_2) =$

$P(H_3) =$ $\quad$ $P(K \mid H_3) =$ $\quad$ $P(\bar{K} \mid H_3) =$

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewählter Student, der nicht regelmäßig Hausaufgaben angefertigt hat, die Klausur nicht bestanden hat? → 5

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein zufällig ausgewählter Student mit bestandener Klausur regelmäßig Hausaufgaben angefertigt hat? → 3

Aufgabe 5 **(11 Punkte)** ⇝ $\boxed{\textbf{A3.6}}$

Einem Passanten wird an einer Straßenecke folgendes Würfelspiel mit zwei symmetrischen, unabhängig geworfenen Tetraedern (d.h. vierseitigen Würfeln mit den Augenzahlen 1 bis 4) vorgeschlagen:

> Zeigen die beiden Würfel die gleiche Augenzahl, so erhält er zusätzlich zu seinem Einsatz noch das Vierfache seines Einsatzes zurück, unterscheiden sich die Augenzahlen dagegen um 1, 2 oder 3, so verliert er den ein-, zwei- oder dreifachen Einsatz.

a) Man gebe unter der Laplace-Annahme einen geeigneten Ws-Raum $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$ an. $\rightarrow$ $2\frac{1}{2}$

$\Omega =$

$\mathfrak{A} =$

$P(\{\omega\}) = \qquad\qquad\qquad \forall\, \omega \in \Omega$

b) Man berechne den Erwartungswert und die Varianz des Gewinns. $\rightarrow$ $8\frac{1}{2}$

Aufgabe 6 **(4 Punkte)** $\rightsquigarrow$ [Greiner & Tinhofer, 1996], Abschnitt 5.3, Bsp. (6)

Es sei eine mit unbekanntem Parameter $\lambda \in \mathbb{N}$ diskret gleich verteilte Grundgesamtheit gegeben, d.h.

$$P(„X = i“) = \frac{1}{\lambda}\,,\ i = 1, \ldots, \lambda\,.$$

Man bestimme für eine konkrete Stichprobe $x_1, \ldots, x_n$ den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}$.

Literaturverzeichnis

[ALLEN, 1990] Allen A.O. (1990): *Probability, Statistics, and Queueing Theory with Computer Science Applications.* 2. Auflage. Academic Press, Inc.

[BARTH & HALLER, 1985] Barth F., Haller R. (1985): *Stochastik, Leistungskurs.* 3. Auflage. Ehrenwirth-Verlag.

[CHOW & TEICHER, 1978] Chow Y.S., Teicher H.A. (1978): *Probability Theory: Independence, Interchangeability, Martingales.* Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin.

[GREINER, 1997] Greiner M. (1997): *Stochastik für Studierende der Informatik – Ausgewählte Aufgaben zur Vertiefung und Prüfungsvorbereitung.* Beiträge zur Informatik-Ausbildung 1. CS Press, München.

[GREINER & TINHOFER, 1996] Greiner M., Tinhofer G. (1996): *Stochastik für Studienanfänger der Informatik.* Carl Hanser Verlag, München, Wien.

[HAFNER, 1989] Hafner R. (1989): *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.* Springer-Verlag, Wien, New York.

[HARDY ET AL., 1934] Hardy G.H., Littlewood J.E., Polya G. (1934): *Inequalities.* Cambridge Univ. Press, London.

[KREDLER, 1993] Kredler Ch. (1993): *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik.* Interne Aufgabensammlung des Instituts für Angewandte Mathematik und Statistik, Technische Universität München.

[LEHN ET AL., 1988] Lehn J., Wegmann H., Rettig St. (1988): *Aufgabensammlung zur Einführung in die Statistik.* Teubner, Stuttgart.

[TUM, 1994] Möller G., Vögl B. (ed.) (1994): *Materialien zur Entwicklung der Technischen Universität München – Grundtabellen von 1950 bis 1993.* Abteilung 5 (Planung, Statistik, EDV) der Zentralen Verwaltung der Technischen Universität München.