Formelsammlung

Zur Klausur Diskrete Strukturen SS 2003

Univ.-Prof. Dr. Eberhard Triesch

Rheinisch Westfählische Technische Hochschule Aachen

Inhaltsverzeichnis

1 Vorwort

Dieses Skriptum entstand bei der Vorbereitung auf die Klausur Diskrete Strukturen im Sommersemester 2003 bei Prof. E. Triesch. Es enthält eine Zusammenfassung der wichtigsten Definitionen, Formeln und Sätze aus der Vorlesung und sowie zusätzliche Beschreibungen zur Lösung diverser Aufgaben.

Die Benutzung dieses Skripts ist jedem Studenten in der Klausurvorbe-reitung freigestellt. Die Vervielfältigung des Skripts ist verboten.

Dieses Skript stellt **keinen** Anstruch auf Vollständigkeit und Korrektheit. Bei Fehlern bitten wir um eine kleine e-Mail mit der korrekten Textstelle und einer Angabe über den Ort des Fehlers an Rene.Hummen@rwth-aachen.de.

Aachen, 8.9.2003

Rene Hummen, Georg Kunz

Letze Änderung: 18. September, 2003

2 Abzähltheorien

2.1 Elementare Zählprinzipien

2.1.1 Gleichheitsregel

$|S| = |T|$ genau dann, wenn eine Bijektion zwischen S und T existiert.

2.1.2 Summenregel

Ist $S = \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} S_i$ eine disjunkte Zerlegung, so ist

$$|S| = \sum_{i=1}^{t} |S_i|$$

2.1.3 Produktregel

Ist $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_t$ ein kartesisches Produkt, d.h. $S = \{(a_1, \ldots, a_t) : a_i \in S_i, 1 \leq i \leq t\}$, so gilt:

$$|S| = \prod_{i=1}^{t} |S_i|$$

2.1.4 Bemerkung: Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

2.1.5 Regel vom zweifachen Abzählen

Es sei $M = (m_{ij})$ eine Matrix von Zahlen. Dann ist:

$$\sum_i \left(\sum_j m_{ij} \right) = \sum_j \left(\sum_i m_{ij} \right)$$

d.h. Summe der Zeilensummen = Summe der Spaltensummen.

2.1.6 Schubfachprinzip

Es sei $f : N \to R, |N| = n > r = |R|$. Dann existiert ein $a \in R$ mit $|f^{-1}(a)| = \left\lfloor \frac{n-1}{r} \right\rfloor + 1$.

2.1.7 Definition: Permutation

Permutationen von $N = \{1, \dots, n\}$ können definiert werden als bijektive Abbildungen von $\{1, \dots, n\}$ auf sich. Die Menge aller Permutationen auf N nennen wir die *symmetrische Gruppe auf N.*

Bezeichnung: $S_N, S_{\{1,\dots,n\}} =: S_n$

2.1.8 Definition: Transversale

Sei $\pi \in S_n$. Betrachten alle Paare $(i, \pi(i))$, $1 \leq i \leq n$. Diese Menge von Paaren heißt die zu π gehörige *Transversale* (in einer $m \times n$-Matrix).

Die Transversale heißt *zulässig*, wenn sie keine doppelten Einträge enthält.

2.1.9 Definition: singuläres Paar

Wir nennen ein Paar $\{(i,j),\ (k,l)\}$ mit $i \neq k$, $j \neq l$ und $m_{ij} = m_{kl}$ ein *singuläres Paar.*

2.1.10 Satz: zulässige Transversale

Eine Transversale ist zulässig genau dann, wenn sie kein singuläres Paar enthält.

2.2 fundamentale Zählkoeffizienten

2.2.1 Binomialkoeffizient

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Anzahl der *k-Untermengen* einer n-elementigen Menge.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \binom{n}{n-k}, \text{ da:} \\ \binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \dots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} &= \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \dots > \binom{n}{n-1} > \binom{n}{n} \end{aligned}$$

Basisfälle:

- $\binom{n}{0} = 1$

- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{0}{k} = 0$
- $\binom{n}{n} = 1$

2.2.2 Stirlingzahlen 1.Art

$$s_{n,k} = |\{\pi \in S_N : \pi \text{ hat genau k Zyklen}\}|$$

Anzahl der *Permutationen* von N mit k Zykeln.

Basisfälle:

- $s_{0,0} = 1$
- $s_{0,k} = 0$ für $k > 0$
- $s_{n,0} = 0$ für $n > 0$
- $s_{n,1} = \frac{n!}{n} = (n-1)!$
- $s_{n,n-1} = \binom{n}{k}$
- $\sum_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!$ $(n \geq 1)$

Rekursion:

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1) \cdot s_{n-1,k} \text{ für } n, k > 0$$

(mittels Betrachtung zweier Fälle bei Zykelbildung für $N \backslash \{a\}$ mit a Fixpunkt zu zeigen)

Es gilt:

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \cdot s_{n,k} \cdot x^k$$

2.2.3 Stirlingzahlen 2.Art

$$S_{n,k} = |\{\{A_1, \ldots, A_k\} : A_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} A_k = N,\ A_i \neq \emptyset,\ 1 \leq i \leq n\}|$$

Anzahl der *Mengenpartitionen* von N ($|N| = n$) in k nichtleere Blöcke.

Basisfälle:

- $S_{0,0} = 1$
- $S_{0,k} = 0$ für $k > 0$

- $S_{n,0} = 0$ für $n > 0$

Rekursion:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} \text{ für } n, k > 0$$

(mittels Zerlegung in zwei Fälle für $N \backslash \{a\}$ mit a Block aus k-Mengenzerlegung zu zeigen)

Iterative Darstellung:

$$S_{n,k} = \frac{1}{k!} \cdot \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$$

Es handelt sich hierbei um *ungeordnete* Partitionen.
Die Anzahl der *geordneten* k-Mengenpartitionen wird durch $k! \cdot S_{n,k}$ abgezählt.

Es gilt:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} \cdot x^{\underline{k}}$$

2.2.4 Bemerkung: surjektive Abbildungen

Die Anzahl der *surjektiven Abbildungen* von N in $\{1, \ldots, k\}$ $(k \leq n)$ ist $k! \cdot S_{n,k}$ (geordnet).

2.2.5 Bemerkung: geordnete k-Mengenpartitionen

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Anzahl der k-Permutationen von N.
Man erhält diese andererseits, wenn man zuerst eine k-Untermenge aus N auswählt und deren Elemente dann beliebig anordnet.
Also:

$$n^{\underline{k}} = \binom{n}{k} \cdot k!$$

$$\Leftrightarrow \binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

2.2.6 Zahlpartitionen

$P_{n,k}$: Anzahl der *Zahlpartitionen* von einer Zahl in k Summanden.

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k \; (n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k)$

Es handelt sich auch hier um *ungeordnete* Partitionen.
Die Anzahl der geordneten Zahlpartitionen von n in k Summanden ist:

$$P_{n,k} = |\{(n_1, \ldots, n_k) : n_i \in \mathbb{N},\, 1 \leq i \leq k,\, n_1 + \ldots + n_k = n\}| = \binom{n-1}{k-1}$$

$$= \left|\binom{\{1, \ldots, n-1\}}{k-1}\right|$$

2.2.7 Derangement Zahlen

$$D_n = |\{\pi \in S_n : \pi(i) \neq i \text{ für } 1 \leq i \leq n\}|$$

$$D_n = n! \cdot (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n}{n!})$$

$$\frac{D_n}{n!} \approx \frac{1}{e}$$

2.2.8 n-te harmonische Zahl

Definiert als:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$$

2.2.9 fallende Faktorielle

$$a^{\underline{k}} = a \cdot (a-1) \cdot \ldots \cdot (a-k+1) = \prod_{i=0}^{k-1} (a-i)$$

Tricks:

- $a^{\underline{k}} \cdot (a-k) = \prod_{i=0}^{k-1} (a-i) \cdot (a-k) = \prod_{i=0}^{(k+1)-1} (a-i) = a^{\underline{k+1}}$
- $(-x)^{\underline{n}} = (-1)^n \cdot (x+n-1)^{\underline{n}}$
- $(x+n-1)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{\underline{k}} \cdot (n-1)^{\underline{n-k}}$

2.2.10 steigende Faktorielle

$$n^{\overline{k}} = n \cdot (n+1) \cdot \ldots \cdot (n+k-1) = \prod_{i=0}^{k-1} (a+i)$$

2.2.11 Anzahl Abbildungen

Seien N und R Mengen mit $|N| = n$ und $|R| = r$.

	beliebige Verteilung	injektiv ($n \leq r$)	surjektiv	bijektiv
N , R	$r^n = \|R\|^{\|N\|}$	$r^{\underline{n}}$	$r! \cdot S_{n,r}$	$r! = n!$
N (n.u.), R	$\binom{r+n-1}{n}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	1
N, R (n.u.)	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	1	$S_{n,r}$	1
N (n.u.), R (n.u.)	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	1	$P_{n,k}$	1

n.u. $\widehat{=}$ nicht unterscheidbare Elemente in der jeweiligen Menge

2.3 Permutationen

2.3.1 Definition

Eine Permutation von $N = \{1, \ldots, n\}$ ist eine Bijektion auf S_N.

2.3.2 Darstellung

Sei π eine Permutationsvorschrift.

1. **Matrix:**
   $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$
   Es genügt also π durch ein eben solches Wort zu beschreiben.

2. **Zykelschreibweise:**
   z.B.: $\pi = (1,5,2,3)(4,8,6)(7) = (1,5,2,3)(4,8,6)$
   (7) heißt Fixpunkt und kann weggelassen werden.

3. **Inversionstafel:**
   Es sei $a_1, \ldots, a_n$ eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, n$.

   Definition: Ist $i < j$ und $a_i > a_j$, so heißt das Paar (a_i, a_j) eine Inversion von $a_1, \ldots, a_n$.

Bsp.: $2, 4, 1, 3 \Rightarrow$ Inversionen: $(2, 1), (4, 1), (4, 3)$

$b_1, \ldots, b_n$ ist eine *Inversionstafel* von $a_1, \ldots, a_n$ genau dann, wenn $\forall j\ b_j =$ Anzahl der Elemente links von j, die größer als a_j sind.

Beispiel:

$$\begin{aligned} 591826473 &= a_1 \ldots a_9 \\ 236402210 &= b_1 \ldots b_9 \end{aligned}$$

2.3.3 Satz: Eindeutigkeit von elementfremden Zykeln

Jede Permutation $\pi \in S_n$ ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren ein eindeutig bestimmtes Produkt von elementfremden Zykeln.

Beispiel:

$$(1, 6) \cdot (3) \cdot (2, 4, 6)$$

2.3.4 Bemerkung: Zykel

Jedes $\pi \in S_n$ ist ein Produkt von 2-Zykeln (nicht notwendig elementfremd).

Beispiel:

$$(1, 2) \cdot (2, 3) \cdot (3, 4),$$

wobei die Multiplikation von *rechts nach links* abläuft.

2.3.5 Satz: Eindeutigkeit der Inversionstafel

Die Permutation $a_1, \ldots, a_n$ ist durch die Inversionstafel eindeutig bestimmt.

2.3.6 Definition: Typ einer Permutation

$b_i(\pi)$ bezeichne die Anzahl der Zykeln der Länge i $(i = 1, \ldots, n)$ und $b(\pi)$ die Gesamtzahl der Zykeln, d.h. $b(\pi) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\pi)$.
Der (Zykel-)Typ der Permutation π ist der Ausdruck:

$$t(\pi) = 1^{b_1(\pi)} \cdot 2^{b_2(\pi)} \cdot \ldots \cdot n^{b_n(\pi)}$$

2.3.7 Definition: Involution

Eine Permutation π, für die gilt $\pi \cdot \pi = id$ (id ist die identische Permutation) heißt *Involution*.

Bemerkung: π ist eine Involution $\Leftrightarrow$ die Anzahl $b_i(\pi)$ der Zykeln der Länge i gleich 0 ist für alle $i > 2$.

Rekursionsformel: Sei $I(n)$ die Gesamtzahl der Involutionen auf n.

$$I(n) = I(n-1) + (n-1) \cdot I(n-2),\ I(0) = I(1) = 1$$

2.4 Prinzip von Inklusion und Exklusion

2.4.1 Satz: über Inklusion und Exklusion

Es sei $A_1, \ldots, A_n$ eine endliche Menge. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \quad &+ \quad \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots \\ &+ \quad (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_n|\end{aligned}$$

2.4.2 Bemerkung: Binomischer Lehrsatz

$$\begin{aligned} & (x+y)^n &=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot y^{n-k} \\ x = y = 1: \quad & 2^n &=& \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \end{aligned}$$

2.5 Inversionen

2.5.1 Definition: Basisfolge

Eine Basisfolge $(p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x), \ldots)$ ist eine Folge von Polynomen p_i mit $Grad(p_i) = i\ \forall i$.

2.5.2 Definition: Zusammenhangskoeffizienten

Sind $(p_0(x), p_1(x), \ldots)$ und $(q_0(x), q_1(x), \ldots)$ Basisfolgen, so existieren $(a_{n,k})$ und $(b_{n,k})$ mit:

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} \cdot p_k(x) \text{ bzw. } p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \cdot q_k(x)$$

(sogenannte Inversionsformeln)
Man nennt $(a_{n,k})$ und $(b_{n,k})$ die *Zusammenhangskoeffizienten* der Basisfolgen. Sie bilden zwei (unendliche) untere Dreiecksmatrizen, die zueinander invers sind.
$\Longrightarrow$ Die Stirlingzahlen 1. und 2. Art sind also im Wesentlichen Zusammenhangskoeffizienten bezüglich der Basisfolgen $(1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots)$ und $(1, x, x \cdot (x-1), \ldots, x^{\underline{n}}, \ldots)$.

2.5.3 Binomial-Inversion

Aus dem Binomischen Lehrsatz ergibt sich mit $a = (x-1)$ und $b = 1$:

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot u_k$$

und

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (-1)^k \cdot v_k$$

(symmetrische Form der Binomial-Inversion)

2.6 Aufgaben

2.6.1 Permutationen

Sei $N = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ eine Menge. Dann gibt es $n!$ viele Möglichkeiten die Elemente dieser Menge zu permutieren/anzuordnen.
Will man spezielle Fälle aus der Auswahl der anzuordnenden Elemente ausschließen, so gilt:

$$\frac{n!}{x}$$

wobei x die Anzahl der auszuschließenden Fälle ist.
Beispiel: Möglichkeiten die Buchstaben des Wortes ABRAKADABRA zu permutieren

$$\frac{11!}{5! \cdot 2! \cdot 2!},$$

da A 5-mal und B und R jeweils 2-mal in dem Wort vorkommen.

2.6.2 Permutationen: drehbare Platte

Wie oben, es ist aber zusätlich noch eine Normierung notwendig.

Beispiel: 2 Langusten, 5 Garnelen, 10 Muscheln auf einer drehbaren Platte anordnen

$$\frac{1}{17} \cdot \frac{17!}{2! \cdot 5! \cdot 10!}$$

2.6.3 Darstellung von Permutationen

Das Produkt von nicht-elementfremden Permutationen kann man in die Zykelschreibweise (elementfremd) wie folgt überführen:
Man nimmt sich das kleinste Element und fängt im rechtesten Zykel an.

- kommt das Element dort vor, dann betrachtet man seinen Nachfolger und geht einen Zykel nach links
- kommt das Element dort nicht vor, dann geht man einen Zykel nach links

Ist man im linkesten Zykel angekommen, dann:

- sind alle Elemente einmal am Anfang eines Betrachtungszykluses gewesen und ist der Betrachtungszyklus geschlossen, so ist man fertig
- sonst:
  - Betrachtungszyklus hat am Anfang und Ende dasselbe Element, dann erhält man einen Fixpunkt
  - neuen Betrachtungszyklus mit letztem Element aus vorherigem Zyklus im rechtesten Zykel beginnen

Beispiel: Sei $(1,3)(2,3,4)(4,5,6,1)(1,2)$ ein solches nicht-elementfremdes Produkt, dann gilt:

$$\underline{1} \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow \underline{1} \mid \underline{2} \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow \underline{2} \mid$$

$$\underline{3} \rightarrow 4 \mid \underline{4} \rightarrow 5 \mid \underline{5} \rightarrow 6 \mid \underline{6} \rightarrow 1 \rightarrow \underline{3} \mid$$

Ergebnis in Zykelschreibweise:

$$(1)(2)(3456)$$

2.6.4 Potenzen von Permutationen

Sei $\pi \in S_n$ eine Permutationen. Dann gilt:

- $\pi \cdot \pi^{-1} = \pi^{-1} \cdot \pi = id$ [z.B.: = (1)(2)(3)...]
- $\pi^{x+y} = \pi^x \cdot \pi^y$
- $\pi^{x-y} = \pi^x \cdot \pi^{-x} = \pi^x \cdot \pi^{-1^x}$

Ist x dabei ein Vielfaches aller in der Zykeldarstellung vorkommenden Zykellängen, dann kann man π^x wegfallen lassen, da gilt:

$$\pi^x = id$$

π^2 bedeutet z.B., dass man in den Zykeln jeweils 2 Elemente weitergeht.

Beispiele: $\pi = (1, 9, 4, 6)(2, 3, 10, 5, 8, 7)$

- $\pi^{14} = \pi^{12} \cdot \pi^2 = \pi^2 = (1, 4)(2, 10, 8)(9, 6)(3, 5, 7)$
- $\pi^{45} = \pi^{48} \cdot \pi^{-3} = \pi^{-1^3} = (1, 9, 4, 6)(2, 5)(7, 10)(8, 3)$

Bemerkung: Sind die Zykeln nicht elementfremd, so muss man sie erst in eine elementfremde Darstellung bringen.

2.6.5 Inklusion-Exklusion

Mengen mit gegebenen Eigenschaften definieren und dann die Inklusions-Exklusionsformel anwenden.

Beispiel: Anzahl der Zahlen, die teilerfremd zu 100 sind.

Sei $G = \{1, 2, \ldots, 100\}$.
Es gilt: $2|100$ und $5|100$, da $100 = 2^2 \cdot 5^2$

Definiere also die folgenden Mengen:

$$A_1 = \{x : 2|x,\ 1 \le x \le 100\}$$

$$A_2 = \{x : 5|x,\ 1 \le x \le 100\}$$

Bilde außerdem noch den Durchschnitt dieser beiden Menge:

$$A_1 \cap A_2 = \{x : 2 \cdot 5 = 10|x,\ 1 \le x \le 100\}$$

Berechne die Kardinalität der Mengen:

$$\begin{aligned}|A_1| &= \frac{100}{2} = 50\\ |A_2| &= \frac{100}{5} = 20\\ |A_1 \cap A_2| &= \frac{100}{10} = 10\end{aligned}$$

Benutze nun die Formel:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2| = 50 + 20 - 10 = 60$$

Also:

$$|G \backslash A_1 \cup A_2| = 100 - 60 = 40$$

2.6.6 doppeltes Abzählen

$$\binom{r+s}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k} \text{ bedeutet:}$$

Es seien R und S zwei disjunkte Menge mit r bzw. s Elementen.
Wähle aus $R \cup S$ n Elemente aus, dann existieren:

$$\binom{r+s}{n} \text{ Möglichkeiten}$$

Jede dieser ausgewählten n-Mengen erhält man durch eine Auswahl von k Elementen aus R und $(n-k)$ Elementen aus S:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{r}{k}\binom{s}{n-k}$$

3 Rekursionen

3.1 nützliche Potenzreihenentwicklungen

- $e^{\alpha z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha \cdot z)^n}{n!}$
- $\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \cdot (-1)^{n-1}$
- $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ für $z < 1$ (geometrische Reihe)
  beschränkt:
  $\sum_{n=0}^{n} z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$
- $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ (arithmetische Reihe)
- $(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot z^n$ für $|z| < 1$ (binomischer Lehrsatz)
  genauer:
  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$

3.2 Erzeugende Funktionen

Suche eine Folge $a_0, a_1, \ldots$.
Fasse sie auf als Koeffizienten einer Potenzreihe $F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^n$.

3.3 geschlossene Form

A sei eine Aussage.

$$[A] := \begin{cases} 1, \text{falls A wahr} \\ 0, \text{falls A falsch} \end{cases}$$

Bemerkung: Man kann auch $c \cdot [A]$ mit c konstant benutzen.

Beispiel: (Fibonacci-Rekursion)

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2},\ f_n = 0 \text{ für } n \leq 0,\ f_1 = 1 \\ \Rightarrow f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} + [n = 1] \end{aligned}$$

3.4 reflektiertes Polynom

Sei $q(z)$ ein Polynom.

$$q(z) = 1 + q_1 \cdot z^1 + \ldots + q_d \cdot z^d \text{ mit } q_d \neq 0 \text{ und } q_i \in \mathbb{C}$$

Dann ist $q^R(z) = z^d \cdot q(\frac{1}{z})$ das reflektierte Polynom und es gilt:

$$\begin{aligned} q^R(z) &= (z - q_1) \cdot \ldots \cdot (z - q_d) \text{ (Nullstellen)} \\ \Leftrightarrow q(z) &= (1 - q_1 \cdot z) \cdot \ldots \cdot (1 - q_d \cdot z) \end{aligned}$$

1. Beispiel:

$$\begin{aligned} q(z) &= z^2 - 1 \\ q^R(z) &= 1 - z^2 = (1 - z)(1 + z) \\ \Rightarrow q(z) &= (1 - 1 \cdot z)(1 - (-1) \cdot z) \end{aligned}$$

2. Beispiel:

$$\begin{aligned} q(z) &= z^4 - z + 1 \\ q^R(z) &= 1 - z + z^4 \end{aligned}$$

3.5 Satz: über Rekursionen

Es sei $q_1, \ldots, q_d$ eine feste Folge von (komplexen) Zahlen, $d \geq 1$, $q_d \neq 0$.

$q(z) = 1 + q_1 \cdot z^1 + \ldots + q_d \cdot z^d = (1 - \alpha_1 \cdot z)^{d_1} \cdot (1 - \alpha_2 \cdot z)^{d_2} \cdot \ldots \cdot (1 - \alpha_k \cdot z)^{d_k}$,

$\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sind dabei Nullstellen (paarweise verschieden) von:

$$q^R(z) = z^d + q_1 \cdot z^{d-1} + \ldots + q_d = z^d \cdot q(\frac{1}{z})$$

mit den Vielfachheiten d_i, $1 \leq i \leq k$.

Für $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

1. (Rekursion) für $n \geq 0$

   $$f(n + d) + q_1 \cdot f(n + d - 1) + \ldots + q_d \cdot f(n) = 0$$

2. (Ansatz)

   $$F(z) = \sum_{n \geq 0} f(n) \cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)},$$

   wobei $p(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq d - 1$ ist.

3. (Partialbruchzerlegung)

$$\sum_{n\geq 0} f(n)\cdot z^n = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i\cdot z)^{d_i}},$$

wobei $g_i(z)$ ein Polynom vom Grad $\leq d_i - 1$ ist mit $1 \leq i \leq k$.

4. (Explizite Lösung)

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} p_i(n)\cdot \alpha_i^n,$$

wobei $p_i(n)$ ein Polynom in n vom Grad $\leq d_i - 1$ ist mit $1 \leq i \leq k$.

3.5.1 Aufgaben

1. Aufstellen der Rekursionsgleichung in geschlossener Form:
z.B.:

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + 2\cdot a_{n-2} + (-1)^n,\ a_0 = a_1 = 1 \\ \Rightarrow a_n &= a_{n-1} + 2\cdot a_{n-2} + (-1)^n\cdot[n\geq 0] + [n=1] \end{aligned}$$

2. Ansatz mit $A(z) = \sum_{n\geq 0} a(n)\cdot z^n$:
z.B.:

$$A(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n-1}\cdot z^n + 2\cdot \sum_{n\geq 0} a_{n-2}\cdot z^n + \sum_{n\geq 0} (-1)^n\cdot[n\geq 0]\cdot z^n + \sum_{n\geq 0}[n=1]\cdot z^n$$

$$\begin{aligned} A(z) &= z^1\cdot A(z) + 2z^2\cdot A(z) + \frac{1}{1+z} + z \\ A(z)\cdot(1-z-2z^2) &= \frac{1+z+z^2}{1+z} \\ A(z) &= \frac{1+z+z^2}{(1+z)(1-z-2z^2)} = \frac{1+z+z^2}{(1-2z)(1+z)^2} \end{aligned}$$

3. Partialbruchzerlegung: (hier nicht weiter betrachtet, da es für expliziete Lösung nicht relevant.

Nach Satz existieren die folgenden Nullstellen:

$$\alpha_1 = 2 \text{ und } \alpha_2 = -1$$

4. Explizite Lösung:
   Mit obigen Nullstellen existiert die folgende (vorläufige) explizite Lösung:

$$a_n = \gamma_1 \cdot 2^n + (\gamma_2 + \gamma_3 \cdot n)(-1)^n$$

   Durch Erstellen und Lösen des Gleichungssystems mit $n = 0, n = 1$ und $n = 2$ aus:

$$(a_n :)\gamma_1 \cdot 2^n + (\gamma_2 + \gamma_3 \cdot n)(-1)^n = a_n = a_{n-1} + 2 \cdot a_{n-2} + (-1)^n \cdot [n \geq 0] + 2 \cdot [n = 1]$$

   folgt:

$$\gamma_1 = \frac{7}{9}, \gamma_2 = \frac{2}{9} \text{ und } \gamma_3 = \frac{1}{3}$$

   und damit die explizite Lösung:

$$a_n = \frac{7}{9} \cdot 2^n + (\frac{2}{9} + \frac{1}{3} \cdot n)(-1)^n$$

3.5.2 Bemerkung: Mehrfache Nullstellen

Es sei $f(n + d) + q_1 \cdot f(n + d - 1) + \ldots + q_d \cdot f(n) = 0$ mit $n \geq 0$.
Folgt aus $q^R(z)$, dass α_i eine:

- doppelte Nullstelle ist, so gilt: $\alpha_i^n(a \cdot n + b)$
- dreifache Nullstelle ist, so gilt: $\alpha_i^n(a \cdot n^2 + b \cdot n + c)$
- etc.

3.6 Exponentiell erzeugende Funktionen

Vorher: (gewöhnliche erzeugende Funktionen)

$$(f_n)_{n=0}^{\infty} \rightarrow F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^n$$

Jetzt: (exponentiell erzeugende Funktionen)

$$(f_n)_{n=0}^{\infty} \rightarrow \widehat{F}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot \frac{z^n}{n!}$$

Der Unterschied liegt in der Multiplikation:

Seien $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n \cdot z^n$ und $B(z) = \sum_{n\geq 0} b_n \cdot z^n$. Dann folgt:

$$A(z) \cdot B(z) = \sum_{n\geq 0} c_n \cdot z^n \text{ mit } c_n = \sum_{n\geq 0} a_k \cdot b_{n-k}$$

Seien jetzt $\widehat{A}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} \cdot z^n$ und $\widehat{B}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{b_n}{n!} \cdot z^n$. Dann folgt:

$$\widehat{A}(z) \cdot \widehat{B}(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{c_n}{n!} \cdot z^n \text{ mit } c_n = \binom{n}{k} \cdot a_k \cdot b_{n-k}$$

Die c_n heißen auch Binomialfaltung von (a_k) und (b_k).

3.7 Differentiation der erzeugenden Funktionen

- $(a_n) \to A(z)$

$$\begin{aligned} A'(z) &= \sum_{n\geq 0} n \cdot a_n \cdot z^{n-1} = \sum_{n\geq 0} (n+1) \cdot a_{n+1} \cdot z^n \\ &\Rightarrow (a_n) \to (1 \cdot a_1, 2 \cdot a_2, 3 \cdot a_3, \ldots) = ((n+1) \cdot a_{n+1})_{n=0}^{\infty} \end{aligned}$$

- $(a_n) \to \widehat{A}(z)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\widehat{A} &= \sum_{n\geq 0} n \cdot a_n \cdot \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} \cdot \frac{z^n}{n!} \\ &\Rightarrow (a_0, a_1, a_2, \ldots) \to (a_1, a_2, a_3, \ldots) \end{aligned}$$

3.8 Integration der erzeugenden Funktionen

- $(a_n) \to A(z)$

$$\begin{aligned} \int_0^z \left(\sum_{n\geq 0} a_n \cdot t^n \right) dt &= \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} \cdot z^{n+1} = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} \cdot z^n \\ &\Rightarrow (a_n) \to (0, \frac{a_0}{1}, \frac{a_1}{2}, \ldots) \end{aligned}$$

- $(a_n) \to \widehat{A}(z)$

$$\begin{aligned} \int_0^z \left(\sum_{n\geq 0} a_n \cdot \frac{t^n}{n!} \right) dt &= \sum_{n\geq 0} a_n \cdot \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} \cdot \frac{z^n}{n!} \\ &\Rightarrow (a_n) \to (0, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \ldots) \end{aligned}$$

3.9 inhomogene Rekursionen

$$f(n+d) + q_1 \cdot f(n+d-1) + \ldots + q_d \cdot f(n) = g(n) \text{ mit } n \geq 0$$

Eine allgemeine Lösung erhält man, indem man eine spezielle Lösung von obiger Gleichung nimmt und alle Lösungen von

$$f(n+d) + q_1 \cdot f(n+d-1) + \ldots + q_d \cdot f(n) = 0 \text{ mit } n \geq 0$$

dazu addiert.
Falls $g(n)$ ein Polynom in n ist, so kann eine spezielle Lösung von

$$f(n+d) + q_1 \cdot f(n+d-1) + \ldots + q_d \cdot f(n) = g(n) \text{ mit } n \geq 0$$

aus einem Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten für ein Polynom gleichen Grades ermittelt werden.

3.10 Rekursionen mit variablen Koeffizienten

Es seien $q_i = q_i(n)$ (variabel). Dann existiert keine allgemeine Lösung.

Spezialfall:

$$a(n) \cdot f(n) = b(n) \cdot f(n-1) + c(n) \text{ für } n \geq 1$$

Trick: (Summationsfaktor)
Multipliziere beide Seiten mit:

$$F(n) := \frac{\prod_{i=1}^{n-1} a(i)}{\prod_{j=1}^{n} b(j)} \text{ mit } F(1) = \frac{1}{b(1)}$$

Dies führt zu folgender Lösung:

$$f(n) = \frac{f(0) + \sum_{i=1}^{n} F(i) \cdot c(i)}{b(n+1) \cdot F(n+1)}$$

3.11 Aufgaben

3.11.1 einfache erzeugende Funktion aus Folge

Gesucht ist eine Funktion der folgenden Form:

$$A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)}$$

Dazu benötigt man eine geschlossene Form, z.B.:

$$a_n = a_{n-1} + [n = 1]$$

Die erzeugende Funktion erhält man dann mit dem Ansatz:

$$A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot z^n$$

Beispiel: Es sei $1, 2, 2, 2, \ldots$ eine Folge.

geschlossene Form: $a_n = a_{n-1} + [n = 1] + [n = 0]$
Ansatz:

$$\begin{aligned}
A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \cdot z^n A(z) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n-1} \cdot z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} [n = 1] \cdot z^n + \sum_{n \in \mathbb{Z}} [n = 0] \cdot z^n \\
A(z) &= z \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_{n-1} \cdot z^{n-1} + z^1 + z^0 \\
A(z) &= z \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \cdot z^n + z + 1 \\
A(z) \cdot (1 - z) &= z + 1 \\
A(z) &= \frac{z + 1}{1 - z}
\end{aligned}$$

3.11.2 zusammengesetzte erzeugende Funktion aus Folge

ähnlich wie oben, jedoch werden hier 2 Funktionen benötigt, um die Folge zu beschreiben.

Beispiel: Es sei $1, 2, 1, 2^2, 1, 2^3, \ldots$ eine Folge.

geschlossene Form: $a_n = b_n + c_n$ mit $b_n = 0, 1, 0, 1, 0, \ldots$ und $c_n = 0, 2, 0, 2^2, \ldots$
Jetzt muss man für beide Teilfolgen einzeln die erzeugenden Funktionen $A_b(z) + A_c(z)$ bestimmen.
Nun gilt: $A(z) = A_b(z) + A_c(z)$

3.11.3 Bemerkung: geschlossene Form

Kommt in der geschlossenen Form $[n \geq 0]$ oder ein Vielfaches als Summand vor, so handelt es sich hier beim Ansatz $A(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [n \geq 0] \cdot z^n$ um die geometrische Reihe.

Es gilt also:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} [n \geq 0] \cdot z^n = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n = \frac{1}{1 - z}$$

3.11.4 Verschachtelte Rekursionen

Es seien 2 Rekusionen a_n und b_n gegeben. Um die erzeugenden Funktionen zu ermitteln, bringt man beide Rekursionen in geschlossene Form und führt einen Ansatz je Rekursion durch. Einen der beiden Ansätze führt man dabei zum Ende, wobei man den anderen Ansatz festhält.
Den fertigen Ansatz setzt man dann in den noch nicht vollständigen ein und erhält somit ein endgültiges Ergebnis für diesen Ansatz. Dieses Ergebnis kann man dann in den anderen Ansatz wiederum einsetzen.

Beispiel: $a_n = 5a_{n-1} + 12b_{n-1} + [n = 0]$ und $b_n = 2a_{n-1} + 5b_{n-1}$

$$A(z) = 5z \cdot A(z) + 12z \cdot B(z) + 1 \text{ und } B(z) = 2z \cdot A(z) + 5z \cdot B(z)$$

$$B(z) = \frac{2z \cdot A(z)}{1 - 5z}$$

Dies setzt man nun in $A(z)$ ein und erhält dort das endgültige Ergebnis:

$$A(z) = \frac{1 - 5z}{1 - 10z + z^2}$$

Setzt man dies nun in $B(z)$ ein, so erhält man:

$$B(z) = \frac{2z}{1 - 10z + z^2}$$

3.11.5 Anwendung des Satzes

Erläuterung anhand der folgenden Rekursion:

$f(n+3) - 6f(n+2) + 12f(n+1) - 8f(n) = 0,\ f(0) = 1,\ f(1) = 1,\ f(2) = 3$
Dann ist:

$$q(z) = -8z^3 + 12z^2 - 6z^1 + z^0$$

Also:

$$\begin{aligned} q^R(z) &= -8 + 12z^1 - 6z^2 + z^3 = (z-2)^3 \text{ Nullstellenbestimmung} \\ &\Rightarrow q(z) = (1 - 2z)^3 \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \cdot \alpha_i^n$$

mit $k = 1$ (Anzahl Nullstellen) und $\text{Grad}(p_1(n)) = 2$ (Vielfachheit der Nullstellen - 1)

$$f(n) = (a + b \cdot n + c \cdot n^2) \cdot 2^n, \text{ wobei 2 die Nullstelle ist}$$

Setze jetzt die gegebenen Anfangswerte ein und erhalte ein LGS. Durch auflösen folgt:

$$f(n) = (1 - \frac{7}{8} \cdot n + \frac{3}{8} \cdot n^2) \cdot 2^n = 2^n - 7n \cdot 2^{n-3} + 3n^2 \cdot 2^{n-3}$$

3.11.6 erzeugende Funktion aus Rekursion

Gesucht:

$$F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

Aus der Rekursion kann man wie oben $q(z)$ ablesen.
$p(z)$ erhält man dann aus:

$$\begin{aligned}
p(z) &= q(z) \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n) \cdot z^n \\
p(z) &= q_0 \cdot f(0) \cdot z^0 + (q_0 \cdot f(1) + q_1 \cdot f(0)) \cdot z^1 + (q_0 \cdot f(2) + q_1 \cdot f(1) + q_2 \cdot f(0)) \cdot z^2 + \ldots \\
&+ \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} (q_0 \cdot f(n+d) + q_1 \cdot f(n+d-1) + \ldots + q_d \cdot f(n)}_{\widehat{=} q_0 \cdot f(n+d) + \ldots + q_d \cdot f(n) = 0}
\end{aligned}$$

Also:

$$p(z) = q_0 \cdot f(0) \cdot z^0 + (q_0 \cdot f(1) + q_1 \cdot f(0)) \cdot z^1 + (q_0 \cdot f(2) + q_1 \cdot f(1) + q_2 \cdot f(0)) \cdot z^2 + \ldots$$

Beispiel:

$f(n+3) - 6 \cdot f(n+2) + 12 \cdot f(n+1) - 8 \cdot f(n) = 0$ mit $f(0) = f(1) = 1$ und $f(2) = 3$

Damit ist $q(z)$:

$$q(z) = 1 - 6z + 12z^2 - 8z^3$$

Es folgt für $p(z)$:

$$\begin{aligned}
p(z) &= 1 \cdot 1 + (1 \cdot 1 - 6 \cdot 1) \cdot z + (1 \cdot 3 - 6 \cdot 1 + 12 \cdot 1) \cdot z^2 \\
p(z) &= 1 - 5z + 9z^2
\end{aligned}$$

Also:

$$F(z) = \frac{1 - 5z + 9z^2}{1 - 6z + 12z^2 - 8z^3}$$

3.11.7 Weiterentwicklung der erzeugenden Funktion

Gesucht ist die Darstellung $F(z) = \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i \cdot z)^{d_i}}$ aus $F(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, wobei die $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=1}^{k} d_i =$ Grad des Nenners von $F(z)$ und $g_i(z)$ Polynome vom Grad $< d_i$ sind.

Beispiel: $F(z) = \frac{z+2}{z^2+1}$ Dann ist:

$$q(z) = z^2 + 1 \Rightarrow q^R(z) = 1 + z^2$$

Daraus ergeben sich die Nullstellen $\alpha_1 = i$ und $\alpha_2 = -i$ Also:

$$q(z) = (1 - iz)(1 + iz)$$

Partialbruchzerlegung, da Grad$(g_i(z)) = 1 = d_i$:

$$\frac{z+2}{z^2+1} = \frac{A}{1-iz} + \frac{B}{1+iz}$$

Nach der Multiplikation mit dem Hauptnenner und Einsetzen von $z_1 = i$ und $z_2 = -i$ erhält man:

$$A = \frac{2-i}{2} \text{ und } B = \frac{2+i}{2}$$

Daraus folgt:

$$F(z) = \frac{1-\frac{i}{2}}{1-iz} + \frac{1+\frac{i}{2}}{1+iz}$$

3.11.8 exponentiell erzeugende Funktionen

Wie (gewöhnliche) erzeugende Funktionen, jedoch mit folgendem Ansatz:

$$\widehat{A} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n!} \cdot z^n$$

3.11.9 inhomogene Rekursionen

Es sei die Rekursion $q_o \cdot f(n+d) + q_1 \cdot f(n+d-1) + \ldots + q_d \cdot f(n) = g(n)$ gegeben.

Zuerst muss man die allgemeine homogene Lösung zur Rekursion wie gewohnt bestimmen.
Aus $q_o \cdot f(n+d) + q_1 \cdot f(n+d-1) + \ldots + q_d \cdot f(n) = 0$ folgt mittels $q(z)$ und $q^R(z)$ z.B. eine allgemeine Lösung der Form:

$$f(n) = (a + bn) \cdot 2^n$$

Die Partielle Lösung muss dann mit einem bestimmten Ansatz bestimmt werden, der sich nach dem Grad von $g(n)$ richtet. Es gilt:

- ist b vom Grad 0, so lautet der Ansatz: $f(n) = a$
- ist b vom Grad 1, so lautet der Ansatz: $f(n) = a + bn$
- ist b vom Grad 2, so lautet der Ansatz: $f(n) = a + bn + cn^2$
- etc.

Man ersetzt also jeden Rekursionsaufruf in der Rekursionsgleichung durch den Ansatz und macht anschließend einen Koeffizientenvergleich. Durch Lösen des dadurch enstehenden LGS erhält man die Koeffizienten $a, b, \ldots$.
Dann addiert man die homogene zu der partikulären Lösung und löst durch Einsetzen der Anfangswerte die Variablen der allgemeinen homogenen Lösung auf.

Beispiel: $f(n+2) - 4f(n+1) + 4f(n) = 5n$

allgemeine homogene Lösung:

$$f(n+2) - 4f(n+1) + 4f(n) = 0$$

$$\begin{aligned} q(z) &= 1 - 4z + 4z^2 \\ &\Rightarrow q^R(z) = z^2 - 4z + 4 = (z-2)^2 \\ &\Rightarrow q(z) = (1-2z)^2 \\ &\Rightarrow f(n) = (a+bn) \cdot 2^n \end{aligned}$$

partikuläre Lösung: $g(n) = 5n \Rightarrow$ Ansatz: $f(n) = a + bn$

$$(a + b\cdot(n+2)) + (-4a - 4b\cdot(n+1)) + (4a + 4bn) = 5n$$
$$\Leftrightarrow a - 2b + bn = 5n$$

Koeffizientenvergleich:

$$\begin{aligned} &\text{Grad 0:} \quad a - 2b = 0 \\ &\text{Grad 1:} \quad bn = 5n \Leftrightarrow b = 5 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich: $a = 10, b = 5$
Die allgemeine Lösung lautet also:

$$f(n) = (a+bn)\cdot 2^n + 10 + 5n$$

Mit $f(0) = 0$ und $f(1) = 2$ folgt $a = -10$ und $b = \frac{7}{2}$ und damit als Lösung der Rekursion:

$$f(n) = (-10 + \frac{7}{2}\cdot n)\cdot 2^n + 10 + 5n$$

Bemerkung: Ist $g(n) = \alpha^n$, so benutzt man den Ansatz $k \cdot \alpha^n$.

3.11.10 variable Koeffizienten

Für Rekursionen der Form:

$$a(n) \cdot f(n) = b(n) \cdot f(n-1) + c(n),\ f(0) = d$$

benutzt man den Ansatz:

$$F(n) = \frac{\prod_{i=1}^{n-1} a(i)}{\prod_{i=1}^{n} b(i)}$$

Es ergibt sich folgende Formel:

$$f(n) = \frac{f(0) + \sum_{i=1}^{n} F(i) \cdot c(i)}{b(n+1) \cdot F(n+1)},$$

in die man die einzelnen Elemente einzusetzen hat.

Beispiel: $2^n \cdot f(n) = 2^n \cdot f(n-1) + \left(\frac{2}{3}\right)^n,\ f(0) = -\frac{1}{2}$
Für den Ansatz folgt:

$$\begin{aligned}
F(j) &= \frac{\prod_{i=1}^{j-1} a(i)}{\prod_{i=1}^{j} b(i)} = \frac{2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{j-1}}{2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^j} = \left(\frac{1}{2}\right)^j \\
b(n+1) &= 2^{n+1} \\
F(n+1) &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\
\sum_{i=1}^{n} F(i) \cdot c(i) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i \\
&= \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^i - 1 = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Formel ergibt:

$$f(n) = -\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

4 Graphentheorie

4.1 Definition: Graph

Ein Graph ist ein Paar $G = (V, E)$ disjunkter, endlicher Mengen, wobei $E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{v, w\} : v \neq w;\ v, w \in V\}$.

Elemente von V heißen *Punkte*, Knoten, Ecken (engl. vertices).
Elemente von E heißen *Kanten* (engl. edges).

Zwei Knoten $u, v \in V$ heißen *adjazent*, wenn sie durch eine Kante verbunden sind. Die Knoten u und v nennt man dann auch Endknoten der Kante $\{u, v\}$.

Ein Knoten $u \in V$ und eine Kante $e \in E$ heißen *inzident*, wenn u einer der Endknoten von e ist.

4.1.1 Definition: Grad

$N(v)$ sei die Menge der Nachbarn von $v \in V$, d.h.

$$N(v) := \{u \in V | vu \in E\}$$

Die Anzahl der Nachbarn von v heißt der *Grad* von v

$$d(v) = d_G(v)$$

Ein Graph G heißt *k-regulär*, falls für alle Knoten $v \in V$ gilt, dass $d(v) = k$ ist.

4.1.2 Definition: zusammenhängend

G heißt *zusammenhängend* (zshg.), falls zu je zwei Punkten $u, v \in V$ in G ein (uv)-Weg existiert.

Ist G nicht zusammenhängend, so zerfällt G in maximale zusammenhängende Teilgraphen, die sogenannten *Komponenten* von G.

4.1.3 Defintion: Teilgraph

$H = (U, F)$ heißt *Teilgraph* von $G = (V, E)$, falls $U \subseteq V$ und $F \subseteq E$.

H heißt *induzierter Untergraph* von G, falls $F = E \cap \binom{U}{2}$. D.h., dass *beide* Endpunkte einer Kante in H liegen.

4.1.4 Satz

In jedem Graphen ist die Anzahl der Punkte ungeraden Grades gerade.

Bemerkungen:

- In jedem Graphen gibt es 2 Punkte, die den gleichen Grad haben.
- Für jeden Graphen G = (V, E) gilt: $\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$.

4.1.5 Definition: Weg

$v_o, e_1, v_1, e_2, v_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$, wobei $e_i = v_{i-1}v_i \in E$, $v_1 \ldots, v_k \in V$ alle $v_1, \ldots, v_k$ verschieden.

Hamiltonscher Weg: Alle Punkte von G werden durchlaufen.

4.1.6 Definition: Kreis

$v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$, wobei $e_i = v_{i-1}v_i \in K$, $v_k = v_0$, $v_1, \ldots, v_k$ alle verschieden.

Hamiltonkreis: Wie Hamiltonweg, aber $v_0 = v_k$

4.1.7 Definition: Kantenzug

$v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$. Die v_i sind nicht notwendigerweise verschieden, die e_i aber schon. Punkte dürfen mehrmals besucht werden, Kanten aber nur einmal. Der Kantenzug ist geschlossen, wenn gilt: $v_0 = v_k$.

4.1.8 Definition: Kantenfolge

$v_0, e_1, v_1, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$, wie bei einem Kantenzug, jedoch dürfen Punkte und Kanten mehrfach vorkommen.

4.1.9 Satz: Euler-Graph

Ein Kantenzug heißt *Eulersch*, falls jede Kante genau einmal durchlaufen wird. Ein geschlossener Eulerscher Kantenzug heißt *Euler-Tour*. G heißt Eulersch, falls G eine Euler-Tour besitzt.

Ein zusammenhängender Graph ist Eulersch g.d.w. alle seine Grade gerade sind.

4.2 Definition: Baum

Ein zusammenhängender Graph ohne Kreise heißt ein *Baum*.

4.2.1 Satz: Anzahl der Punkte im Baum

Ein Baum mit n Punkten hat immer $n-1$ Kanten.

4.2.2 Eigenschaften: Baum

Es sei $G=(V,E)$ ein Graph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. G ist ein Baum.
2. zu je 2 Punkten $u, v \in V$ gibt es genau einen Weg von u nach v.
3. G ist minimal zusammenhängend, d.h. G ist zshg. und $G-e := (V \backslash \{e\})$ ist nicht zshg. für alle $e \in E$.
4. G ist maximal kreisfrei, d.h. G ist kreisfrei, aber $G+e := (V, E \cup \{e\})$ enthält einen Kreis für jedes $e \in \binom{V}{2} \backslash E$.

4.2.3 Satz: von Cayley

Ist $|V| = n$, so gibt es auf V genau n^{n-2} Bäume.

4.2.4 Minimaler Spannbaum

Gegeben ist ein zshg. Graph $G=(V,E)$ und eine Kantenbewertung $c : E \to \mathbb{R}$.

Gesucht wird ein *aufspannender Baum* $T \subseteq G$ ($T=(V,F)$, $F \subseteq E$) von G, so dass

$$\sum_{e \in F} c(e) \leq \sum_{e \in F'} c(e)$$

für alle $T' = (V, F')$, $F' \subseteq E$.

4.2.5 Kruskal-Algorithmus

1. Sortiere $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ so, dass $c(e_1) \leq c(e_2) \leq \ldots c(e_m)$.
2. Setzen $F_0 := \emptyset$. Dann prüfen wir sukzessive für $i = 1, \ldots, m$, ob der Graph $(V, F_{i-1} \cup \{e_i\})$ einen Kreis enthält oder nicht.

- Wenn ja: $F_i = F_{i-1}$
- Wenn nein: $F_i = F_{i-1} \cup \{e_i\}$

Dann ist $T = (V, F_m)$ ein minimaler Spannbaum.

4.3 Definition: planare Graphen

Kann der Graph G so in die Ebene gezeichnet werden, dass die Linien, die die Kanten des Graphen darstellen, nur Ecken des Graphen als gemeinsame Punkte haben, so heißt G *planar* (plättbar). Eine solche Zeichnung nennen wir einen *ebenen Graphen* oder auch eine *Landkarte*.

Schneidet man die Ebene entlang der Kanten eines ebenen Graphen auf, so zerfällt sie in endlich viele Stücke (*Länder* von G), von denen genau eines unbeschränkt ist.

4.3.1 Satz: Eulerscher Polyeder

Ein ebener, zshg. Graph mit n Punkten, m Kanten und f Ländern erfüllt die Beziehung

$$n - m + f = 2$$

Folgerungen:

1. Ein planarer Graph mit n Punkten hat höchstens $3n - 6$ Kanten.
2. Ein planarer Graph mit n Punkten ohne Kreise der Länge 3 besitzt höchstens $2n - 4$ Kanten.
3. Graphen, die durch Unterteilung von nicht planaren Graphen entstehen, sind nicht planar.
   $\Rightarrow$ jeder Graph, der eine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ enthält, ist nicht planar.

   Es gilt auch die Umkehrung.

4.3.2 Satz: von Kuratowski

Ein Graph ist genau dann planar, wenn er keine Unterteilung von K_5 oder $K_{3,3}$ enthält.

4.3.3 Vierfarben-Problem

Können die Länder einer Landkarte mit 4 Farben so gefärbt werden, dass je zwei Länder mit einer gemeinsamen Grenzlinie verschieden gefärbt sind?

Trick: Setzen in jedes Land eine Hauptstadt und verbinden zwei Hauptstädte g.d.w. die Länder eine gemeinsame Grenzlinie haben.

$\Rightarrow$ Seit 1976 ist bekannt, dass jede Landkarte tatsächlich mit 4 Farben gefärbt werden kann.

4.3.4 Definition: chromatische Zahl

Eine *Färbung* eines Graphen $G = (V, E)$ ist eine Abbildung $f : V \to C$ (Farbmenge), so dass $uv \in E$ impliziert $f(u) \neq f(v)$.
Die *chromatische Zahl* $\chi(G)$ ist die kleinste Anzahl von Farben, die man zum Färben von G benötigt.

Beispiele:

- $\chi(K_n) = n$ (vollständiger Graph)
- $\chi(K_{m,n}) = 2$
- $\chi(Kreis) = \begin{cases} 3 & \text{, falls Kreis ungerade} \\ 2 & \text{, falls Kreis gerade} \end{cases}$

4.4 gerichteter Graph

Ein gerichteter Graph G besteht aus den beiden disjunkten Mengen V und $B \subseteq V \times V = \{(u, v) | u, v \in V\}$. V heißen die Knoten und B die Bögen von G.

4.4.1 Definition: Netzwerk

Ein Netzwerk N ist ein Quadrupel (G, c, q, s), wobei

- $G = (U, B)$ ein gerichteter Graph ist.
- $c : B \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ (Kapazitätsfunktion)
- $q, s \in V$, $q \neq s$, q heißt Quelle, s heißt Senke

4.4.2 Definition: Fluss in einem Netzwerk

Ein Fluss in einem Netzwerk N ist eine Funktion $f : B \to \mathbb{R}$, so dass gilt

1. Ist $e \in B$, so ist $f(e) \leq c(e)$
2. Für alle $x \in V \backslash \{q, s\}$:

$$\sum_{w:(w,x)\in B} f(w,x) = \sum_{y:(x,y)\in B} f(x,y)$$

4.4.3 Definition: Wert eines Flusses

Der Wert val(f) eines Flusses f ist definiert durch:

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{x:(q,x)\in B} f(q,x) - \sum_{y:(y,q)\in B} f(y,q)$$

4.4.4 Definition: Schnitt

Ein Schnitt in N ist eine Teilmenge $W \subseteq V$ mit $q \in W, s \notin W$. Die Kapazität von W cap(W) ist definiert durch:

$$\mathrm{cap}(W) = \sum_{\substack{(x,y)\in B \\ x\in W, y\notin W}} c(x,y)$$

4.4.5 Lemma

Es sei N ein Netzwerk, f ein Fluss in N, W ein Schnitt. Dann gilt:

1. $$\mathrm{val}(f) = \sum_{\substack{(x,y)\in B \\ x\in W, y\notin W}} f(x,y) - \sum_{\substack{(u,v)\in B \\ u\notin W, v\in W}} f(u,v)$$

2. $$\mathrm{val}(f) \leq \mathrm{cap}(W)$$

4.4.6 Definition: vergrößernder Weg

Es sei N ein Netzwerk und f ein Fluss in N. Eine Folge $x_0, e_1, x_1, e_2, \ldots, x_{n-1}, e_r, x_r$ heißt *vergrößernder* $(x_0 - x_r)$-*Weg* (für f) falls:

1. $x_0, \ldots, x_r$ sind paarweise verschiedene Punkte aus V

2. $e_1, \ldots, e_r$ sind Bögen aus B mit $e_j = (w_{j-1}, w_j)$ (Vorwärtskante) oder $e_j = (x_j, x_{j-1})$ (Rückwärtskante), $1 \leq j \leq r$.
3. für jede Vorwärtskante e_j ist $f(e_j) < c(e_j)$.
4. für jede Rückwärtskante e_j ist $f(e_j) > 0$.

4.4.7 Satz: Schnitt-Fluss-Theorem

1. Ein Fluss f ist maximal g.d.w. kein vergrößernder (q, s)-Weg existiert.
2. Es gibt stets einen Fluss f und einen Schnitt W mit $\mathrm{val}(f) = \mathrm{cap}(W)$, es sei denn $\mathrm{cap}(W) = \infty$ für alle Schnitte W

$$\max_{f \textit{ Fluss}} \mathrm{val}(f) = \min_{W \textit{ Schnitt}} \mathrm{cap}(W)$$

4.4.8 Algorithmus von Ford und Fulkerson

1. Es sei f_0 ein Fluss in N, z.B. $f_0 \equiv 0$.
2. $i = 0$
3. Wir suchen für f einen vergrößernden (q, s)-Weg. Falls kein solcher existiert, so ist f_i maximal und wird ausgegeben. Andernfalls vergrößern wir f_i wie im Beweis des Schnitt-Fluss-Theorems zu einem neuen Fluss f_{i+1} (siehe Vorlesung).
4. $i = i + 1$, weiter mit 3.

Bemerkungen:

Falls $c(x, y)$ ganzzahlig ist für alle $(x, y) \in B$, so wird der Wert des Flusses jedesmal um mind. 1 erhöht. Das Verfahren endet also nach höchstens $\sum_{e \in B} c(e)$ Schritten.

Falls $c(e) \in \mathbb{Q}$ für alle $(x, y) \in B$, so bricht das Verfahren ebenfalls nach endlich vielen Schritten ab (Multiplikation aller Kapazitäten mit dem Hauptnenner der auftretenden Brüche und löse das ganzzahlige Problem).

4.4.9 Satz: von Edmonts und Karp

Falls immer ein vergr. (q, s)-Weg mit minimaler Kantenzahl gewählt wird, so stoppt der Algorithmus nach höchstens $\frac{m \cdot n}{2}$ Vergrößerungen, $n = |V|$, $m = |B|$, selbst dann, wenn irrationale Kapazitäten auftreten.

Bemerkung:

Wir nennen eine Kante $e \in B$ *kritisch* in der $(k+1)$-ten Vergrößerung, falls

- e dort als Vorwärtskante benutzt wird und $f_{k+1}(e) = c(e)$ gilt.

  oder:

- e dort als Rückwärtskante benutzt wird und $f_{k+1}(e) = 0$ gilt.

Jede Kante aus G kann höchstens $\frac{n}{2}$-mal kritisch sein, $n = |V|$.

4.4.10 Bemerkung zum Auffinden eines kürzesten Weges

Angenommen, f ist unser Fluss und $G = (V, B)$ der gerichtete Graph. Definieren $G' = (V, B')$ (gleiche Punktmenge) wie folgt:
Für jede Kante $e = (v, w) \in B$ prüfen wir, ob $f(e) < c(e)$ und ob $f(e) > 0$ ist.

Falls $f(e) < c(e)$: Fügen $e = (v, w)$ zu B' hinzu.

Falls $f(e) > 0$: Fügen (w, v) zu B' hinzu.

Dann brauchen wir einen gerichteten (q, s)-Weg in G' mit minimaler Kantenzahl. Einfachste Lösung ist eine Breitensuche in G'.

4.5 Definion: Matching

Ein Matching M ist eine Teilmenge $M \subseteq E$, so dass gilt:

$$e, f \in M,\ e \neq f \Rightarrow e \cap f = \emptyset$$

Ein Matching ist eine Menge von Kanten mit paarweise disjunkten Endpunkten.

4.5.1 Algorithmus zur Konstruktion eines max. Matchings

Gegeben sei ein bipartiter Graph $G = (V_1 \dot\cup V_2, E)$.

1. Orientiere alle Kanten von V_1 nach V_2.
2. Füge q und s als neue Punkte hinzu, ebenso alle Kanten (q, x) mit $x \in V_1$ und (y, s) mit $y \in V_2$.
   Kapazitäten:

$$\begin{aligned} c(q,x) &= 1 = c(y,s) \text{ für alle } x \in V_1, y \in V_2 \\ c(x,y) &= \infty, \text{ falls } x \in V_1, y \in V_2 \end{aligned}$$

Der Algorithmus von Ford und Fulkerson konstruiert einen maximalen, ganzzahligen Fluss.

<u>max. Matching:</u>

Ein ganzzahliger, maximaler Fluss existiert und induziert ein maximales Matching, denn:

Jede Kante (u, v) mit $u \in V_1$ und $v \in V_2$ und $f(u, v) > 0$ erfüllt $f(u, v) = 1$.

$$M = \{\{u, v\} | u \in V_1, v \in V_2, f(u, v) = 1\}$$

Weiterhin gilt:

$$|M| = \text{ val}(f)$$

Anwedung des Max-Flow-Min-Cut-Theorems:

$$\begin{aligned} \max_{f \text{ Fluss}} \text{val}(f) &= \min_{W \text{ Schnitt}} \text{cap}(W) \\ \Rightarrow \max_{M \text{ Matching}} |M| &= \min_{W \text{ Schnitt}} \text{cap}(W) \end{aligned}$$

4.5.2 Definition: Knotenüberdeckung

$$X = (V_1 \backslash W) \cup (W \cap V_2)$$

X hat folgende Eigenschaft:

Jedes $w \in E$ hat mind. einen Endpunkt in X (Knotenüberdeckung).

Also ist X eine (minimale) Knotenüberdeckung mit $|X| = |M|$ (M ist max. Matching).
Daraus folgt der nächste Satz:

4.5.3 Satz: von König

Es gilt in bipartiten Graphen:

$$\max_{M \ Matching} |M| = \min_{X \ Knoten\ddot{u}berdeckung} |X|$$

4.5.4 Satz: von Hall

Sei $G = (V_1 \dot{\cup} V_2, E)$ ein bipartiter Graph mit $|V_1| = |V_2|$. Ein Matching M heißt *perfekt*, falls jeder Knoten von G Endpunkt einer Kante von M ist.

4.5.5 Satz: von Dilworth

Eine Menge H zusammen mit einer zweistelligen Relation $<$ auf H heißt halbgeordnet, falls

1. $<$ ist irreflexiv, d.h.
   $x \in H \Rightarrow$ nicht $x < x$
2. $<$ ist transitiv, d.h.
   $x < y$ und $y < z \Rightarrow x < z$ für alle $x, y, z \in H$

Eine Menge K heißt *Kette*, falls für alle $x, y \in K$ $x \neq y$ gilt:

$$x < y \text{ oder } y < x$$

Eine Teilmenge $A \subseteq H$ heißt *Antikette*, falls für alle $x, y \in A$, $x \neq y$ gilt:

$$\neg(x < y) \text{ und } \neg(y < x)$$

d.h. je zwei Elemente von A sind unvergleichbar.

Es sei $(H, <)$ eine endliche halbgeordnete Menge. Dann gilt:

$$\max_{A \ Antikette} |A| = \min_{K \ Kettenzerlegung} |K|$$

4.6 Abbildungen in Graphen

4.6.1 Definition: Isomorphismus

Ein *Isomorphismus* zwischen zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ ist eine bijektive Abbildung $f : V \to V'$, so dass gilt:

$$f(u)f(v) \in E' \Leftrightarrow uv \in E.$$

4.6.2 Definition: Automorphismus

Ein *Automorphismus* eines Graphen G ist ein Isomorphismus von G nach G.

4.6.3 Definition: eckentransitiv

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *eckentransitiv*, falls es für jedes Paar Ecken $u, v \in V$ einen Automorphismus f gibt, mit $f(u) = v$.

4.6.4 Definition: kantentransitiv

Ein Graph $G = (V, E)$ heißt *kantentransitiv*, falls es für jedes Paar Kanten $uv, u'v' \in E$ einen Automorphismus f gibt, mit $f(u)f(v) = u'v'$ (insbesondere: $f(u) = u'$ oder $f(u) = v'$).

5 algebraische Strukturen

5.1 Definition: n-stellige Operation

Ist M eine Menge, so heißt eine Abbildung

$$f : \underbrace{M^n}_{M\times M\times\ldots\times M=\{(m_1,m_2,\ldots,m_n):m_i\in M,\ 1\leq i\leq k\}} \to M$$

eine *n-stellige Operation* (auf M).

Bemerkung: $M^0 := \{\emptyset\}$. Nullstellige Operationen entsprechen Elementen von M (Konstanten).

5.2 Definition: universelle Algebra

Sei M eine Menge.
Eine *universelle Algebra* vom Typ $(n_i)_{i\in I}$ ist ein Paar $(M,(f_i)_{i\in I})$, wobei f_i eine n_i-stellige Operation auf M ist.

5.3 Algebren

5.3.1 Halbgruppen

Eine *Halbgruppe* ist ein Paar $(M,\circ)$, wobei $\circ$ eine zweistellige Operation ist (Typ: (2)).
Es gilt das Assoziativgesetz: $a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c$ für $a,b,c\in M$.

5.3.2 Monoide

Ein *Monoid* ist ein 3-Tupel $(M,\circ,e)$ (Typ: (2,0)). Es gilt:

- $(M,\circ)$ ist eine Halbgruppe
- e ist ein neutrales Element, d.h.: $m\circ e=e\circ m=m$ für alle $m\in M$

5.3.3 Gruppen

Eine Gruppe ist ein 4-Tupel $(G,\circ,e,^{-1})$ (Typ: (2,0,1)). Es gilt:

- $(G,\circ,e)$ ist ein Monoid
- für alle $g\in G$ gilt: $g\circ g^{-1}=g^{-1}\circ g=e$

Falls $\circ$ kommutativ ist, so heißt die Gruppe *abelsch*.

Ist die Gruppe *endlich*, so bedeutet dies, dass sich die Elemente der Gruppe ab einer bestimmten Stelle wiederholen.

5.3.4 Ring (mit 1)

Ein *Ring (mit 1)* ist ein 6-Tupel $(R, +, -, 0, \cdot, 1)$ (Typ: (2,2,0,2,0)). Es gilt:

- $(R, +, -, 0)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(R, \cdot, 1)$ ist ein Monoid
- für $a, b, c \in R$ gilt:
  - $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
  - $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

Ist $\cdot$ kommutativ, dann heißt der Ring *kommutativ*.

5.3.5 Körper

Ein Körper ist ein 7-Tupel $(K, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1)$ (Typ: (2, 2, 0, 2, 1, 0)). Es gilt:

- $(K, +, -, 0, \cdot, 1)$ ist ein kommutativer Ring
- $(K \backslash \{0\}, \cdot, ^{-1}, 1)$ ist eine Gruppe

5.4 Definition: Unteralgebra

Gegeben sei eine Algebra A $(A, (f_i)_{i \in I})$.
$U \subseteq A$ heißt *Unteralgebra* von A, falls gilt:
Für $i \in I$ und $u_1, \ldots, u_{n_i} \in U$ gilt:

$$f_i(u_1, \ldots, u_{n_i}) \in U$$

Bezeichnung: $U \leq A$

5.4.1 Bermerkung

Ist $U_j \leq A$, $j \in J$, so ist auch $\bigcap_{j \in J} U_j \leq A$.

5.5 Definition: Äquivalenzrelation

M sei eine Menge, $\sim \subseteq M \times M$ sei eine zweistellige Relation auf M.
$\sim$ heißt *Äquivalenzrelation* auf M, falls für alle $x, y, z \in M$ gilt:

- $x \sim x$ (reflexiv)
- $x \sim y \to y \sim x$ (symmetrisch)
- $x \sim y$ und $y \sim z \to x \sim z$ (transitiv)

Bezeichnung: $[x]_\sim := \{y \in M : x \sim y\}$ heißt die *Äquivalenzklasse* von x.

5.6 Definition: Kongruenzrelation

Eine Äquivalenzrelation heißt *Kongruenzrelation*, falls gilt:
Für $a_1, \ldots, a_{n_i} \in A$, $i \in I$, $a_1 \sim a'_1, \ldots, a_{n_i} \sim a'_{n_i}$ folgt:

$$f_i(a_1, \ldots, a_{n_i}) \sim f_i(a'_1, \ldots, a'_{n_i}).$$

$\sim$ ist mit allen f_i verträglich.
Das bedeutet, dass zwei Algebren A und A' gegeben sind. Die Elemente beider Algebren sind zueinander stehen in Relation zu einander. Ebenso besitzen beide Algebren eine Schar von Abbildungen $f_i, i \in I$. Wenn für jede dieser Abbildungen gilt, dass die Bilder zweier äquivalenter Elemente aus A und A' auch wieder äquivalent sind, dann heißt die Äquivalenzrelation eine Kongruenzrelation.

5.7 Definition: Ideal

Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring (mit 1).
Ein *Ideal* I in R (geschrieben: $I \trianglelefteq R$) ist eine Untergruppe $I \leq (R, +)$, falls gilt:

- $0 \in I$
- $-a \in I$ für alle $a \in I$
- $r \cdot s = s \cdot r \in I$ für alle $r, s \in I$
- $a + b \in I$ für alle $a, b \in I$

5.8 Definition: Hauptideal

Es sei R ein kommutativer Ring, dann heißt $R \cdot d = \{r \cdot d : r \in R\}$ das von d in R erzeugte *Hauptideal*.

Ein kommutativer Ring heißt *Hauptidealring*, falls jedes Ideal ein Hauptideal ist.

5.9 Defintion: Integritätsbereich

Es sei R ein kommutativer Ring mit 1. R heißt *Integritätsbereich*, falls für $a, b \in R$ aus $a \cdot b = 0$ stets $a = 0$ oder $b = 0$ folgt.

5.10 Definition: Euklidischer Ring

Ein Integritätsbereich R zusammen mit einer Funktion:

$$\delta : R \backslash \{0\} \to \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$$

heißt *Euklidischer Ring* $\Leftrightarrow$ gilt:
Falls $a, b \in R$ und $b \neq 0$, so existieren $q, r \in R$ mit:

$$a = q \cdot b + r \text{ und } r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b).$$

5.11 Definition: Einheit

R sei ein kommutativer Ring (mit 1).
$u \in R$ heißt *Einheit*, falls u ein Inverses u^{-1} besitzt ($u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = 1$).

6 Danksagung

Ich danke ganz besonders Georg, der mir geholfen hat, dieses Skriptum zu vervollständigen... danke für die Zeit, die du inverstiert hast.
Weiterhin möchte ich gerne Sebastian W., Christian M. und Andre K. danken, die immer wieder Sätze und Definitionen gefunden haben, die noch nicht im Skriptum enthalten waren.
Außerdem danke ich allen, die mir geholfen haben die Vorlesung etwas besser zu verstehen - also auch den Tutoren in den Diskussionsstunden.