Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Abzählung, Rekursionen, erzeug. Funktionen

1.1 Elementare Zählprinzipien

(18.04.01)

M bezeichnet endliche Menge
$|M|$ = Anzahl der Elemente von M
$|A| = n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \Leftrightarrow$ Es gibt eine Bijektion $\alpha : A \to \{1, \ldots, n\}$
$|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$

Lemma 1:

a) $|A| = |B| \Leftrightarrow$ Es gibt eine Bijektion $\alpha : A \to B$

b) $|A \dot{\cup} B| = |A| + |B|, A \dot{\cup} B$ disjunkte Vereinigung, d.h. es gilt $A \cap B = \phi$

c) $|A \times B| = |A| \cdot |B|, A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$

Folgerung: Abb(A,B) $= B^A$ = Menge aller Abbildungen von A nach B
$|B^A| = |B|^{|A|}$

Beweis:

$$|A| = n, A = \{a_1, \ldots, a_n\}, |B| = m$$

$$B^A \to \underbrace{B \times B \times \ldots \times B}_{n-mal}$$

$$f \to (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)) \text{ ist Bijektion}$$

$$|B^A| = |B \times B \times \ldots \times B| = |B|^n \text{ nach Lemma 1 c)}$$

Def.: $f : A \to A$ heisst Permutation von A, wenn f bijektiv
$S_n = \{\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\} \mid \sigma \text{ bijektiv}\} = Sym\{1, \ldots, n\}$
"symmetrische Gruppe vom Grad n"

Lemma 2: $|S_n| = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ (= Anzahl der Möglichkeiten, eine n-Menge A (d.h. Menge A mit $|A| = n$) anzuordnen) (s. Lin. Alg. I)

Beweis:

$$\sigma \mapsto (\sigma(1), \ldots, \sigma(n))$$

$$S_n \to \{(i_1,\dots,i_n) \mid i_j \in \underline{n}, i_j \neq i_k \text{ für } j \neq k\} \text{ (bijektiv)}$$
$$= \{(i_1,\dots,i_n) \mid \{i_1,\dots,i_n\} = \{1,\dots,n\}\}$$
$$|S_n| = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Satz 1: Die Anzahl der Teilmengen einer n-Menge A ist 2^n
$|A| = n, |P(A)| = 2^n$, dabei ist $P(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$ Potenzmenge von A

Beispiel: A = {1,2} , P(A) = {{1,2}, {1}, {2}, ∅}

Beweis: $P(A) \to \{0,1\}^A$ (= Abb(A, {0,1}))
$B \mapsto \chi_B$ charakteristische Funktion von B definiert durch

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$B = \{x \in A \mid \chi_B(x) = 1\}$$
$$|P(A)| = |\{0,1\}^A| = 2^{|A|}$$

Definition: $P_k(A) = \binom{A}{k}$ = Menge aller k-Teilmengen von A = $\{B \subseteq A \mid |B| = k\}$

Bemerkung:

$$P(A) = \dot{\bigcup_{k=0}^{n}} P_k\ (A), |A| = n$$

Also nach Lemma 1 ist

$$|P(A)| = \sum_{k=0}^{n} |P_k(A)|$$

Lemma 3:

$$|P_k(A)| = \left|\binom{A}{k}\right| = \binom{n}{k} \text{Binomialkoeffizient} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \text{ , falls } |A| = n$$

Beweis:

$$B = \{b_1,\dots,b_k\}, |B| = k, b_i \neq b_j \text{ für } i \neq j, b_i \in A$$
$$|\{(b_1,\dots,b_k) | b_i \in A, b_i \neq b_j \text{ für } i \neq j\}| = n(n-1)\dots(n-k+1)$$
$$\text{Es gibt k! Anordnungen von } \{b_1,\dots,b_k\}$$

2. Beweis von Satz 1: (Binomialsatz)

$$|A| = n, |P(A)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n$$

Satz 2:

a) (Pascal-Dreieck)

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{ für } k \geq 1, n \geq k$$

b) (Vandermondesche Identität)

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{n}{l} \binom{m}{k-l}$$

Beweis: 1.) $n \geq 1, |A| = n, \binom{n}{k}=$ Anzahl der k-Teilmengen von $A, b \in A$

$$\binom{A}{k} = \{X \in A | b \notin X, |X| = k\} \dot\cup \underbrace{\{X \subseteq A | b \in X, |X| = k\}}_{=:M} = \binom{A \backslash \{b\}}{k} \dot\cup M$$

$$\begin{array}{c} M \to \binom{A\backslash\{b\}}{k-1} \\ X \mapsto X \backslash \{b\} \end{array} \text{ ist Bijektion}$$

$$\left|\binom{A}{k}\right| = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

2.) $|A| = m+n, A = B \dot\cup C, |B| = m, |C| = n$

$$\binom{A}{k}_l = \{X \subseteq A | |X| = k, |X \cap B| = l\}, l = 0, 1, \ldots, k$$

$$\binom{A}{k} = \bigcup_{l=0}^{k} \binom{A}{k}_l$$

$$\binom{m+n}{k} = \left|\binom{A}{k}\right| = \sum_{l=0}^{k} \underbrace{\left|\binom{A}{k}_l\right|}_{\binom{m}{l}\binom{n}{k-l}}$$

(20.04.01)

$|M| = n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, \ldots\}$
$\binom{M}{k} = A \subseteq M | |A| = k = \emptyset$ für $k > n, k < 0$
$\left|\binom{M}{k}\right| = \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$ für $k \geq 0$
$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$ für $n \geq k \geq 0$

Lemma 4:

a) [Doppeltes Abzählen] Ist $R \subseteq M \times N$, so ist

$$|R| = \sum_{a \in M} |\{b \in N | (a,b) \in R\}| = \sum_{b \in N} |a \in M | (a,b) \in R|$$

b) [Schubfachprinzip] $|M| > |N|$, Ist $f : M \to N$, so ist f nicht injektiv, d.h. $\exists\, b \in N$ mit $|f^{-1}(b)| = |\{a \in M | f(a) = b\}| > 1$

c) [Inklusions-Exklusions-Prinzip] $A_1, \ldots, A_n \subseteq M$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i_1 < i_2} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| + \sum_{i_1 < i_2 < i_3} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}| \ldots$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}|$$

Beweis zu 3.): $A \subseteq M, \chi_A : M \to \{0,1\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

$$|A| = \sum_{x \in M} \chi_A(x)$$

$$\chi_{A_1\cup\ldots\cup A_n}(x)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\sum_{1\le i_1<\ldots<i_j\le n}\chi_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_j}}(x) \tag{1.1}$$

Daraus folgt Beh. durch Summation über M
Ist i) $x\notin A_1\cup\ldots\cup A_n$, so ist: Linke Seite von (1.1) = 0, Rechte Seite = 0
ii) $x\in A_1\cup\ldots\cup A_n$, so ist: Linke Seite = 1
x liege in genau k Teilmengen $(k\ge 1) A_1,\ldots,A_n$, d.h.

$$x\in A_{j_1}\cap\ldots\cap A_{j_k}, j_1<\ldots<j_k$$

dann ist

$$\chi_{A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_j}}(x)=1\Leftrightarrow\{i_1,\ldots,i_j\}\le\{j_1,\ldots,j_k\}$$

$$\text{Rechte Seite }=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\binom{k}{j}=1-\underbrace{\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}}_{(1-1)^k}=1$$

1.2 Partition

Definition: Eine Partition P von M (Menge) ist eine Zerlegung von M in eine Vereinigung von disjunkten, nichtleeren Teilmengen ("Blöcke" genannt). Genauer:

$P=\{A_1,\ldots,A_k\}$ Partition von M , wenn $M=A_1\dot\cup\ldots\dot\cup A_k$ und $A_i\neq\emptyset$ für $i=1,\ldots,k$

$Part_k(M):=\{P|P \text{ ist Partition von } M \text{ , } |P|=k\}$ Menge der k-Partitionen von M

$S_{n,k}=|Part_k(M)|$ falls $|M|=n$ und $n,k\ge 0$ "Stirling-Zahlen 2. Art"

$S_{0,0}=1$

Beispiele: $S_{n,0}=0$, $n\ge 1$
$S_{n,1}=1$, $n\ge 1$
$S_{n,k}=0$, $k>n$
$S_{n,n}=1$
$S_{n,n-1}=\binom{n}{2}$

Satz 1: Es gilt für $1\le k\le n$

$$S_{n,k}=S_{n-1,k_1}+k\cdot S_{n-1,k}$$

(25.04.01)

(Wiederholung)

M endliche Menge, $|M|=n>0$
$Part_k(M)=\{P=\{A_1,\ldots,A_k|\emptyset\neq A_i\subseteq M, M=A_1\dot\cup\ldots\dot\cup A_k\}\}$
$Part_1(M)=\{\{M\}\}$
$Part_2\{1,2,3,4\}=\{\{\{1\},\{2,3,4\}\},\{\{2\},\{\{1,3,4\}\},\{\{3\},\{1,2,4\}\},\{\{4\},\{1,2,3\}\},$
$\{\{1,2\},\{3,4\}\},\{\{1,3\},\{2,4\}\},\{\{1,4\},\{2,3\}\}\}$
$Part_2(M)=\{\{A,M\backslash A\}|\emptyset\neq A\subset M, A\neq M\}, |Part_2(M)|=\frac{1}{2}(2^n-2)=2^{n-1}-1$
$S_{n,k}=|Part_k(M)|$ für $|M|=n$ "Stirlingzahlen 2. Art"

Satz 1: Für $n\ge k\ge 1$ gilt:

$$S_{n,k}=S_{n-1,k-1}+k\cdot S_{n-1,k}$$

(Ende Wiederholung)

Beweis: $a \in M, |M| = n \geq 1, Part_k(M) = X_1 \dot\cup X_2$, wobei

$$X_1 = \{P \in Part_k(M) | \{a\} \notin P\}, X_2 = \{P \in Part_k(M) | \{a\} \in P\}$$

$$\Rightarrow X_2 = \{P = \{\{a\}, B_1, \ldots, B_{k-1}\} | \{B_1, \ldots, B_{k-1}\} \in Part_{k-1}(M \backslash a)\}$$

$$\Rightarrow |X_2| = S_{n-1,k-1}$$

Ist $P \in X_1$, dann erhält man durch Löschen von a eine Partition $\{B_1, \ldots, B_k\}$ von M $\backslash a$. Umgekehrt erhalten wir zu jedem $\{B_1, \ldots, B_k\} \in Part_k(M \backslash a)$ genau k verschiedene Partitionen aus X, nämlich $\{\{a\}, B_1, B_2, \ldots, B_k\}, \ldots, \{B_1, B_2, \ldots, B_k \cup \{a\}\}$
$|X_1| = k \cdot S_{n-1,k}$ Bez. bei Knuth: $S_{n,k} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$

Bem:

a) {Partitionen von M} $\leftrightarrow$ {Äquivalenzrelationen auf M} (Bijektion)

b) Ist $f : M \to N$ eine surjektive Abbildung, d.h.

$$b \in N, f^{-1}(b) = \{a \in M | f(a) = b\} \neq 0$$

$$\Rightarrow M = \dot{\bigcup_{b \in N}} f^{-1}(b), P_f = \{f^{-1}(b) | b \in N\} \in Part_{|N|} M$$

Satz 2: Ist $|M| = m$ und $|N| = n$, dann gilt:

a) $|Abb(M, N)| = |N^M| = n^m$

b) $|\underbrace{Inj(M, N)}_{\text{Menge aller inj. Abb.}}| = n^{\underline{m}} = n(n-1)\ldots(n-m+1)$ "n hoch m fallend"

c) $|\underbrace{Surj(M, N)}_{\text{Surj. Abb.}}| = n! S_{m,n}$

Beweis:

a) s. Kapitel 1.1

b) $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$ Jede Abb. $f : M \to N$ ist gegeben durch $\begin{matrix} f(a_1) = b_1 \in N \\ \vdots \\ f(a_m) = b_m \in N \end{matrix}$

f injektiv $\Leftrightarrow b_i \neq b_j$ für $i \neq j$

Für b_1 gibt es n Möglichkeiten	$b_1 \in N$
Für b_2 gibt es $n-1$ Möglichkeiten	$b_2 \in N \backslash \{b_1\}$
$\vdots$	$\vdots$
Für b_m gibt es $n-m+1$ Möglichkeiten	$b_m \in N \backslash \{b_1, \ldots, b_{m-1}\}$

c) $f : M \to N$ surjektiv

$$P_f = \{f^{-1}(b) | b \in N\} \in Part_n(M)$$

$$= \{A_1, \ldots, A_n\}$$

$$P_f = P_g \Leftrightarrow g = \sigma \cdot f \text{ mit } \sigma \in S_n \text{ (orig.: } SymN\text{)}$$

$$|Surj(M,N)| = S_{m,n} \cdot n!$$

Beispiel: $Surj(\underbrace{\{1,2,3\}}_{M}, \underbrace{\{1,2\}}_{N})$

$$|Surj(M,N)| = S_{3,2} \cdot 2! = 6$$

Bemerkung:

$$Abb(M,N) = \bigcup_{A \subseteq N} Surj(M,A)$$

f kann man auffassen als surj. Abb.

$$f : M \to Bild(f) = \{\underbrace{f(a)}_{\in N} | a \in M\} \subseteq N$$

$$n^m = |Abb(M,N)| = \sum_{A \subseteq N} |Surj(M,A)| = \sum_{k=0}^{n} \sum_{A \in \binom{N}{k}} |Surj(M,A)|$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! S_{m,k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^{\underline{k}}}{k!} k! S_{m,k}$$

Satz 3: $n^m = \sum_{k=0}^{n} n^{\underline{k}} S_{m,k}$ für $m, n \in \mathbb{N}$

1.3 Permutationen

$$S_n = Sym(\underline{n}) = \{\sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} | \sigma bij.\}$$

$$|S_n| = n!$$

Jedes $\sigma \in S_n$ kann durch eine Wertetabelle angegeben werden, z.B.:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 4 & 3 & 7 & 2 & 9 & 1 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Bemerkung: $(S_n, \circ)$ ist eine Gruppe.

$$\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$$

$$\sigma_1 \circ \sigma_2 : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} : x \mapsto \sigma_1(\sigma_2(x))$$

$$\sigma^2 = \sigma \circ \sigma$$

Definition: Ein k-Zyklus $(i_1,\dots,i_k) = \sigma \in S_n$ ist eine Permutation mit folgender Eigenschaft:

$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{k-1}) = i_k, \sigma(i_k) = i_1$ und $\sigma(i) = i$, falls $i \notin \{i_1,\dots,i_k\}$

$$\text{mit } \{i_1,\dots,i_k\} \in \{1,\dots,n\}$$

Beispiel: σ wie im Beipiel oben:

$$\sigma = (142376) \circ (59)(8)$$

(8) kann auch weggelassen werden

Bemerkung: Jedes $\sigma \in S_n$ lässt sich als Produkt von Zyklen schreiben.

Beispiel:

$$S_3 = \{\underbrace{(1)(2)(3)}_{id}, (1)(23), (2)(13), (3)(12), (123), (132)\}$$

Definition: Die Stirling-Zahlen $s_{n,k}$ 1. Art geben die Anzahl der Permutationen von {1,..., n} an, die genau k (disjunkte) Zyklen haben, z.B.: $s_{3,1} = 2, s_{3,2} = 3, s_{3,3} = 1$

(27.04.01)

Definition: Ein r-Zyklus $\zeta = (i_1, \ldots, i_r)$ ist eine Permutation $\zeta = s_n$ mit "Ziffernmenge" $Z(\zeta) = \{i_1, \ldots, i_r\}$ mit $|Z(\zeta)| = r$ und $\zeta(i_1) = i_2, \zeta(i_2) = i_3, \ldots, \zeta(i_r) = i_1$ und $\zeta(i) = i f\ddot{u}r i \notin Z(\zeta)$

$$Perm_k(\underline{n}) = \{\sigma \in s_n | \sigma = \zeta_1 \circ \ldots \circ \zeta_k \text{ mit } Z(\zeta_1) \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} Z(\zeta_k) = \{1, \ldots, n\} = \underline{n}\}$$

Bemerkung:

a)

$$(i_1 \ldots\ i_r) = (i_2 \ldots\ i_r i_1) = \ldots\ = (i_r i_1 \ldots\ i_{r-1})$$

$$(1234) = (2341) = (3412) = (4123)$$

b) ζ_1, ζ_2 disjunkt, d. h. $Z(\zeta_1) \cap Z(\zeta_2) = \emptyset \Rightarrow \zeta_1 \circ \zeta_2 = \zeta_2 \circ \zeta_1$ z.B.:

$$\begin{array}{ccc} (12) \circ (34) & = & (34) \circ (12) \\ (12) \circ (23) & \neq & (23) \circ (12) \\ = & & = \\ (123) & & (132) \end{array}$$

Definition:

$$s_{n,k} = |Perm_k(\underline{n})| \text{ mit } n, k \geq 1 \text{ , "Stirling-Zahlen 1. Art"}$$

$$s_{0,0} = 1, s_{o,k} = 0 \text{ für } k > 0$$

Lemma 1:

a) $s_{n,k} = 0$ für $k > n$

b) $s_{n,n} = 1$ für $n \in \mathbb{N}_0$

c) $s_{n,1} = (n-1)!$

denn: zu 2.) $Perm_n(\underline{n}) = \{(1) \circ (2) \circ \ldots \circ (n) = id\}$
zu 3.) $Perm_1(\underline{n}) = \{(ni_2 \ldots i_n) | |\{i_2, \ldots, i_n\}| = n-1\}$ $|Perm_1(\underline{n})| = (n-1)!$

Satz 1: Für $n, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$$

Beweis:

$$X = Perm_k(\underline{n}) = X_1 \dot{\bigcup} X_2 \text{ , für } n \geq 1$$

$$X_1 = \{\sigma \in X | \sigma(n) = n\} = \{sigma = (n) \circ \zeta_1 \circ \ldots \circ \zeta_{k-1} | \zeta_1 \circ \ldots \circ \zeta_{k-1} \in Perm_{k-1}(\underline{n-1})\}$$

$$|X_1| = s_{n-1,k-1}$$

$$X_2 = \{\sigma \in X | \sigma(n) \notin n\}$$

Jedes $\sigma \in X_2$ liefert durch Streichen von n eine Permutation

$$\tau = \underbrace{(i_1 \ldots i_r) \circ (i_{r_1+1} \ldots i_{r1+r_2}) \circ \ldots \circ (i_{r_1+r_{k-1}+1} \ldots i_{n-1})}_{\text{k-Zyklen der Länge } r_1, r_2 \ldots r_k \in Perm_k(\underline{n-1})}$$

Umgekehrt liefert jedes solche $\tau \in Perm_k(\underline{n-1})$ genau n - 1 Elemente r aus X_2, indem wir vor

$$\begin{array}{cccl} i_1 & n \quad einfügen & \Rightarrow & (ni_1 \ldots i_{r_1}) \circ (i_{r_1+1} \ldots) \ldots \\ i_2 & n \quad einfügen & \Rightarrow & (i_1 n \ldots i_{r_1}) \circ (i_{r_1+1} \ldots) \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ i_{n-1} & n \quad einfügen & \vdots & \vdots \end{array}$$

$$|X_2| = (n-1)|Perm_k(\underline{n-1})| = (n-1)s_{n-1,k}$$

Beispiel:

$$Perm_3(\underline{4}) = \{(12)(3)(4), (13)(2)(4), (14)(2)(3), (23)(1)(4), (24)(1)(3), (34)(1)(2)\}$$

$$n = 4, X_1 = \{(12)(3)(4), (13)(2)(4), (23)(1)(4)\}$$

$$\sigma \in X_2 \text{ liefert } (1)(2)(3) = (2)(1)(3) = (3)(1)(2)$$

$$\text{Umgekehrt } \tau = (1)(2)(3) \text{ liefert durch Einsetzen der } 4:$$

$$(41)(2)(3) = (14)(2)(3), (1)(42)(3) = (24)(1)(3), (1)(2)(43) = (34)(1)(2)$$

Bei der Komplexitätsanalyse von Algorithmen entstehen oft Rekursionsgleichungen, z.B.

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, a_0 = x, a_1 = y$$

Um solche Rekursionen explizit zu lösen, brauchen wir

1.4 Formale Potenzreihen (erzeugende Funktionen)

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ ,,formaler Ausdruck'' , x = ,,Unbestimmte''}$$

Sei K ein Körper z.B. $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2$

Definition:

$$K[[x]] := \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n | a_n \in K \right\} \text{ und } \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$$

$$x^n := (a_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \text{ mit } a_j = \begin{cases} 1 & j = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, n \in \mathbb{N}_0$$

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n x^n := (b_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \text{ mit } b_j = \begin{cases} a_j & j \geq m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$k \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn} := (b_j)_{j\in\mathbb{N}_0} \text{ mit } b_j = \begin{cases} a_n & j \neq kn \text{ für ein } n \in \mathbb{N}_0 \\ 0 & j \neq kn \end{cases}$$

Warnung:

a)

$$A = A(x) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{\text{ist keine Summe!}} \quad \in K[[x]]$$

Es gibt keine unendlichen Summen!

b) In eine formale Potenzreihe A kann man i. Allg. nichts einsetzen

(02.05.01)

Sei K ein Körper (z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{F}_2$)

$$K[[x]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n | a_n \in K \right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \quad \begin{array}{c} \text{formale Potenzreihe (in X)} \\ \text{erzeugende Funktion der Folge } (a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \end{array}$$

[zum Vergleich: $1,125 = \frac{9}{8} \in \mathbb{Q}$]

$$x^m = (\delta_{m,n})_{n\in\mathbb{N}_0} \text{ mit } \delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{,,Kronecker-Symbol''}$$

Satz 1: Definiert man

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n := \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

und für $a \in K$

$$a \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n := \sum_{n=0}^{\infty} (a \cdot a_n) x^n$$

, so wird $K[[x]]$ ein K-Vektorraum.

Beweis: s. LA I

Satz 2: Definiert man (zusätzlich zum + in Satz 1)

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j \right) := \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k}^{\infty} a_i b_j \right) x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{k-i} \right) x^k$$

, so ist $(K[[x]], +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit Eins, d.h.

- (A1)(*) (A + B) + C = A + (B + C)
- (A2)(*) A + B = B + A
- (A3) Es gibt 0(= 0 $\cdot x^0$) mit 0 + A = A für alle A $\in K[[x]]$
- (A4) Zu A $\in K[[x]]$ existiert -A $\in K[[x]]$ mit A + -A = 0
- (M1)(*) (A $\cdot$ B) $\cdot$ C = A $\cdot$ (B $\cdot$ C)
- (M2)(*) A $\cdot$ B = B $\cdot$ A
- (M3) Es gibt 1 $\in K[[x]]$ mit 1 $\cdot$ A = A für alle A $\in K[[x]]$
- (M4)(*) Es gilt A $\cdot$ (B + C) = (A $\cdot$ B) + (A $\cdot$ C)

(*) Für alle A, B, C $\in K[[x]]$

Beweis: Durch Nachrechnen

Eins-Element ist $1 \cdot x^0 = 1$

Allgemeiner gilt:

Lemma 1:

$$x^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^n$$

In der ,,Folgensprache" bedeutet dies

$$x^m \cdot (a_0, a_1, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, a_0, a_1, \ldots)$$

Multiplikation mit x^m bewirkt ,,Verschieben" der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ um m Stellen nach rechts.

Beweis:

$$x^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{i=0}^{k} \underbrace{\delta_{m,i} a_{k-i}}_{=0 \text{ für } i \neq m \text{ , insbes. wenn } i \leq k \leq m} \right)}_{=0 \text{ falls } k<m \quad =a_{k-m} \text{ falls } k \geq m} x^k \text{ , mit } x^m = (\delta_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} a_{n-m} x^n$$

Folgerung: $x^m x^n = x^{m+n}$

Beispiel:

$$(1 - cx) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i \text{ für } c \in K$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i - cx \sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i - c \cdot \sum_{i=1}^{\infty} c^{i-1} x^i$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i - \sum_{i=1}^{\infty} c^i x^i = c^0 x^0 + \sum_{i=1}^{\infty} c^i x^i - \sum_{i=1}^{\infty} c^i x^i = 1$$

Bemerkung und Definition: Ist in einem komm. Ring mit Eins $A \cdot B = 1$, so ist B durch A eindeutig bestimmt und wird mit $B = A^{-1} = \frac{1}{A}$ bezeichnet (Ebenso ist $A = B^{-1} = \frac{1}{B}$) und A (und auch B) heissen invertierbar.

Beweis: Ist $A \cdot B = 1$ und $A \cdot C = 1$, so folgt

$$C = C \cdot 1 = C \cdot (A \cdot B) = (A \cdot C) \cdot B = 1 \cdot B = B$$

Beispiel: In $\mathbb{Z}$ sind nur 1 und -1 invertierbar.

Folgerung: In $K[[x]]$ ist $\sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i$ für $c \in K$ invertierbar und

$$\sum_{i=0}^{\infty} c^i x^i = \frac{1}{1-cx}$$

[Frage: Ist $\frac{1}{1-cx}$ eine formale Potenzreihe? Gegenfrage: Ist $\frac{1}{0{,}5} \in \mathbb{Z}$?]

Beispiel: Code mit variabler Wortlänge (zum Komprimieren von Daten, z.B. „compress", „gzip")
Bu = {a, b, c} , Zi = {0, 1}
W_k ={Folgen aus $0 < i < k$ Buchstaben gefolgt von $k-i$ Ziffern} , $k \in \mathbb{N}$

$$Co_n = \bigcup_{k=2}^{n} W_k \text{ , z.B. } aa1|bc0001|ac1$$

$$w_k = |W_k| = \sum_{i=1}^{k-1} 3^i 2^{k-i} = \underbrace{\sum_{i=0}^{k} 3^i 2^{k-i}}_{c_k} - 2^k - 3^k$$

Behauptung: $c_k = 3^{k+1} - 2^{k+1}$

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \left(\sum_{i=0}^{\infty} 3^i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} 2^j x^j\right)$$

$$= \frac{1}{1-3x} \cdot \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{(1-3x)(1-2x)}$$

$$\text{Ansatz: } = \frac{\alpha}{1-3x} + \frac{\beta}{1-2x} = \frac{\alpha(1-2x) + \beta(1-3x)}{(1-3x)(1-2x)}$$

$$\Rightarrow \alpha(1-2x) + \beta(1-3x) = 1 \Rightarrow \begin{array}{rl} \alpha + \beta & = 1 \\ -2\alpha - 3\beta & = 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rr} \alpha = & 3 \\ \beta = & -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow C = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \frac{3}{1-3x} - \frac{2}{1-2x}$$

$$C = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = 3 \sum_{i=0}^{\infty} B^i x^i - 2 \sum_{i=0}^{\infty} 2^i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{(3^{i+1} - 2^{i+1})}_{=c_i} x^i$$

Satz 3:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[[x]] \text{ ist invertierbar } \Leftrightarrow a_0 \neq 0$$

Beweis:

$$A \text{ invertierbar } \Leftrightarrow \text{ Es gibt } B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \text{ und } A \cdot B = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rl} a_0 b_0 = 1 & k = 0 \\ a_1 b_0 + a_0 b_1 = 0 & k = 1 \\ a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2 = 0 & k = 2 \end{array}$$

Ist B invertierbar, so muss $a_0 \neq 0$ sein, sonst ist die Gleichung für $k = 0$ nicht erfüllbar.
Umgekehrt ist $a_0 \neq 0$, so definiere $b_o = a_0^{-1} \in K$ und $b_n = \frac{1}{a_0}(-a_1 b_{n-1} - \ldots - a_n b_0)$ rekursiv.

(04.05.01)

(Wiederholung)

$$K[[x]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n | a_n \in K \right\} \text{ ,,formale Potenzreihen''}$$

$$K[x] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n | a_n \in K \text{ und } a_n \neq 0 \text{ nur für endlich viele n} \right\}$$

$$= \left\{ \sum_{n=0}^{r} a_n x^n | a_n \in K, r \in \mathbb{N}_0 \right\} \text{ ,,Polynomring''}$$

- In $K[x]$ gibt es ,,Einsetzungshomophismen", dagegen: Ist $A \in K[[x]]$, so kann man in A i. Allg. nichts einsetzen.
- In K[x] sind nur die Polynome vom Grad = 0 invertierbar, dagegen:

Satz 3:

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[[x]] \text{ ist invertierbar } \Leftrightarrow a_0 \neq 0$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} \right) x^n = 1 = 1 \cdot x^0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i} = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $(b_0, b_1, b_2, \ldots)$ Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rl} a_0 x_0 & = 1 \\ a_1 x_0 + a_0 x_1 & = 0 \\ a_2 x_0 + a_1 x_1 + a_0 x_2 & = 0 \end{array}$$

usw.
lösbar $\Leftrightarrow a_0 \neq 0$

(Ende Wiederholung)

Beispiel: $a_0 = 1, a_1 = -c \in K, a_2 = a_3 = \ldots = 0, A = 1 - cx$

$$\begin{array}{rlcl} 1 \cdot x_0 & = 1 & \Leftrightarrow & x_0 = 1 \\ -cx_0 + x_1 & = 0 & \Leftrightarrow & x_1 = c \\ -cx_1 + x_2 & = 0 & \Leftrightarrow & x_2 = c^2 \\ \vdots & & \vdots & x_n = c^n \end{array}$$

Folgerung 1:

$$\frac{1}{1-cx} = \sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n \text{ ,,Geometrische Reihe''}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n\right)^{-1} = (1-cx)$$

Beispiel:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} c^i c^{n-i}\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n} c^n\right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c^n x^n$$

$$\text{Linke Seite } = \left(\frac{1}{1-cx}\right)^2 = \frac{1}{(1-cx)^2}$$

Folgerung 2:

$$\frac{1}{(1-cx)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c^n x^n$$

Allgemeiner:

$$\frac{1}{(1-cx)^m} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m-1}{m-1} c^n x^n$$

Beweis: Übung

Definition: Die Abbildung

$$D : K[[x]] \to K[[x]] : \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \mapsto \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$$

heisst ,,formale Ableitung''.

Lemma 2:$D : K[[x]] \to K[[x]]$ ist K-linear und es gilt

a) $D(x^n) = nx^{n-1}$

b) $D(A \cdot B) = A \cdot D(B) + D(A) \cdot B$

Beweis: Nachrechnen

Folgerung 3: Ist $A \in K[[x]]$ invertierbar, so mit $D(A^{-1}) = -\frac{D(A)}{A^2}$

Beweis: $A \cdot A^{-1} = 1, D(1) = 0$

$$0 = D(A \cdot A^{-1}) = A \cdot D(A^{-1}) + D(A) \cdot A^{-1} \text{ nach Lemma 2 (2)}$$

$$-D(A) \cdot A^{-1} = A \cdot D(A^{-1})$$

Beispiel:

$$A = 1 - cx \in K[[x]], A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} c^n x^n$$

$$D(A^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c^{n+1}x^n, D(A) = -c$$

$$\stackrel{Folg.}{=} -\frac{D(A)}{A^2} = \frac{c}{(1-cx)^2}, \text{ œ } c \neq 0$$

$$\frac{1}{(1-cx)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c^n x^n = c^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)c^{n+1}x^n$$

$\Rightarrow$ neuer Beweis der Folgerung

1.5 Lösen von Rekursionsgleichungen

Beispiel: Die Fibonacci-Zahlen F_n sind (für $n \in \mathbb{N}_0$) so definiert

$$F_0 = 0, F_1 = 1$$

$$(*) F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ für alle } n \geq 2$$

$$\text{z.B. } F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, \dots$$

$$\begin{aligned}
\text{Sei } F = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n &= F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_n x^n \\
&\overset{(*)}{=} F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (F_{n-1} + F_{n-2}) x^n \\
&= F_0 + F_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-1} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} F_{n-2} x^n \\
&= F_0 + F_1 x + x \cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n}_{=F - F_0 x^0} + x^2 \cdot \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n}_{=F} \\
&= F_0 + F_1 x + x \cdot F + x^2 \cdot F - F_0 x^0 x \\
\Rightarrow F &= x + xF + x^2 F \\
F(1 - x - x^2) &= x \\
F &= \frac{x}{1 - x - x^2}
\end{aligned}$$

Sei K $= \mathbb{C}$, suche $\alpha, \beta \in K$ und $a, b \in K$, so dass

$$\frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{a}{1 - \alpha x} + \frac{b}{1 - \beta x}$$

dann folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = F = a \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n x^n + b \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a\alpha^n + b\beta^n) x^n$$

$$F_n = a\alpha^n + b\beta^n$$

(09.05.01)

(Wiederholung)

Fibonacci-Zahlen

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

$$F = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n$$

$$F = \frac{x}{1 - x - x^2} = \frac{a}{1 - \alpha x} + \frac{b}{1 - \beta x}, a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$F_n = a\alpha^n + b\beta^n$$

(Ende Wiederholung)

Satz 1:(Partial-Bruchzerlegung)

K sei ein Körper, $g = (1-\alpha_1 x)^{m_1} \dots (1-\alpha_r x)^{m_r} \in K[x]$ mit $\alpha_i \neq 0$ für alle i

$$f \in K[x], Grad\ f < Grad\ g$$

Dann gibt es $f_i \in K[x] Grad\ f_i < m_i$ mit

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{(1-\alpha_1 x)^{m_1}} + \dots + \frac{f_r}{(1-\alpha_r x)^{m_r}}$$

$$\frac{f_i}{(1-\alpha_i x)^{m_i}} = \frac{a_{i1}}{1-\alpha_i x} + \frac{a_{i2}}{(1-\alpha_i x)^2} + \dots + \frac{a_{im_i}}{(1-\alpha_i x)^{m_i}}$$

Beweis: s. Alg. Strukturen

Bemerkung: Ist g wie in Satz 1, so sind die $(\alpha_i)^{-1}$ Nullstellen von g.

Definition: Ist

$$g = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \text{ mit } a_n \neq 0,$$

so sei

$$g^R = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} x^i$$

das reflektierte Polynom.

Beispiel: $g = 1 + 2x + 3x^2 \Rightarrow g^R = x^2 + 2x + 3$

Lemma 1: Es gilt $g(\alpha) = 0$ mit $\alpha \neq 0 \Leftrightarrow g^R(\alpha^{-1}) = 0$

Beweis: Sei $\alpha \neq 0$ in K

$$0 = g(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i \Rightarrow 0 = \alpha^{-n} g(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^{i-n} \text{ , setze: } j = n - i \Leftrightarrow i = n - j$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \alpha^{-j}$$

$$\Leftrightarrow 0 = g^R(\alpha^{-1})$$

Bemerkung: $g^R(x) = x^n g(x^{-1})$

Satz 2: („Fundamentalsatz der Algebra") Ist

$$g = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}[x], a_n \neq 0,$$

so gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit

$$g = a_n (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$$

(ohne Beweis)

Folgerung: Ist
$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathbb{C}[x], a_n \neq 0, a_0 \neq 0,$$
so gibt es $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ mit
$$f = a_0(1-\alpha_1 x)\dots(1-\alpha_n x),$$
denn nach Satz 2 ist
$$f^R = a_0(x-\alpha_1)\dots(x-\alpha_n)$$
$$\Rightarrow f = \left(f^R\right)^R = x^n(\frac{1}{x}-\alpha_1)\dots(\frac{1}{x}-\alpha_n) = (1-\alpha_1 x)\dots(1-\alpha_n x)$$

Fortsetzung des Beispiels
$$F = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{f}{g}$$
$$g^R = x^2 - x - 1 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)$$
$$\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$
α_1 heisst ,,Der Goldene Schnitt"
$$g = (1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x), \frac{f}{g} = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a}{1-\alpha_1 x} + \frac{b}{1-\alpha_2 x}$$
mit $a, b \in \mathbb{C}$ ex. nach Satz 1
$$\frac{x}{1-x-x^2} = \frac{a(1-\alpha_2 x) + b(1-\alpha_2 x)}{(1-\alpha_1 x)(1-\alpha_2 x)}$$
$$x = a + b - (a\alpha_2 + b\alpha_1)x$$
$$a + b = 0 \Rightarrow b = -a$$
$$a\alpha_2 - b\alpha_1 = -1 \Rightarrow a\alpha_2 + a\alpha_1 = -1$$
$$\Rightarrow a = \frac{-1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{5}}, b = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$
$$F_n = a\alpha_1^n + b\alpha_2^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$
n ungerade:
$$F_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\rfloor$$

Verfahren zum Lösen von linearen Rekursionen (mit konstanten Koeffizienten)

Gegeben: $a_n = c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}, n \geq k$ mit gegebenen $c_i \in \mathbb{C}$
und Anfangsbedingung: $a_i = b_i$ für $i = 0, 1, \dots k-1, b_i \in \mathbb{C}$ gegeben.
$$A := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{i=0}^{k-1} a_i x^i + \sum_{n=k}^{\infty} (c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k}) x^n$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} b_i x^i + c_1 x \left(A - \sum_{i=0}^{k-2} b_i x^i\right) + c_2 x^2 \left(A - \sum_{i=0}^{k-2} b_i x^i\right) + \dots + c_k x^k A$$

Auflöesen nach A:

$$A = \frac{f}{1 - c_1 x - \ldots - c_k x^k} = \frac{f}{g}$$

mit

$$f = b_0 + (b_1 - c_1 b_0)x + \ldots + (b_{k-1} - c_1 b_{k-2} - \ldots - c_{k-1} b_0)x^{k-1}$$

Partialbruchzerlegung:

$$A = \sum_{i=1}^{r} \frac{f_i}{(1 - \alpha_i x)^{m_i}} \text{ mit } f_i = \sum_{j=0}^{m_i - 1} f_{ij} x^j$$

$$A = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{m_i - 1} f_{ij} \sum_{n=j}^{\infty} \binom{n+m-1}{n} \alpha_i^{n-j} x^n$$

Bemerkung: Die α_i im Verfahren erhält man als Nullstelle des reflektierten Polynoms

$$g^R = x^k - c_1 x^{k-1} - \ldots - c_{k-1} x - c_k$$

Die f_{ij} kann man durch die Anfangsbestimmungen bestimmen.

Beispiel:

$$a_n = a_{n-1} = a_{n-2}, g = 1 - x - x^2$$

$$g^R = x^2 - x - 1 = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2), \alpha_1 \neq \alpha 2$$

$$a_n = a\alpha^n + b\beta^n$$

$$n = 0 : a_0 = 0 = a + b$$

$$n = 1 : a_1 = 1 = a\alpha + b\beta$$

Beispiel:$\mathcal{C}_n = \{$ zulässige Klammerungen mit $2n$ Klammern $\}$

$$c_n = |\mathcal{C}_n|, c_0 = 1, c_1 = 1, c_2 = 2[\mathcal{C}_2 = \{(()), ()()\}]$$

$$c_3 = 5, c_n = \text{ n-te Catalan-Zahl}$$

$\mathcal{C}_n^{(k)} = \{$ Zeichenketten (aus $\mathcal{C}_n$, bei der die 1. Klammer an der Position 2k geschlossen wird$\}$

$$\mathcal{C}_n = \dot{\bigcup_{k=1}^{n}} \mathcal{C}_n^{(k)}, |\mathcal{C}_n| = c_n = \sum_{k=1}^{n} c_{k-1} c_{n-k} \text{ für } n \geq 1$$

$$C = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} c_{k-1} c_{n-k} \right) x^n = 1 + (xC)C$$

$$C = 1 + xC^2$$

$$x^2 C^2 - xC + x = 0$$

$$x^2 C^2 - xC + \frac{1}{4} = -x + \frac{1}{4}$$

$$\left(xC - \frac{1}{2} \right)^2 = -x + \frac{1}{4}$$

$$xC - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{-x + \frac{1}{4}}$$

$$xC = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4x} \right)$$

Satz 3: Ist K ein Körper mit $1+1 \neq 0$ (d.h. $charK \neq 0$) gibt es zu $0 \neq A = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x_i$ ein $B = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ mit $B^2 = A$ genau dann, wenn a_0 in K ein Quadrat ist.

(11.05.01)

Satz 3:(Wiederholung) ...gibt es zu $0 \neq A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in K[[x]]$ ein $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \in K[[x]]$ mit $B^2 = A$ genau dann, wenn es ein $b_0 \neq 0$ gibt mit $b^2 = a_0 (\neq 0)$

Beweis:

$$B^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} \right) x^n = A \ \Leftrightarrow \ \sum_{k=0}^{n} b_k b_{n-k} = a_n \text{ für alle } n \in \{0, \dots, n\}$$

Also:

$$\begin{array}{rll} b_0^2 & = a_0 & b_0 = \pm b (\neq 0) \\ b_0 b_1 + b_1 b_0 = 2 b_0 b_1 & = a_1 & b_1 = \frac{1}{2b_0} a_1 \\ b_0 b_2 + b_1 b_1 + b_2 b_0 & = a_2 & b_2 = (a_2 - b_1^2) \cdot \frac{1}{2b_0} \end{array}$$

Ist also $a_0 \neq 0$ und $a_0 = b^2$, so definiere induktiv

$$b_0 = b, b_n = \left(a_n - \sum_{k=1}^{n-1} b_k b_{n-k} \right) \cdot \frac{1}{2b_0}$$

Dann ist $B^2 = A$.
Umkehrung ist klar.
Im Beispiel war $B \in K[[x]]$ und $B^2 = 1 - 4x \Rightarrow B = (1-4x)^{\frac{1}{2}}$

1.6 Die Polynommethode

Satz 1: Ist K ein Körper und $0 \neq f \in K[x]$ (also $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^b, a_n \neq 0$), so hat f höchstens n Nullstellen.

Beweis: s. LA I

Folgerung: Ist

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, g = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i \in K[x]$$

und ist

$$f(\alpha_i) = g(\alpha_i) \text{ für alle } \alpha_i \in M \subseteq K \text{ mit } |M| \geq n+1,$$

so gilt $f = g$, d.h. $a_i = b_i$ für alle $i = 0, \dots, n$.

Beweis: folgt aus Satz 1; betrachte $f - g$, $Grad(f-g) \leq n$, also $f - g = 0$

Im folgenden sei K ein Körper mit $\mathbb{Q} \leq K$
Definition:

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)\dots(x-n+1) \in K[x]$$

$$\binom{x}{n} = \frac{1}{n!} x^{\underline{n}} \in K[x]$$

[Beachte: $n! \neq 0, x^{\underline{n}} = 1, \binom{x}{k} = 1$]

Beispiel:

$$\binom{x}{1} = x, \binom{x}{2} = \frac{1}{2} x(x-1)$$

In 1.2 Satz 3
$$m^n = \sum_{k=0}^{m} S_{n,k} m^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} m^{\underline{k}} \tag{1.2}$$
$S_{n,k}$ Stirling-Zahlen 2.Art
für $n \geq k > m$ gilt $m^{\underline{k}} = m(m-1) \ldots \cdot 1 \cdot 0(\cdot - 1 \cdot \ldots) = 0$
für $n < k \leq m$ gilt $S_{n,k} = 0$
Setze
$$f = x^n, g = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}$$
$\Rightarrow f(m) = g(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$ wegen 1.2

Satz 2: Ist $\mathbb{Q} \leq K$ Körper, so gilt

a)
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}$$

b)
$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} x^k \text{ , wobei } s_{n,k} \text{ Stirlingzahlen 1.Art}$$

Beweis: von 1.: s.o., benutze Satz 1
von 2.: Induktion: Übung, benutze $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$

Bemerkung: $(x^n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(x^{\underline{n}})_{n \in \mathbb{N}_0}$ sind K-Basen des K-Vektorraums $K[x]$ und $[S_{n,k}]_{n,k \in \mathbb{N}_0}$ und $[(-1)^{n-k} s_{n,k}]$ sind Basiswechselmatrizen, also invers zueinander.

In 1.1 Satz 1
$$\binom{m+n}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{m}{l} \binom{n}{k-l} \text{ mit } m, n, k \in \mathbb{N}$$
spezialisiere
$$\binom{(j+1) \cdot m}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{m}{l} \binom{j \cdot m}{k-l} \text{ mit } m, k, j \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$
$$\binom{(j+1)x}{k} = \sum_{l=0}^{k} \binom{x}{l} \binom{j \cdot x}{k-l} \in K[x]$$
nach Satz 1 (Folg.); wegen 1.3 stimmen L.S. und R.S. für ∞ viele m überein.

Satz 3: Für $c \in K (K \geq \mathbb{Q}, K$ Körper) und $m \in \mathbb{N}$ setze
$$(1+cx)^{\frac{1}{m}} := \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{m}}{n} c^n x^n$$
Dann gilt für $1 \leq j \leq m, j \in \mathbb{N}$

a)
$$\left((1+cx)^{\frac{1}{m}}\right)^j = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{j}{m}}{n} c^n x^n$$

b)

$$\left((1+cx)^{\frac{1}{m}}\right)^m = 1+cx$$

Beweis:

a) Induktion nach j
Für $j=1$ Beh. klar per Def.
Für $j \geq 1$

$$\left((1+cx)^{\frac{1}{m}}\right)^j+1 = \left((1+cx)^{\frac{1}{m}}\right)^j (1+cx)^{\frac{1}{m}} \overset{Ind.Ann.}{=} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{j}{m}}{n} c^n x^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{m}}{n} c^n x^n\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{j}{m}}{k} c^k \binom{\frac{1}{m}}{n-k} c^{n-k}\right) x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{j}{m}}{k} \binom{\frac{1}{m}}{n-k}\right)}_{\text{nach Satz 2 } = \binom{j+1}{n}} c^n x^n$$

b) Wende 1. an für $j=m$

$$\left((1+cx)^{\frac{1}{m}}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{1}{n}}_{\substack{=1 \text{ für } n=0 \\ =1 \text{ für } n=1 \\ =0 \text{ für } n>1}} c^n x^n = 1+cx$$

(16.05.01)

Polynommethode

Ausgangspunkt: Gleichung gültig für alle $m, n \in \mathbb{N}$, z.B.

$$\binom{2m}{n} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{m}{n-k}$$

Gesucht: Polynome $f, g \in K[x], K \geq \mathbb{Q}$ mit $f(m) =$ L.S. und $g(m) =$ R.S.
Satz 1 impliziert dann $f=g$ und es gilt für alle $z \in K f(z) = g(z)$
Im Beispiel:

$$f = \binom{2x}{n} = \frac{1}{n!}(2x)(2x-1)\ldots(2x-n+1)$$

$$g = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{n} \binom{x}{n-k}$$

Also:

$$\binom{2z}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{z}{k} \binom{z}{n-k} \text{, für -stellialle } z \in \mathbb{C} \quad [z \in \mathbb{C}^{n \times n}]$$

z.B.: $z = \frac{1}{2}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\frac{1}{2}}{k} \binom{\frac{1}{2}}{n-k} = \binom{1}{n} = \begin{cases} 1 & \text{für } n=0,1 \\ 0 & \text{für } n>1 \end{cases}$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}c^n x^n\right)^2 = 1 + cx$$

Beispiel: (Forts. von 1.5 Catalan-Zahlen)
$\mathcal{C}_n$ = Anzahl der regulären Klammerungen mit 2n Klammern
oder Anzahl der binären Suchbäume mit n Knoten

$$\mathcal{C}_0 = 1, \mathcal{C}_1 = 1, \mathcal{C}_2 = 2, \mathcal{C}_3 = 5$$

$$\mathcal{C}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{C}_k\ \mathcal{C}_{n-1+k}, n \geq 1$$

$$\mathcal{C} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}_n x^n = 1 + x\mathcal{C}^2 \quad | \cdot x$$

$$\left(x\mathcal{C} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(1-4x)$$

$$x\mathcal{C} - \frac{1}{2} = \pm\frac{1}{2}(1-4x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}_{n-1}x^n = x\mathcal{C} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n} - 4^n x^n\right)$$

Koeffizient von $x^0 = 0$, also gilt - als Vorzeichen

$$\mathcal{C}_n = -\frac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}}{n+1}(-4)^{n+1} = -\frac{1}{2}(-1)^{n+1}4^{n+1}\,\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\dots(\frac{1}{2}-n)}{(n+1)!}$$

$$= -\frac{1}{2}2^{n+1}(-1)^1\,\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{(n+1)!}$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot 2n}{(n+1)!\cdot n!} = \frac{1}{n+1}\cdot\frac{2n!}{n!\cdot n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Kapitel 2

Algebraische Strukturen

2.1 Universelle Algebren

Definition 1: Ist M ein Menge, so heisst eine Abbildung

$$f : M^n = M \times \ldots \times M \to M$$

eine n-stellige Operation mit $n = s(f)$.
Da $M^0 = \emptyset$, ist eine 0-stellige Operation [vollständig beschrieben durch] ein Element $a[= f(\emptyset)]$ aus M.
Eine universelle Algebra vom Typ $(n_i)_{i \in I}$ ist $(M, (f_i)_{i \in I})$, wobei f_i eine n_i-stellige Operation auf M ist. $(n_i = s(f_i), I$ Indexmenge)

Bemerkung: 2-stellige Operationen werden meist durch $+, \cdot, \circ, \ldots$ bezeichnet. Infix-Notation: $+(a, b) = a + b$

Definition 2: Eine Halbgruppe ist eine Algebra $(H, \circ)$ vom Typ (2), bei der gilt:

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \text{ für alle } a, b, c \in M$$

Beispiel: $A =$ Menge ('Alphabet')

$$w = W(A) = \{(a_1, \ldots, a_k) | a_i \in A, n \in \mathbb{N}_0\} \quad \text{,,Worte in A''}$$

$$w \times w \to w : (a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_m) \to (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m)$$

Definition 3: Ein Monoid ist eine Algebra $(M, \circ, e)$ vom Typ (2,0) mit $(M, \circ)$ ist eine Halbgruppe und $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in M$. e heisst ,,neutrales Element".

Definition 3 (alt.): Ein Monoid ist eine Halbgruppe $(M, \circ)$ und es gibt $e \in M$ mit $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in M$.

Bemerkung: Sind $(H, \circ, e)$ und $(H, \circ, f)$ Monoide (mit gleicher Verknüpfung $\circ$), so gilt $e = f$, d.h. das neutrale Element eines Monoids ist eindeutig bestimmt. $e = e \circ f = f$

Definition 4: Eine Gruppe ist eine Algebra vom Typ (2,1,0) $(G, \circ, ^{-1}, e)$, bei der folgende Regeln gelten: $(G, \circ, e)$ ist Monoid und $g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = e$ für alle $g \in G$. Gilt zusätzlich $g_1 \circ g_2 = g_2 \circ g_1$ für alle $g_1, g_2 \in G$, so heisst $G = (G, \circ, ^{-1}, e)$ abelsche (oder kommutative) Gruppe.

Beispiel: $S_n = \{\sigma : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} | \sigma \text{ bijektiv}\}$
$(S_n, \circ, ^{-1}, (1))$ ist eine (nicht-abelsche) Gruppe (für $n \geq 3$).
$(\mathbb{Z}, +, -, 0)$ ist eine abelsche Gruppe.

Definition 5: $(R, +, -, 0, \cdot, 1)$ vom Typ (2, 1, 0, 2, 0) heisst ein „Ring mit Eins", wenn folgendes gilt:

- $(R, +, -, 0)$ ist eine abelsche Gruppe
- $(R, \cdot, 1)$ ist ein Monoid
- $\begin{array}{l} (a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \\ a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \end{array}$ für alle $a, b, c \in R$

Gilt zusätzlich $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in R$, so heisst $(R, \ldots)$ kommutativer Ring.
Gilt zusätzlich: Zu jedem $a \in R\backslash\{0\}$ gibt es ein $a^{-1} \in R$ mit $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ und $1 \neq 0$, so heisst $(R, \ldots)$ (kommutativer) Körper.

Beispiele: $(\mathbb{Z}, +, -, 0, 1, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring
$(\mathbb{Q}, +, -, 0, 1, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, -, 0, 1, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +, -, 0, 1, \cdot)$ und $(\mathbb{F}_2, +, -, 0, 1, \cdot)$ sind Körper.
$(K^{n \times n}, +, -, 0, I_n, \cdot)$ ist nichtkommutativer Ring mit Eins, wobei I_n die Einheitsmatrix bezeichnet, mit $n > 1$.
$K[x]$ ist der Polynomring und $K[[x]]$ der Ring der formalen Potenzreihen.

Definition 6: Ein Vektorraum (VR) über einem Körper K ist eine Algebra $(V, +, -, 0, K)$ vom Typ (2, 1, 0, $(1)_{i \in K}$), wobei gilt:

- $(V, +, -, 0)$ ist eine abelsche Gruppe
- $\alpha(v + w) = \alpha(v) + \alpha(w)$, $\alpha \in K; v, w \in V$
- $1 \in K$, $1(v) = v$
- $(\alpha + \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v)$, $\beta \in K$
- $(\alpha \cdot \beta)(v) = (\alpha(\beta(v))n$-stellige Operation

Definition 7: Ist $(R, +, -, 0, \cdot, 1)$ Ring (mit Eins), so ist ein R-Modul eine Algebra $(M, +, -, 0, R)$ vom Typ (2, 1, 0, $(1)_{i \in R}$), wobei gilt:

- $(M, +, -, 0)$ ist abelsche Gruppe
- $\alpha(v + w) = \alpha(v) + \alpha(w)$, $\alpha \in R; v, w \in M$
- $1(v) = v$
- $(\alpha + \beta)(v) = \alpha(v) + \beta(v)$, $\beta \in R$
- $(\alpha \cdot \beta)(v) = \alpha(\beta(v))$

(18.05.01)

Der kleinste Ring ist $\{0\}$ mit $0 = 1, + = \cdot$ usw.
Der kleinste Körper ist $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$

2.2 Unteralgebren, Homomorphismen, Kongruenzen

Es sei $\mathbf{A} = (A, (f_i)_{i\in I})$ eine Algebra vom Typ T $= (n_i)_{i\in I}$, $n_i = T(f_i)$

Definition 1: $\mathbf{U} \leq \mathbf{A}$ Unteralgebra
$f_i(u_1, \ldots, u_{n_i}) \in \mathbf{U}$ für alle $u_1, \ldots, u_{n_i} \in \mathbf{U}, i \in I$
(insbes. ist $n_i = 0$, also $f_i \in \mathbf{A}$, so muss $f_i \in U$

Bemerkung: Ist $\mathbf{U} \leq \mathbf{A}$, so ist $(U, (f_{i|U^{n_i}})_{i\ inI})$ Algebra vom Typ T

Beispiel:

a) $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ Gruppe
$\mathbf{U} \leq \mathbf{G} \Leftrightarrow \mathbf{U}$,,Untergruppe" $\Leftrightarrow (u, u' \in \mathbf{U} \Rightarrow u \cdot u' \in \mathbf{U}, u^{-1} \in \mathbf{U}, 1 \in \mathbf{U})$

b) $\mathbf{V} = (V, +, -, 0, K)$ K-Vektorraum
$\mathbf{U} \leq \mathbf{V} \Leftrightarrow \mathbf{U}$ Untervektorraum = Teilraum

c) $\mathbf{R}$ Ring ,$\mathbf{U} \leq \mathbf{R}$, $\mathbf{U}$ Teilring = Unterring

Lemma 1: $\mathbf{U}_j \leq \mathbf{A}$ für $j \in J$ = Indexmenge

$$\Rightarrow \bigcap_{j\in J} \mathbf{U}_j \leq \mathbf{A}$$

Definition 2: $M \subset A$ Teilmenge

$$< M >= \bigcap \{U | M \leq U \leq A\}$$

= das ,,Erzeugnis" aus M oder die von M erzeugte Unteralgebra

Beispiel:

a) V K-VR, $v_1, \ldots, v_n \in V$

$$< \{v_1, \ldots, v_n\} >= \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i | \alpha_i \in K \right\}$$

b) $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ Gruppe, $g \in G$

$$< g >=< \{g\} >= \{g^i | i \in \mathbb{Z}\}, \text{ wobei } g^i = \begin{cases} \underbrace{g \cdot \ldots \cdot g}_{imal} & \text{für } i > 0 \\ 1 & \text{für } i = 0 \\ \underbrace{g^{-1} \cdot \ldots \cdot g^{-1}}_{-imal} & \text{für } i < 0 \end{cases}$$

$$< \{g_1, \ldots, g_n\} >= \{a_1 \cdot \ldots \cdot a_m | m \in \mathbb{N}, a_j \in \{g_1, \ldots, g_n, g_1^{-1}, \ldots, g_n^{-1}\}\}$$

Definition 3: Seien $\mathbf{A} = (A, (f_i)_{i\in I})$ und $\mathbf{A'}, (f'_i)_{i\in I})$ Algebren vom gleichen Typ T $= (n_i)_{i\in I}$, so heisst eine Abbildung $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{A'}$ ein (Algebren-)Homomorphismus, wenn $f'_i : (\phi(a_1), \ldots, \phi(a_{n_i})) = \phi(f_i(a_1, \ldots, a_{n_i}))$

[Insbesondere $\phi(f_i) = f'_i$, falls $n_i = 0, d.h. f_i \in A$]
Ist zusätzlich ϕ bijektiv, so heisst ϕ ein Isomorphismus.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A'} \overset{def}{\Leftrightarrow} \text{ Es gibt Isomorphismus } \phi : \mathbf{A} \to \mathbf{A'}$$

Beispiel:

a) V, W K-VR

$$\phi : V \to W \text{ Homomorphismus } \Leftrightarrow \phi \text{ ist K-Linear, d.h.}$$

$$\phi(v_1 + v_2) = \phi(v_1) + \phi(v_2)$$
$$\phi(-v) = -\phi(v)$$
$$\phi(0) = 0$$
$$\phi(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot \phi(v)$$

b) G_1, G_2 Gruppen; $(G_1, \cdot, ^{-1}, 1), (G_2, *, ', e)$
$\phi : G_1 \to G_2$ Homomorphismus

(i) $\phi(g_1 \cdot g_2) = \phi(g_1) * \phi(g_2)$ für alle $g_1, g_2 \in G_1$

(ii) $g(g_1^{-1}) = \phi(g_1)'$

(iii) $g(1) = e$

Bemerkung: Hier folgen (ii) und (iii) aus (i)

Definition 4: Eine Äquivalenzrelation $\sim$ heisst eine Kongruenzrelation auf A, wenn folgendes gilt:

$$a_1 \sim a_1', \ldots, a_{n_i} \sim a_{n_i}' \Rightarrow f_i(a_1, \ldots, a_{n_i}) \sim f_i(a_i', \ldots, a_{n_i}')$$

[d.h. $\sim$ ist mit allen Verknüpfungen f_i verträglich]

Beispiel: $(G, \cdot, ^{-1}, 1)$ Gruppe, $\sim$ Äquivalenzrelation auf G

$$\sim \text{ Kongruenz } \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} a \sim a' \\ b \sim b' \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} a \cdot b \sim a' \cdot b' \\ a^{-1} \sim a'^{-1} \end{array} \right.$$

Homomorphiesatz:

a) Es sei $\sim$ Kongruenzrelation auf A, dann wird die Menge der Äquivalenzklassen

$A/\sim = \{[a]_\sim | a \in A\}$,wobei $[a]_\sim = \{a' \in A | a' \sim a\}$ Äquivalenzklasse von a,

eine Algebra vom Typ T mit $\overline{f_i}([a_1]_\sim, \ldots, [a_{n_i}]_\sim) := f_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$ und
$\pi = \pi_\sim : A \to A/\sim : a \mapsto [a]_\sim$ ist surjektiver Homomorphismus.

b) Ist $\phi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ ein Homomorphismus, so wird durch

$$a \sim a' \Leftrightarrow \phi(a) = \phi(a')$$

eine Kongruenzrelation auf $\mathbf{A}$ definiert und

$$Bild(\phi) = \phi(A) := \{\phi(a) | a \in A\}$$

ist Unteralgebra von B und es gibt einen Isomorphismus

$$\overline{\phi} : \mathbf{A}/\sim \to Bild(\phi) : [a]_\sim \mapsto \phi(a)$$

Bemerkung: Kennt man also alle Kongruenzen auf $\mathbf{A}$, so kennt man bis auf Isomorphie alle homomorphen Bilder von $\mathbf{A}$.

Beweis: Nachrechnen!
Nicht vergessen, zu zeigen, die Operationen $\overline{f_i}$ sind wohldefiniert

$$\overline{f_i}([a_1]_\sim, \ldots, [a_{n_i}]_\sim) = f_i(a_1, \ldots, a_{n_i})$$

$$[a_i] = [a_i'] \Rightarrow R.S. = f_i(a_1', \ldots, a_{n_i}')$$

Dies gilt gerade, weil $\sim$ Kongruenz.

Beispiel: V K-VR, $\phi : V \rightarrow W$ Homomorphismus

$$v \sim v' \overset{perDef.}{\Leftrightarrow} \phi(v) = \phi(v') \Leftrightarrow \phi(v - v') = 0$$

$$\Leftrightarrow v - v' \in Kern\phi = U \leq V$$

$[v]_\sim = v + U$, insbesondere: $[0]_\sim = U = Kern\phi$

(23.05.01)

$\mathbf{A} = (A, (f_i)_{i \in I})$ Algebra vom Typ T=$(n_i)_{i \in I}$
Eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf A heisst Kongruenzrelation, wenn für alle j

$$a_j \sim a_j' \Rightarrow f_i(a_1, \ldots, a_{n_i}) \sim f_i(a_1', \ldots, a_{n_i}')$$

Dann wird

$$A/\sim = \{[a]_\sim | a \in A\}$$

zur Algebra vom Typ T mit

$$\overline{f_i}([a_1]_\sim, \ldots, [a_{n_i}]_\sim) = [f(a_1, \ldots, a_{n_i})]_\sim$$

Faktoralgebra

$$A \rightarrow A/\sim : a \mapsto [a]_\sim \text{ Surj. Homomorphismus von Algebren}$$

Beispiel: V K-VR und $\sim$ Kongruenzrelation

$$[0]_\sim = U \text{ Teilraum von V}$$

$$[a]_\sim = a + U = \{a + U | u \in U\}$$

$$V/\sim =: V/U$$

2.3 Ringe und Ideale

$R = (R, +, -, 0, \cdot, 1)$ sei Ring (Typ = (2, 1, 0, 2, 0)), d.h.

- $(R, +, -, 0)$ abelsche Gruppe
- $(R, \cdot, 1)$ Monoid und
- $(a + b)c = ac + bc$
- $a(b + c) = ab + ac$

Lemma 1: In einem Ring R gelten

a) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ für alle $a \in R$

b) $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b); b \in R$

c) $-(-a) = a$

d) $-(a+b) = (-a) + (-b)$

Schreibweise: $a - b := a + (-b)$

Was gibt es in Ringen für Kongruenzrelationen? Sei $\sim$ eine Kongruenzrelation auf R, setze $I = [0]_\sim = \{a \in R | a \sim 0\}$
Dann folgt für $a, a', b, b' \in R; a \sim a'; b \sim b'$

$$(a+b) \sim (a'+b')$$

$$a \cdot b \sim a' \cdot b'$$

$$-a \sim -a'$$

$$a \sim a' \Leftrightarrow a - a' \sim a' - a' = 0 \Leftrightarrow a - a' \in I = [0]_\sim$$

Also: Die Kongruenz $\sim$ ist vollständig beschrieben durch $I = [0]_\sim$

Welche Eigenschaft hat $I = [0]_\sim$?
Ist

$$\begin{array}{rcccl} u, v \in I & \Rightarrow & u \sim 0, v \sim 0 & \Rightarrow & u + v \sim 0 \text{ also: } u + v \in I \\ & & -u \sim -0 = 0 & \Rightarrow & -u \in I \end{array}$$

Ist $a \in R, u \in I$, d.h. $u \sim 0, a \sim a$, also $a \cdot u \sim a \cdot 0 = 0$ und $u \cdot a \sim 0 \cdot a = 0$, also $a \cdot u \in I$ und $u \cdot a \in I$.

Definition: $I \subseteq R$ (R Ring) heisst Ideal (als Zeichen: $I \trianglelefteq R$), wenn

$$a \in I \text{ und } a, b \in I \Rightarrow a + b \in I \text{ und } -a \in I$$

$$a \in R, u \in I \Rightarrow a \cdot u \in I \text{ und } u \cdot a \in I$$

Satz 1: Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf R, so ist $I = [0]_\sim \trianglelefteq R$.
Umgekehrt: Ist $I \trianglelefteq R$, so wird durch

$$a \sim a' \overset{Def.}{\Leftrightarrow} a - a' \in I$$

eine Kongruenzrelation definiert.
(dabei $[0]_\sim = I, [a]_{sim} = a + I = \{a + u | u \in I\}$)
Man schreibt $R/\sim = R/I$

Beweis: 1. Teil: s.o. 2. Teil: Sei $I \trianglelefteq R$ beliebig gegeben und $\sim$ definiert durch $a \sim a' \Leftrightarrow a - a' \in I$

a) **Behauptung:** $\sim$ ist Äquivalenzrelation

   (i) Reflexivität: $a \sim a$ gilt, weil $a - a = 0 \in I$ gilt.

   (ii) Symmetrie: $a \sim b \Rightarrow b \sim a$ gilt, weil

$$a - b \in I \Rightarrow -(a-b) = b - a \in I, \text{ d.h. } b \sim a$$

   (iii) Transitivität: $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$ gilt, weil

$$\begin{array}{lcc} a - b \in I & & (a-b) + (b-c) \in I \\ b - c \in I & \text{impliziert} & = \\ & & a - c \in I, \text{ d.h. } a \sim c \end{array}$$

b) **Behauptung:** $\sim$ ist sogar Kongruenzrelation, d.h. zu zeigen:

$$\begin{array}{ccccc} a \sim a' & & a+b \sim a'+b' & (i) \\ b \sim b' & \Rightarrow & -a \sim a & (ii) \\ & & a \cdot b \sim a' \cdot b' & (iii) \end{array}$$

(i)

$$a - a' \in I, b - b' \in I \Rightarrow (a-a') + (b-b') \in I$$

$$\Rightarrow (a+b) - (a'+b') \in I, \text{ d.h. } (a+b) \sim (a'+b')$$

(ii)

$$a \sim a' \text{ also } a - a' \in I \Rightarrow -(a-a') \in I \Rightarrow -a - (-a') \in I, \text{ d.h. } -a \sim -a'$$

(iii)

$$a - a' \in I, \text{ dann folgt } (a-a')b \in I$$

$$b - b' \in I, \text{ dann folgt } a'(b-b') \in I$$

$$\text{und } (a-a')b + a(b-b') = ab - a'b' \in I, \text{ d.h. } ab \sim a'b'$$

Satz 2: Ist R kommutativer Ring ($a \cdot b = b \cdot a$, für alle $a, b \in R$) und $d \in R$ beliebig, so ist $Rd = \{a \cdot d | a \in R\} \trianglelefteq R$ ein Ideal, das von d erzeugte Hauptideal.
Es ist $Rd = R \Leftrightarrow d$ ist invertierbar in $(R, \cdot, 1)$, d.h. $\exists d' \in R$ mit $dd' = 1$

Beweis: Zu zeigen:

a) $0 \in R$

b) $u, v \in Rd \Rightarrow u + v \in Rd$ und $-u \in Rd$

c) $c \in R, u \in Rd \Rightarrow c \cdot u \in Rd$

a)

$$0 \in Rd \text{ , weil } 0 = 0 \cdot d \text{ (s. Lemma 1)}$$

b)

$$u, v \in Rd \text{ bedeutet } u = a \cdot d, v = b \cdot d \text{ mit } a, b \in R$$

dann folgt

$$u + v = ad + bd = \underbrace{(a+b)}_{\in R} d \in Rd$$

$$-u = \underbrace{-a}_{\in R} d \in Rd$$

c)

$$u \in Rd \text{ , d.h. } u = a \cdot d \text{ mit } a \in R$$

dann folgt

$$c \cdot u = c(ad) = \underbrace{(ca)}_{\in R} d \in Rd$$

Wann ist $Rd = R$?
Sei d invertierbar in $(R, \cdot, 1)$, d.h. es gebe $d' \in R$ und $dd' = 1$, dann gilt für beliebiges $a \in R$

$$a = a \cdot 1 = a \cdot d' \cdot d = \underbrace{(a \cdot d')}_{\in R} d \in Rd \text{ , also } R \subseteq Rd$$

umgekehrt sei $R = Rd$, dann ist $1 \in Rd$, d.h. $\exists d' \in R$ mit $1 = dd'$, d.h. d ist invertierbar.

Beispiel: $R = \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$

$$m\mathbb{Z} \trianglelefteq \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}/\sim_m = \{[a]_\sim | a \in \mathbb{Z}\}$$

$$\sim = \sim_m \text{ definiert durch } a \sim b \Leftrightarrow a - b \in m\mathbb{Z}$$

$$[a]_\sim = [a]_m = a + m\mathbb{Z} = \{a + mz | z \in \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m : a \mapsto [a]_m \text{ ist surj. Ringhomomorphismus}$$

$$\mathbb{Z}_m = \{[0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m\} \text{ , denn ist } a \in \mathbb{Z} \text{ beliebig}$$

$$i = a - \left\lfloor \frac{a}{m} \right\rfloor m \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \text{ , dann ist } [a]_m = [i]$$

Bemerkung: Statt $a \sim_m b$ für $a, b \in \mathbb{Z}$ schreibt man oft

$$a \equiv b \bmod n \Leftrightarrow [a]_m = [b]_m \text{ in } \mathbb{Z}_m$$

Beispiel: $R = \mathbb{Z}, m = 3$

$$[0]_m = \{0, 3, -3, 6, -6, \ldots\}$$

$$[1]_m = \{1, 4, -2, 7, -5, \ldots\}$$

$$[2]_m = \{2, 5, -1, 8, -4, \ldots\}$$

$$\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{[0]_3 = 0, [1]_3 = 1, [2]_3 = 1 + 1\}$$

Konvention: In jedem kommutativen Ring R schreibt man $1 + 1 = 2, 1 + 1 + 1 = 3$ allgemein: $a \in R, \underbrace{a + \ldots + a}_{r} =: r \cdot a$,
z.B. $2 + 2 = 1$ in $\mathbb{Z}_3$, genauer: $[2]_3 + [2]_3 = [4]_3 = [1]_3$

Beispiel: Behauptung: Keine ganze Zahl der Form $7 + n \cdot 8$ ist eine Summe von 3 Quadraten in $\mathbb{Z}$ (für $n \in \mathbb{Z}$)

Beweis: Annahme: $z = z + n \cdot 8 = a^2 + b^2 + c^2$ für $a, b, c \in \mathbb{Z}$
Betrachte: $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_8 = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} : z \mapsto [z]$ Homomorphismus Dann folgt:

$$\varphi(z) = \varphi(a^2) + \varphi(b^2) + \varphi(c^2)$$

$$[z]_8 = \varphi(a)^2 + \varphi(b)^2 + \varphi(c)^2$$
$$= a'^2 + b'^2 + c'^2; a', b', c' \in \mathbb{Z}$$

in $\mathbb{Z}_8$:

z	0	1	2	3	4	5	6	7
z^2	0	1	4	1	0	1	4	1

Quadrate sind 0, 1, 4 $\Rightarrow$ Summen von 3 Quadraten sind: $0 = 0^2 + 0^2 + 0^2$
$1 = 1^2 + 0^2 + 0^2$
$2 = 1^2 + 1^2 + 0^2$

$3 = 1^2 + 1^2 + 1^2$
$4 = 2^2 + 0^2 + 0^2$
$5 = 2^2 + 1^2 + 0^2$
$6 = 2^2 + 1^2 + 1^2$
$\Rightarrow$ 7 ist in $\mathbb{Z}$ keine Summe von 3 Quadraten. Also war die Annahme falsch.

(25.05.01)

Beispiel: Pseudozufallszahlen $m \in \mathbb{N}, \mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, m-1\}$

$$z_0 = 0 \text{ Startwert (z.B. [Datum } \cdot \text{ Uhrzeit}]_m$$

$$z_n = a_{n-1} + c \text{ in } \mathbb{Z}_m$$

$$\text{eigentlich: } [z_n]_m = [a]_m[z_{n-1}]_m + [c]_m \text{ mit } \textit{geeigneten} \text{ a und c in } \mathbb{Z}_n$$

Jede solche Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wird periodisch werden.

$$z_j = z_{j+k} \Rightarrow z_{j+1} = z_{j+k+1}$$

Bestimme a und c, so dass Periode $k = m$ ist, aber bitte nicht $a = c = 1$

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} z_n x^n = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (az_{n-1} + c)x^n \in \mathbb{Z}_m[[x]]$$

$$= axF + c\frac{x}{1-x} \text{ , da } z_0 = 0$$

$$F = c\frac{x}{1-x} \cdot \frac{1}{1-ax} = c\frac{x}{1-x} \sum_{n=0}^{\infty} a^n x^n = c\sum_{n=1}^{\infty} (1 + a + \ldots + a^{n-1})x^n$$

Also $z_n = c(1 + a + \ldots + a^{n-1})$ für $n \geq 1$ in $\mathbb{Z}_m$
a und c zu bestimmen, dass Periode in $\mathbb{Z} = \{z_0, z_1, \dots, z_{m-1}\}, z_m = z_0$
Also $= \{c\underbrace{(1 + a + \ldots + a^{n-1})}_{\text{insbes. }=1 \text{ für ein } n} | n = 1, \dots, m\}$
Also muss c in $\mathbb{Z}_m$ invertierbar sein [ggT(c,m) $= 1$ in $\mathbb{Z}$], $a^m = 1$ in $\mathbb{Z}_m$
(Fortsetzung folgt)

2.4 Grösste gemeinsame Teiler, Euklidische Ringe

Bemerkung: Ist $m \in \mathbb{N}$ keine Primzahl, so ist

$$m = p \cdot g \text{ mit } 1 < p, g < m$$

Dann ist

$$[p]_m \cdot [q]_m = [p \cdot q]_m = [m]_m = 0 \text{ in } \mathbb{Z}_m$$

aber

$$[p]_m \neq 0, [q]_m \neq 0 \text{ , weil } 1 < p, q < m$$

Definition: Ist R ein kommutativer Ring und ist $a \neq 0 \neq b$, aber $a \cdot b = 0$, so heissen a, b Nullteiler.
R heisst Integritätsbereich, wenn R ein kommutativer Ring (mit 1) ist und R keine Nullteiler enthält.
(insbes. gilt dann: $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$)

Beispiele: $\mathbb{Z}, K[x], K[[x]], \ldots$ (K Körper) sind Integritätsbereiche
Kein Integritätsbereich ist $\mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_4, \ldots, \mathbb{Z}_m$ für m nicht Primzahl

Im Folgenden sei R ein Integritätsbereich

Definition: $a, b \in R, a|b$ „a teilt b" $\Leftrightarrow \exists z \in R$ mit $b = a \cdot z$
$d \in R$ heisst ein grösster gemeinsamer Teiler von a und b "in Zeichen $d \in ggT(a,b)$",
wenn $d|a$ und $d|b$ und zusätzlich gilt aus $c|a$ und $c|b$ folgt $c|d$

Bemerkung: Ist u in $(R, \cdot, 1)$ invertierbar, d.h. "u ist Einheit in R", so gilt $u|a$ für alle $a \in R$, denn $a = u(u^{-1}a)$

Beispiel: In $\mathbb{Z}$ sind nur 1 und -1 "Einheiten"
$-2, 2 \in ggT(4,6)$

Bemerkung: $d \in ggT(a,b)$ in R und u Einheit in $R \Rightarrow u \cdot d \in ggT(a,b)$
umgekehrt: Sind $d, d' \in ggT(a,b)$, so gilt $d'|d$ und $d|d'$, d.h.

$$\begin{array}{lll} \exists v \in R & d' = d \cdot v & \Rightarrow d' = d' \cdot v' \cdot v \\ \exists v' \in R & d = d' \cdot v' & \end{array}$$

also $d'(1 - v'v) = 0$
Also, da R Integritätsbereich, folgt $d' = 0$ und dann auch $d = 0$ oder $(1 - v'v) = 0$,
d.h. $vv' = 1$ und v, v' sind Einheiten in R
Also: $d, d' \in ggT(a,b) \Rightarrow d' = u \cdot d$ für u Einheit in R
Also: ggT sind bis auf eine Einheit (d.h. Multiplikation mit einer Einheit) in R bestimmt.

Wie findet man $ggT(a,b)$?
(**Bemerkung:** Nicht in jedem Integritätsbereich gibt es $ggT(a,b)$ für alle a, b)
In $\mathbb{Z}$ oder $K[x]$ findet man $ggT(a,b)$ mit dem Euklidischen Algorithmus

Definition: Ein Integritätsbereich R zusammen mit δ heisst ein (Norm-)Euklidischer Ring, wenn $\delta : R \backslash \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$

$$[\delta : R \rightarrow \mathbb{N}_0 \text{ mit } \delta(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ und } \delta(ab) = \delta(a) \cdot \delta(b)]$$

mit folgender Eigenschaft:
Zu $a, b \in R$ mit $b \neq 0$ existiert stets ein $q \in R$ und $r \in R$ mit

$$a = q \cdot b + r \text{ wobei } r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(b)$$

Beispiel:

$$(\mathbb{Z}, ||) \text{ ist (norm-)euklidisch, wobei } |a| = \begin{cases} a & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$$

$$R = (K[x], Grad) \text{ ist Euklidischer Ring}$$

$$\mathbb{Q}[x] \ni x^5 + x^3 + 1 = (2x^3 + 2x)\underbrace{(\frac{1}{2}x^2)}_{q} + \underbrace{1}_{r}$$

$$R = (K[x], \delta) \text{ ist normeuklidisch, mit } \delta(f) = \begin{cases} 2^{Grad\ f} & f \neq 0 \\ 0 & f = 0 \end{cases}$$

Satz 1: Ist (R, δ) Euklidischer Ring, so gibt es zu $a, b \in R$ stets ein $d \in ggT(a,b)$ und es gibt $y, z \in R$ mit

$$d = a \cdot y + b \cdot z$$

Beweis: (Euklidischer Algorithmus)

(30.05.01)

Definition: (R, δ) euklidischer Ring, wenn R Integritätsbereich und $\delta : R \backslash \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

Zu $a, b \in R, b \neq 0$ gibt es stets $q, r \in R$ mit $a = qb + r$ wobei $r = 0$ oder $\delta(r) = \delta(b)$

Beispiel: $(\mathbb{Z}, ||)$ oder $(K[x], Grad)$

Satz 1: In einem euklidischen Ring (R, δ) gibt es zu $a, b \in R$ stets ein $d \in ggT(a, b)$ und es ist

$$d = ya + zb \text{ für } y, z \in R$$

Beweis: (Euklidischer Algorithmus)
Ist $b = 0$, so setze $d = a$ und z.B. $y = 1, z = 0$,

sonst $(b \neq 0)$ ex. $q_1, r_1 \in R$ mit

$$\begin{array}{lll} a = bq_1 + r_1 & [\text{mit } r_1 = 0 \text{ oder}] & \delta(r_1) < \delta(b) \\ b = q_2 r_1 + r_2 & \text{mit} & \delta(r_2) < \delta(r_1) \\ r_1 = q_3 r_2 + r_3 & \text{mit} & \delta(r_3) < \delta(r_2) \end{array}$$

nach endlich vielen (sp“atestens $\delta(b) + 1$) Schritten wegen $\delta(b) > \delta(r_1) > \ldots \geq 0$

$$r_{n-2} = q_n r_{n-1} + r_n, \delta(r_n) < \delta(r_{n-1})$$

$$r_{n-1} = q_{n+1} r_n$$

[setze $b = r_0$ und $a = r_{-1}$]

Behauptung: Es gilt y_j, z_j mit

$$r_n = y_j r_{n-j-1} + z_j r_{n-j}, j = 1, 2, \ldots, n$$

, denn für $j = 1$ setze $y_1 = 1$ und $z_1 = -q_n$

Schritt $j \mapsto j + 1$:

$$r_{n-j-2} = q_{n-j} r_{n-j-1} + r_{n-j}$$

$$y_{j+1} = z_j, z_{j+1} = y_j - q_{n-j} z_j$$

Dass $r_n \in ggT(a, b)$ ist, folgt aus: [da $y = y_n, z = z_n$]

Lemma 1:

$$ggT(a, b) = ggT(b, a - qb)$$

Beweis: Zeige: $d | a, b \Rightarrow d | b, a - qb$
denn $a = da_1, b = db_1$ mit

$$a_1, b_1 \in R \Rightarrow \begin{array}{c} b = db_1 \\ a - qb = d(a_1 - qb_1) \end{array}$$

d.h. $d | b, a - qb$

Satz 2: Ist R(R, δ) euklidischer Ring, $a, b \in R$
Dann ist $[b]_a = b + a \cdot R = R / aR$ genau dann invertierbar ("Einheit"), wenn $1 \in ggT(a, b)$

Beweis:

a) Angenommen $1 \in ggT a, b$
   Nach Satz 1 gibt es $y, z \in R$ mit $1 = ya + zb$

$$zb - 1 = (-y)a \in Ra$$

$$[zb]_a = [1]_a$$

$$= [z]_a [b]_a = 1 \text{ Einselement von } R / aR$$

$$\text{d.h. } [b]_a^{-1} = [z]_a$$

b) Sei $[b]_a$ invertierbar in R/aR, d.h. $\exists z \in R[b]_a^{-1} = [z]_a$, also $[b]_a[z]_a = 1$

$$bz - 1 = ya \text{ für ein } y \in R$$

$$bz - ya = 1$$

Sei $d|a, b \Rightarrow d|ay, bz \Rightarrow d|bz - ay = 1 \Rightarrow d$ ist Einheit in R, also ist $1 \in ggT(a, b)$

Folgerung: Ist $m \in \mathbb{N}$, so ist

$$[c]_m \text{ in } \mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \text{ invertierbar genau dann, wenn } 1 \in ggT(c, m)$$

Bezeichnung: Ist R kommutativer Ring, so wird die Menge der Einheiten in R mit R^* bezeichnet.

$$R^* = \{a \in R | \exists a^{-1} \in R \text{ mit } aa^{-1} = 1\}$$

Beispiel:

$$\mathbb{Z}_6 = \{[0]_6, [1]_6, [2]_6, [3]_6, [4]_6, [5]_6\}$$
$$\mathbb{Z}_6^* = \{[1]_6, [5]_6\}$$
$$\mathbb{Z}_8^* = \{[1]_8, [3]_8, [5]_8, [7]_8\}$$

Definition:

$$|\mathbb{Z}_m^*| =: \varphi(m) \text{ für } m \in \mathbb{N}, \varphi \text{ heißt Eulersche } \varphi\text{-Funktion}$$

z.B. $\varphi(6) = 2, \varphi(8) = 4$ ($\varphi(m) =$ Anzahl der zu m teilerfremden Zahlen in $\{1, \dots, m-1\}$)

Folgerung: $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ist für $m \in \mathbb{N}$ genau dann ein Körper, wenn m eine Primzahl ist.

Beweis: $\mathbb{Z}_1 = \mathbb{Z}/1\mathbb{Z} = \{[0]_1\} = \{0\}$ kein Körper
Ist $m > 1$ keine Primzahl, so ist $m = a \cdot b$ mit $1 < a, b < m$
Dann ist $[a]_m[b]_m = [m]_m = [0]_m = 0$
also ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ kein Integritätsbereich (es gibt Nullteiler), also kein Körper.
Umgekehrt ist m Primzahl, so ist für jedes $a \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq a < m$
$1 \in ggT(a, m)$, also nach Folgerung (Satz 2) $[a]_m$ ist invertierbar.
Also jedes $[a] \neq 0$ in $\mathbb{Z}_m$ hat Inverses.

Satz 3: Ist (R, δ) euklidischer Ring und ist $I \trianglelefteq R$, so gibt es $a \in R$ mit $I = Ra$.
D.h. in einem euklidischen Ring gibt es nur Hauptideale
"Ein euklidischer Ring ist ein Hauptidealring"

Beweis: Ist $I = \{0\}$ das Nullideal, so ist $I = R \cdot 0$
Es sei nun $I \neq \{0\}$ ein Ideal in R

$$\emptyset \neq \{\delta(y) | y \in I \backslash \{0\}\} \subseteq \mathbb{N}_0$$

$$m = Min\{\delta(y) | y \in I \backslash \{0\}\} \subseteq \mathbb{N}_0 \text{ und es sei } m = \delta(a) \text{ für ein } a \in I \backslash \{0\}$$

Behauptung: $I = Ra$

Beweis:

a) Da $a \in I$, gilt $ya \in I$ für jedes $y \in R$, also gilt $Ra \subseteq I$

b) Sei $b \in I$ beliebig, da $a \neq 0$ existieren $q, r \in R$ mit

$$b = qa + r \text{ mit } r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(a)$$

$$r = \underbrace{b}_{\in I} - \underbrace{q\underbrace{a}_{\in I}}_{\in I} \in I$$

$\delta(r) < \delta(a)$ ist unmöglich, weil $\delta(a) = Min\{\delta(y) | y \in I\backslash\{0\}\}$
Also folgt $r = 0$, d.h. $b \in Ra, I \subseteq Ra$

Folgerung: Jedes Ideal von $\mathbb{Z}$ ist von der Form $I = m\mathbb{Z}$ mit $m \in \mathbb{N}_0$
Jedes homomorphe Bild von $\mathbb{Z}$ ist isomorph zu $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für ein $m \in \mathbb{Z}$ oder $\mathbb{Z}(= \mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}/0\mathbb{Z})$

2.5 Eindeutige Primfaktorzerlegung

R sei ein Integritätsbereich (kommutativer Ring mit $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0$ oder $b = 0$)

Definition: $p \in R$ heisst irreduzibel, wenn

$$p \neq 0 \text{ und } p \notin R^* \text{ und } p = a \cdot b \Rightarrow a \in R^* \text{ oder } b \in R^*$$

Beispiel: In $\mathbb{Z}$: p ist irreduzibel $\Leftrightarrow$ p ist Primzahl oder $-p$ ist Primzahl

Lemma 1: Ist (R, δ) euklidischer Ring und p irreduzibel, so folgt:

$$p|ab \Rightarrow p|a \text{ oder } p|b$$

Beweis: Angenommen $p|ab$ und $p \not| a$
Zu zeigen: $p \not| b$
Da $p \not| a$ folgt $1 \in ggT(a, p)$
Nach Satz 1, Kapitel 4 gibt es $y, z \in R$ mit

$$1 = ya + zp$$

$$b = y\underbrace{ab}_{p|} + \underbrace{zbp}_{p|}$$

Also $p|b$

(R, δ) Normeuklidisch, wenn $\delta : R \rightarrow \mathbb{N}_0$ mit

$$\delta(a) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ und } \delta(ab) = \delta(a)\delta(b) \text{ und}$$

Zu $a, b \in R, b \neq 0$ ex. $q, r \in R$ mit

$$a = qb + r \text{ mit } \delta(r) < \delta(q)$$

Beispiele: $(\mathbb{Z}, ||)$
$(K[x], \delta), \delta(f) = z^{Gradf} = 0$ falls $f = 0$

Folgerung: Ist (R, δ) normeuklidisch, so gilt

$$a \in R^* \Rightarrow \delta(a) = 1$$

denn aus $1 \cdot 1 = 1$ folgt

$$\delta(1) = \delta(1)\delta(1) \in \mathbb{N}$$
$$\delta(1) = 1$$

aus $a \cdot a^{-1} = 1$ folgt

$$\delta(a)\delta(a^{-1}) = 1 \text{ oder } \delta(a) = 1$$

(01.06.01)

$$p \in R \text{ irreduzibel } \Leftrightarrow p \neq 0, p \in R^*$$
$$\text{und } p = a \cdot b \Rightarrow a \in R^* \text{ oder } b \in R^*$$

Lemma 1: (R, δ) euklidischer Ring, p irreduzibel $\Rightarrow p|a \cdot b \Rightarrow p|a$ oder $p|b$

Satz 1: Ist (R, δ) normeuklidischer Ring, dann hat jedes $a \in R \backslash \{0\}$ eine Darstellung in der Form $a = u \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ und $u \in R^*, p_i$ irreduzibel
Gilt auch $a = vq_1 \ldots q_s$ mit $v \in R^*, q_i$ irreduzibel, so gilt $v = s$ und es gibt eine Permutation $\sigma \in S_r$ mit $q_i = u_i p_{\sigma(i)}$ mit $u_i \in R^*$

Beweis:

a) Existenz, Induktion nach $\delta(n)$

$$\delta(n) = 1 \Rightarrow a \in R^*$$
$$(1 = qa + r \text{ mit } \delta(n) < \delta(a) = 1$$
$$\delta(r) = 0 \Rightarrow r = 0 (\delta \text{ Norm})$$
$$q = a^{-1}, a \in R^*)$$

a = u , r = 0
$\delta(a) > 1$: Ist a irreduzibel, so $a = d \cdot a$
sonst $a = b \cdot c$ und $c \notin R^*$

$$\delta(a) = \delta(b) \cdot \delta(c) \text{ und } \delta(a) > \delta(b), \delta(c) > 1$$

Nach Ind.Ann.

$$b = up_1 \ldots p_l, u \in R^*, p_i \text{ irreduzibel}$$
$$c = u'p_{l+1} \ldots p_r, u' \in R^*, p_i \text{ irreduzibel}$$
$$a = bc = \underbrace{uu'}_{\in U^*} p_1 \ldots p_r$$

b) Eindeutigkeit

$$a = up_1 \ldots p_r; p_i, q_j \text{ irreduzibel}$$
$$= vq_1 \ldots q_r; u, v \in R^*$$

Induktion nach $Min(r, s) = r$

$$r = 0 \text{ dann } a \in R^*, s = 0 \text{ und } u = v = a$$

$$r > 0, p_r | a = vq_1 \ldots q_s$$

Nach Lemma 1 (mehrfach angewandt) gibt es j mit

$$p_r | q_j \text{ œ} j = s$$

$$q_s = u_r p_r \text{ dabei } u_r \in R^*$$

$$0 = a - a = p_r \underbrace{(up_1 \cdot \ldots \cdot p_{r-1} - vu_r q_1 \cdot \ldots \cdot q_{s-1})}_{=0}$$

Nach Ind.Ann. $r - 1 = s - 1$ und bei passender Sortierung ist

$$q_i = u_i p_i \text{ mit } u_i \in R^*$$

Corrolar:

a) In $\mathbb{Z}$ hat jedes $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ eine eindeutige Darstellung (bis auf Reihenfolge der Faktoren) in der Form

$$a = up_1 \ldots p_r; p_i \text{ Primzahl }; u \in \{1, -1\}$$

$\Rightarrow$

b) Ist K Körper, so hat jedes $f \in K[x]\backslash\{0\}$ eine (bis auf Reihenf.) eindeutige Darstellung in der Form

$$f = uf_1 \ldots f_r \text{ mit } u \in K^* \text{ und } f_i \text{ irreduzibel und normiert}$$

Definition:

$$f = \sum_{i=o}^{n} a_i x^i \text{ heisst normiert (engl. monic), wenn } a_n = 1$$

Satz 2: Es sei (R, δ) euklidischer Ring und $0 \neq f \in R$, so ist

$$R/fR = \{[g]_f | g \in R, \delta(g) < \delta(f)\} \cup \{0\}$$

oder

$$[g]_f = g + fR (= \{g + fz | z \in R\})$$

Es ist R/fR Körper $\Leftrightarrow f$ irreduzibel

Beweis:

a)

$$[g_1]_f = [g_2]_f \Leftrightarrow \; g_1 - g_2 \in fR$$

Da (R, f) euklidischer Ring und $f \neq 0$ gibt es zu beliebigem $g \in R$ stets ein $q, r \in R$ mit

$$g = q \cdot f + r \text{ wobei } r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(f)$$

$$g \cdot r = q \cdot f \in fR$$

$$[q]_f = [r]_f$$

Nach Definition ist

$$R/fR = \{[g]_f | g \in R\} = \{[g]_f | g \in R, \delta(g) < \delta(f)\} \cup \{0\}$$

b) Behauptung: Ist f irreduzibel, dann ist R/fR ein Körper.
Beweis:

(i) Sei $0 \neq [g]_f \in R/fR$, zu zeigen: $[g]_f$ hat Inverses

$$f \not| g; 1 \in ggT(f,g) \text{ weil } f \text{ irreduzibel}$$

Es gibt $1 = yf + zg$ mit $y, z \in R$

$$1 = [1]_f = \underbrace{[yf]_f}_{=0} + [zg]_f = [z]_f \cdot [g]_f$$

$$\Rightarrow [g]_f \text{ invertierbar mit } [g]_f^{-1} = [z]_f$$

Also ist R/fR Körper.

(ii) Es sei f nicht irreduzibel

$$f = ab \text{ mit } a, b \notin R^*$$

$$0 = [f]_f = [a]_f \cdot [b]_f$$

Wäre $[a]_f = 0$, so wäre

$$f/a = fa_1, a_1 \in R$$

$$f = ab = fa_1 b \Rightarrow b \in R^* \text{ Widerspruch!}$$

Also ist R/fR kein Integritätsbereich, also erst recht kein Körper. Schliesslich: Ist $f \in R^*$, so ist $R/fR = R/R = \{0\}$ und R/fR kein Körper.

Beispiel:

$$R = \mathbb{Z}_2[x], \mathbb{Z}_2 = \{0,1\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$f = x^2 + x + 1 \in R, \delta(g) = Gradg$$

$$R/fR = \{[g]_f | g \in R, Gradg < 2\} \cup \{0\}$$

Polynome vom $Grad 0$ in $\mathbb{Z}_2[x]$: 1
Polynome vom $Grad 1$ in $\mathbb{Z}_2[x]$: $x, x+1$
$|R/fR| = 4$
$R/fR = \{[0]_f, [1]_f, [x]_f, [x+1]_f\}$

$\cdot$	0	1	x	$x+1$
0	0	0	0	0
1		$[1]$	$[x]$	$[x+1]$
x			$[x+1]$	$[1]$
x+1				$[x]$

Also: $\mathbb{Z}_2[x]/(x^2+x+1)\mathbb{Z}_2[x]$ ist Körper mit 4 Elementen

Beispiel:

$$\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\} \text{ ist Ring mit 4 Elementen, kein Körper}$$

$$[2]_4[2]_4 = [4]_4 = 0$$

$$[3]_4[3]_4 = [9]_4 = 1$$

(13.06.01)

(R, δ) Euklidischer Ring
z.B. $(\mathbb{Z}, ||), (K[x], Grad) K$ Körper
Division mit Rest
eukl. Algorithmus: Zu $a, b \in R$ gibt es $d \in ggT(a, b)$

$$d = ya + zb \text{ mit } y, z \in R$$

Folgerung: R/qR ist Körper $\Leftrightarrow$ q irreduzibel in R

$$(q \in R \text{ irred. } \Leftrightarrow\ q \neq 0, q \notin R^*, q = a \cdot b \Rightarrow a \in R^* \text{ oder } b \in R^*)$$

z.B.:

$$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ Körper } \Leftrightarrow\ p \text{ Primzahl}, p \in \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ ist Körper mit } p \text{ Elementen, falls } p \text{ Primzahl}$$

$$\mathbb{Z}_{p^2} = \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \text{ ist Ring mit } p^2 \text{ Elementen, kein Körper}$$

Beispiel:

$$R = K[x], K \text{ Körper}$$

$$R/fR = \{[g]_f | g \in K[x]\}$$

$$[g]_f = g + fK[x]$$

$$[g]_f = [h]_f \Leftrightarrow\ g - h \in fK[x] \Leftrightarrow\ g - h = g \cdot f \text{ mit } q \in K[x]$$

$$R/fR = K[x]/fK[x] = \left\{ \left[\sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right]_f |a_i \in K \right\} \text{ , falls } Grad\ f = n \geq 1$$

Bemerkung: Ist $K = \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (Körper mit p Elementen) p Primzahl
Und ist $f \in K[x]$ mit $Grad\ f = n \geq 1$
Dann ist

$$|K[x]/fK[x]| = p^n$$

$$K[x]/fK[x] = \{[a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}]_f | a_i \in \mathbb{Z}_p\}$$

$$\text{und } K[x]/fK[x] \text{ Körper } \Leftrightarrow\ f \text{ ist irreduzibel}$$

Beispiel:

$$K = \mathbb{Z}_2, f = x^3 + x + 1 \in K[x] \text{ irreduzibel (s. Aufgabe 27)}$$

$$L = K[x]/fK[x] \text{ ist Körper mit 8 Elementen}$$

$$= \{[a_0 + a_1x + a_2x^2]_f | a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}_2\}$$

Die Elemente von L werden durch 3 Bits dargestellt

$$[a_0 + a_1x + a_2x^2]_f \Rightarrow a_0a_1a_2$$

$$\alpha = [x]_f \leftrightarrow\ 010$$

$$\alpha^2 = [x^2]_f \leftrightarrow\ 001$$

$$\alpha^3 = [x^3]_f = [x + 1]_f \leftrightarrow\ 110 \text{ , da } x^3 = (x^3 + x + 1) + x + 1$$

$$\alpha^4 = \alpha^3 \cdot \alpha = [x^2 + x]_f \leftrightarrow\ 011$$

$$\alpha^5 = \alpha^4 \cdot \alpha = [x^3 + x^2]_f = [x^2 + x + 1]_f \leftrightarrow\ 111 \text{ , da } x^3 + x^2 = x^3 + x + 1 + x^2 + x + 1$$

$$\alpha^6 = \alpha^5 \cdot \alpha = [x^3 + x^2 + x]_f = [x^2 + 1]_f \leftrightarrow\ 101 \text{ , da } x^3 + x^2 + x = x^3 + x + 1 + x^2 + 1$$

$$\alpha^7 = \alpha^6 \cdot \alpha = [x^3 + x]_f = [1]_f \leftrightarrow \ 100$$
$$\alpha^8 = \alpha$$

Bemerkung: Ist $\alpha^i = \beta$, so schreibt man $i = \log_\alpha(\beta)$ "diskreter Logarithmus"

$$\alpha^3 \cdot \alpha^2 = \alpha^5$$
$$\alpha^3 \cdot \alpha^5 = \alpha^8 = \alpha^7 \cdot \alpha = \alpha$$
$$\alpha^3 + \alpha^5 = [x^2]_f = \alpha^2$$

2.6 Der Chinesische Restsatz

$R_1, \dots, R_r$ seien Ringe; dann wird

$$R = R_1 \times \ldots \times R_r = \{(a_1, \dots, a_r) | a_i \in R_i\}$$

zu einem Ring $R = (R, +, -, 0, \cdot, 1)$ mit

$$(a_1, \dots, a_r) + (b_1, \dots, b_r) = (a_1 + b_1, \dots, a_r + b_r)$$
$$(a_1, \dots, a_r) \cdot (b_1, \dots, b_r) = (a_1 \cdot b_1, \dots, a_r \cdot b_r)$$
$$-(a_1, \dots, a_r) = (-a_1, \dots, -a_r)$$
$$0 = (0, \dots, 0)$$
$$1 = (1, \dots, 1)$$

Lemma 1: Ist R euklidischer Ring und sind $q_1, q_2 \in R$ mit $1 \in ggT(q_1, q_2)$, "d.h. q_1, q_2 teilerfremd", so gilt

$$q_1 | a \text{ und } q_2 | a \Rightarrow q_1 \cdot q_2 | a$$

Beweis:
$$1 = yq_1 + zq_2; y, z \in R$$
$$a = ayq_1 + azq_2$$
Nach Voraussetzung ist $a = q_1 a_1, a = q_2 a_2$

$$a = yq_1 q_2 a_2 + z a_1 q_1 q_2 = q_1 q_2 (y a_2 + z a_1)$$

Bemerkung: $4|12$ und $6|12$ in $\mathbb{Z}$, aber $4 \cdot 6 \not| 12$, da $ggT(4, 6) = 2 \neq 1$

Satz 1: Ist R euklidischer Ring und sind $q_1, \dots, q_r \in R$ paarweise teilerfremd, d.h. $1 \in ggT(q_i, q_j)$ für $i \neq j$
Dann gilt für $m = q_1 \dots q_r$

$$R/mR = R/q_1R \times \ldots \times R/q_rR$$

$$\psi : [a]_m \mapsto ([a]_{q_1}, \dots, [a]_{q_r})$$

(dabei ist $[a]_m = a + mR, [a]_{q_i} = a + q_i R$)

Beweis:
$$\hat{\psi}: R \rightarrow R/q_1R \times \cdot \times R/q_rR : a \mapsto ([a]_{q_1}, \dots, [a]_{q_r})$$

ist offenbar ein Ringhomomorphismus, mit

$$Kern \stackrel{\wedge}{\psi} = \{a \in R | \stackrel{\wedge}{\psi}(a) + 0\}$$
$$= \{a \in R | [a]_{q_1} = 0, \ldots, [a]_{q_r} = 0\}$$
$$= \{a \in R | q_1 | a, \ldots, q_r | a\}$$
$$= \{a \in R | m = q_1 \ldots q_r | a\} \text{ mehrfache Anwendung von Lemma 1}$$
$$= mR$$

Nach Homomorphiesatz aus 2.1

$$\psi : R/mR \cong Bild \stackrel{\wedge}{\psi} : [a]_m \rightarrow \stackrel{\wedge}{\psi}(a) = ([a]_{q_1}, \ldots, [a]_{q_r})$$

z.z. $Bild\psi = R/q_1R \times \ldots \times R/q_rR$

Beweis: Wir finden Umkehrabb. $\eta : R/q_1R \times \ldots \times R/q_rR = \overline{R}$ mit $\psi \cdot \eta = id_{\overline{R}}$
dazu setze

$$q_i' = \frac{m}{q_i} = q_1 \ldots q_{i-1} q_{q+1} \ldots q_r$$
$$1 \in ggT(q_i, q_i') \text{ weil } q_1, \ldots, q_r \text{ paarweise teilerfremd}$$
$$1 = y_i q_i + z_i q_i'$$
$$([1]_{q_i} = [z_i q_i']_{q_i})$$

Definiere

$$\eta([a_1]_{q_1}, \ldots, [a_r]_{q_r}) = \left[\sum_{i=1}^{r} a_i q_i' z_i\right]_m, a_i \in R$$

Dann gilt

$$\psi \circ \eta([a_1]_{q_1}, \ldots, [a_r]_{q_r}) = \psi \left[\sum_{i=1}^{r} a_i z_i q_i'\right]_m = \sum_{i=1}^{r} (\underbrace{[a_i z_i q_i']_{q_1}}_{=0 \text{ für } i \neq 1}, \ldots, \underbrace{[a_i z_i q_i']_{q_r}}_{=0 \text{ für } i \neq r})$$

$$([a_1 z_1 q_1']_{q_1}, \ldots, [a_r z_r q_r'])$$
$$([a_1]_{q_1}, \ldots, [a_r z_r q_r']_{q_r})$$
$$([a_1]_{q_1}, \ldots, [a_r]_{q_r}) \text{ also } \psi \circ \eta = id$$

Beispiel:

$$R = \mathbb{Z}, m = 60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$$
$$q_1 = 3, q_1' = 20$$
$$q_2 = 4, q_2' = 15$$
$$q_3 = 5, q_3' = 12$$
$$1 = 7 \cdot 3 + \underbrace{(-1)}_{z_1} \cdot 20, 1 = (-11) \cdot 4 + \underbrace{(3)}_{z_2} \cdot 15, 1 = 5 \cdot 5 + \underbrace{(-2)}_{z_3} \cdot 12$$

$$\mathbb{Z}_{60} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$$
$$[43]_{60} \cdot [35]_{60} \rightarrow ([1]_3, [3]_4, [3]_5) \cdot ([2]_3, [3]_4, [0]_5)$$
$$= ([2]_3, [1]_4, [0]_5) \rightarrow [2 \cdot (-1) \cdot 20 + 1 \cdot 3 \cdot 15 + 0 \cdot (-2) \cdot 12]_{60}$$
$$= [-40 + 45]_{60} = [5]_{60}$$

$$\Rightarrow [43]_{60} \cdot [35]_{60} = [5]_{60}$$

Folgerung: (Chinesischer Restsatz)
Sind $q_1, \ldots, q_r$ paarweise teilerfremde ganze Zahlen und $m = q_1 \cdot \ldots \cdot q_r$ und sind $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ beliebig, so gibt es genau ein $a \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ mit $a \equiv a_i \bmod q_i$ für $i = 1, \ldots, r$, d.h. $q_i | a - a_i$

(15.06.01)

Satz 1: R euklidischer Ring, $m = q_1 \ldots q_r$

$$1 \in ggT(q_i, q_j), i \neq j$$

$$\psi : R/mR \to R/q_1R \times \ldots \times R/q_rR : [a]_m \to ([a]_{q_1}, \ldots, [a]_{q_r}) \text{ ist Isomorphismus}$$

Folgerung: (Chinesischer Restsatz)
Ist $m = q_1 \ldots q_r \in \mathbb{N}, 1 \in ggT(q_i, q_j)$ für $i \neq j$, dann gibt es zu $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ beliebig stets genau ein $a \in \{0, \ldots, m-1\}$ mit

$$a \equiv a_i \bmod q_i \text{ für } i = 1, \ldots, n \tag{2.1}$$

(Die Menge aller $a \in \mathbb{Z}$ mit (2.1) ist gerade $[a]_m = a + m\mathbb{Z}$)

Beweis: Wende Satz 1 an mit $R = \mathbb{Z}$
Da ψ surjektiv ist, gibt es zu $[a_1]_{q_1}, \ldots, [a_r]_{q_r}$ für beliebige $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}$ stets ein $[a]_m \in \mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$ mit

$$\psi([a]_m) = ([a_1]_{q_1}, \ldots, [a_r]_{q_r})$$

$[a]_m$ eindeutig, weil ψ auch injektiv.

$\psi([a]) = ([a]_{q_1}, \ldots, [a]_{q_r}) = ([a_1]_{q_1}, \ldots, [a_r]_{q_r})$, da $[a]_{q_1} = [a_i]_{q_i}, a \equiv a_i \bmod q_i, i = 1, \ldots, r$

In $[a]_m$ existiert genau ein a mit $0 \leq a \leq m-1$

Folgerung 2: Voraussetzung und Bezeichnung wie in Satz 1. Dann gilt

$$[a]_m \in (R/mR)^* \text{ d.h. } [a]_m \text{ ist Einheit} \Leftrightarrow [a]_{q_i} \in (R/q_iR)^* \text{ für } i = 1, \ldots, r$$

Also

$$|(R/mR)^*| = \prod_{i=1}^{r} |(R/q_iR)^*|$$

Beweis: Ein Isomorphismus ψ bildet Einheiten auf Einheiten ab, weil

$$v = u^{-1}, \psi(u \cdot v) = \psi(u) \cdot \psi(v)$$

$$\psi(1) = 1 \text{ , also } \psi(v) = \psi(u)^{-1}$$

$$R/q_iR \times \ldots \times R/q_rR)^* = (R/q_iR)^* \times \ldots \times (R/q_rR)^*$$

2.7 Die Eulersche Phi-Funktion und Möbius-Inversion

Satz 1: Ist ϕ die Eulersche ϕ-Funktion, d.h.

$$\phi(m) = |\mathbb{Z}_m^*| = |\{j \in \{1, \dots, m\} | 1 \in ggT(j, m)\}|$$

und $m = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}$ mit $p_i \neq p_j$ für $i \neq j$ Primzahlen und $n_i \in \mathbb{N}$, so ist

$$\phi(m) = p_1^{n_1 - 1}(p_1 - 1) \dots p_r^{n_r - 1}(p_r - 1) \tag{2.2}$$

Beispiel:

$$\phi(60) = \phi(3 \cdot 4 \cdot 5) = \phi(3 \cdot 2^2 \cdot 5) = 2 \cdot 2 \cdot 4 = 16$$
$$\phi(1) = 1 = |\{j \in \{1\} | ggT(1, 1) = 1\}| = |\{1\}| = 1$$

Beweis: Wende Folgerung 2 aus 2.6 an mit $R = \mathbb{Z}, q_i = p_i^{n_i}$

$$\phi(m) = |\mathbb{Z}_m^*| = \prod_{i=1}^{r} |\mathbb{Z}_{q_i}^*| = \prod_{i=1}^{r} \phi(p_i^{n_i})$$

Nur zu zeigen: $\phi(p^n) = p^{n-1}(p - 1)$ mit $n \in \mathbb{N}, p$ Primzahl

$$j \in \{1, \dots, p^n\} \text{ erfüllt } 1 \notin ggT(j, p^n) \Leftrightarrow\ p|j \Leftrightarrow\ j \in \{p, 2p, \dots, (p^{n-1}) \cdot p\} = M$$

$$\psi(p^n) = |\{j \in \{1, \dots, p^n\} | 1 \in ggT(j, p^n)\}| = p^n - |M|| = p^n - p^{n-1} = p^{n-1}(p - 1)$$

Bemerkung: Die Formel (2.2) aus Satz 1 lässt sich auch so schreiben:

$$\phi(m) = m \cdot (1 - \frac{1}{p_1}) \cdot (1 - \frac{1}{p_r})$$

$$= \frac{m}{1} - (\frac{m}{p_1} + \dots + \frac{m}{p_r}) + \prod_{i<j} \frac{m}{p_i p_j} - + \dots + (-1)^r \frac{m}{p_1 \dots p_r}$$

Definition:

$$\mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } d = 1 \\ (-1)^r & \text{wenn } d = p_1 \dots p_r, p_i \text{ Primzahl }, p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j \\ 0 & \text{wenn } p^2 | d \text{ für eine Primzahl } p \end{cases}$$

$$\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \text{ "Möbiusfunktion"}$$

Folgerung:

$$\phi(m) = \sum_{d|m} \mu(d) \frac{m}{d}$$

Lemma 1: Es gilt für die Möbiusfunktion

$$\sum_{d|m} \mu(d) = \begin{cases} 1 & m = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Man kann dies als rekursive Formel deuten:

$$\mu(1) = 1, \mu(m) = - \sum_{d|m, 1 \leq d < m} \mu(d)$$

Beweis:$\phi(1) = 1$
Also sei $m > 1$:

$$m = p_1^{n_1} \dots p_r^{n_r}, p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j, p_i \text{ Primzahlen}$$

$$d|m \Rightarrow d = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r} \text{ mit } 0 \leq m_i \leq n_i$$

$$d|m \text{ und } \mu(d) \neq 0 \Rightarrow m_i \in \{0,1\}$$

$$\{d|m \text{ mit } \mu(d) \neq 0\} \leftrightarrow \{ \text{ Teilmengen von } P = \{p_1, \dots, p_r\}\}$$

$$\prod_{p \in M} p \leftrightarrow M$$

$$\sum_{d|m} \mu(d) = \sum_{\substack{d|m \\ \mu(d)\neq 0}} \mu(d) = \sum_{M \subset P} \mu(\prod_{p \in M} p)$$

$$= \sum_{j=0}^{r} \sum M \leq \binom{p}{j} \underbrace{\mu(\prod_{p \in M} p)}_{=(-1)^j} = \sum_{j=1}^{r} \binom{r}{j} (-1)^j \stackrel{Kap.1}{=} (1-1)^R = 0$$

Satz 2: (Möbiusinversion): Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ beliebige Abbildung und dazu

$$g(m) := \sum_{d|m} f(d) \text{ ''Summatorische Funktion zu f''}$$

Dann gilt

$$f(m) = \sum_{d|m} \mu(d) g(\frac{m}{d}) \tag{2.3}$$

Beweis:

$$\sum_{d|m} \mu(d) g(\frac{m}{d}) = \sum_{d|m} \mu(d) \sum_{c|\frac{m}{d}} f(c) = \sum_{c|m} \underbrace{\left(\sum_{d|\frac{m}{c}} \mu(d) \right)}_{nach\ Lemma\ 1\ \substack{=0 \quad für\ \frac{m}{c}\neq 1 \\ =1 \quad für\ c=m}} f(c) = f(m)$$

(20.06.01)

2.8 Gruppen und Untergruppen

$(G, \cdot) = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ sei Gruppe

Beispiele:

a)

$$R \text{ Ring} \Rightarrow (R, +, -, 0) \text{ Abelsche Gruppe}$$

$$(\mathbb{Z}, +) \text{ Gruppe}$$

$$(\mathbb{Z}_m, +), |\mathbb{Z}_m| = m \in \mathbb{N}$$

b)

$$(S_n, \circ) \text{ symmetrische Gruppe }, S_n = \{\text{Permutationen von } \{1, \ldots, n\}\}$$

c)

$$GL_n(K) = \{A \in K^{n \times n} | det\ A \neq 0\}, K \text{ Körper}$$

Bemerkung: Ist R Ring und ist

$$R^* = \{a \in R | \exists a^{-1} \in R \text{ mit } aa^{-1} = a^{-1}a = 1\}$$

so ist $(R^*, \cdot)$ eine Gruppe, die "Einheitengruppe von R"
(allgemeiner: $(M, \cdot, 1)$ Monoid $\Rightarrow M^* = \{\text{invertierbare Elemente in } M\}$,
$(M^*, \cdot)$ Gruppe)

Beispiel:

d)

$$\mathbb{Z}_m^* = \{[a]_m | 1 \in ggT(a, m)\}, m \in \mathbb{N}$$

"prime Restklassengruppe modulo m"

$$|\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m), \varphi \text{ Eulersche Funktion}$$

Definition: Ist $H \leq G$ Untergruppe von G (also $H \subseteq G$ mit $1 \in H$ und $a, b \in H \Rightarrow a^{-1} \cdot b \in H$) und $g \in G$, so heisst die Menge

$$g \cdot H = \{gh | h \in H\}$$

Linksnebenklasse (von g bezüglich H) , beachte: $(G, \cdot)$

Lemma: Ist $H \leq G, (G, \cdot)$ Gruppe, so wird durch

$$g \sim g' \overset{Def.}{\Leftrightarrow} g^{-1}g' \in H$$

eine Äquivalenzrelation auf G definiert und

$$[g]_\sim = gH$$

Beweis:

- $\sim$ Reflexivität: gilt, weil $1 = g^{-1}g \in H$ für alle g
- $\sim$ Symmetrie: gilt, weil

$$g \sim g' \text{ bedeutet } g^{-1}g' \in H \Rightarrow H \ni (g^{-1}g')^{-1} = g'^{-1}g \in H \Leftrightarrow g' \sim g$$

- $\sim$ Transitivität:

$$\text{Seien } \begin{array}{ccc} g \sim g' & \text{also} & g^{-1}g' \in H \\ g' \sim g'' & \text{also} & g'^{-1}g'' \in H \end{array}$$

$$H \ni g^{-1}g'g'^{-1}g'' = g^{-1}g'', \text{ also } g \sim g''$$

$$g \sim g' \Leftrightarrow \; g' \sim g \Leftrightarrow \; g^{-1}g' = h \in H$$

$$g' = g \cdot h \in gH$$

Folgerung: Die Linksnebenklassen von H in G bilden eine Partition.

Satz:(von Lagrange) Ist $(G, \cdot)$ Gruppe mit $|G| < \infty$ und $H \leq G$, dann ist

$$|G| = |H| \cdot [G : H]$$

wobei $[G : H] =$ Anzahl der Linksnebenklassen von H in $G =$ "Index von H in G"
$|H| =$ Anzahl der Elemente von $H =$ "Ordnung von H"
Insbesondere gilt: $|H| \mid |G|$

Beweis: $G = g_1 H \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} g_r H$ (nach Lemma 1 bzw. Folgerung) $|G| < \infty$

$$\psi_i : H \rightarrow g_i H : h \mapsto \; g_i h$$

ψ_i ist injektiv, weil $g_i h = g_i h'$ für $h, h' \in H$

$$\Rightarrow h = g_i^{-1} g_i h - g_i^{-1} g_i h' = h'$$

ψ_i ist surjektiv: jedes Element aus $g_i H$ ist von der Form $g_i h = \psi_i(h)$
Also ist ψ_i bijektiv $|H| = |g_i H|$

$$|G| = \sum_{i=1}^{r} |g_i H| = |H| \cdot r \text{ und } r = [G : H]$$

Definition: Ist $g \in G, (G_i)$ Gruppe, so sei

$$< g >= \{g^j | j \in \mathbb{Z}\}$$

"die von g erzeugte Untergruppe von G"
$| < g > | = ord(g)$ heißt Ordnung von g
G heißt zyklisch, wenn es $g \in G$ gibt mit $G =< g >$

Beispiele:

a) $(\mathbb{Z}_n, +)$ [Beachte: $(G, +)$ Gruppe, $g \in G, < g >= \{j \cdot g | j \in \mathbb{Z}]$
$\mathbb{Z}_n =< 1 >$ ist zyklisch von der Ordnung n

b) $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot)$

$$\mathbb{Z}_{12}^* = \{1, 5, 7, 11\}, j = [j]_{12}$$

$$5^2 = 1 \text{ in } \mathbb{Z}_{12}, | < 5 > | = 2$$

$$7^2 = 1, | < 7 > | = 2$$

$$11^2 = 1, | < 11 > | = 2$$

$$| < 1 > | = 1$$

$(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot)$ ist nicht zyklisch.

c) $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$

$$\mathbb{Z}_7^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, j = [j]_7$$

g	1	2	3	4	5	6
g^2	1	4	2	2	4	1
g^3	1	1	6	1	6	6
g^4	1	2	4	4	2	1
g^5	1	4	5	2	3	6
g^6	1	1	1	1	1	1

$$ord(2) = 3, ord(3) = 6, ord(6) = 2 \text{ in } \mathbb{Z}_7^*$$

$$< 3 >= G$$

Satz 2: Ist $(G, \cdot)$ eine zyklische Gruppe und $|G| = m, G =< g >$, so ist

$$m = ord(g) = Min\{j \in \mathbb{N} | g^j = 1\}$$

und

$$g^j = 1 \Leftrightarrow \; ord(g)|j$$

und

$$ord(g^j) = \frac{m}{d} \text{ mit } 1 \leq d \in ggT(j, m)$$

G hat zu jedem Teiler t von m genau eine Untergruppe U mit $|U| = t$ und zwar

$$U = g^{\frac{m}{t}}, < g^j >= G \Leftrightarrow \; 1 \in ggT(j, m), m = \sum_{d|m} \varphi(d)$$

$\varphi(d) =$ Anzahl der Elemente in G mit Ordnung d

Beweis: Da $|G| = m < \infty$ gibt es $i < j$ mit

$$g^i = g^j; i, j \in \mathbb{N}$$

dann folgt

$$g^k = 1 \text{ für } k = j - i \in \mathbb{N}$$

Sei $n = Min\{k \in \mathbb{N} | g^k = 1\}$ Dann ist $|\{1, g, \ldots, g^{n-1}\}| = n$
Ist $j \in \mathbb{Z}$, so gibt es $q, r \in \mathbb{Z}$ mit

$$j = qn + r \text{ und } r \in \{0, \ldots, n-1\}$$

Es folgt

$$g^j = \underbrace{(g^n)^q}_{=1} \cdot g^r = g^r \in \{1, g, \ldots, g^{n-1}\}$$

Also

$$G = \{1, g, \ldots, g^{n-1}\}, n = m$$

und

$$g^j = 1 \Leftrightarrow \; r = 0 \Leftrightarrow \; j = qn \Leftrightarrow \; n|j$$

$$(g^i)^j = g^{ij} = 1 \Leftrightarrow \; m|ij \Leftrightarrow \; \frac{m}{d}|j \text{ für } d \in ggT(i, m)$$

Also $ord(g^i) = \frac{m}{d}$
Sei $U \leq G, |U| = t$, nach Lagrange gilt: $t|m$
Sei $d = Min\{j \in \mathbb{N} | g^j \in U\}$

Behauptung: $< g^d >= U$
$\subseteq$: trivial

$\supseteq$: Sei $g^J \in U$ beliebig
Es gibt dazu $q, r \in \mathbb{Z}$ mit

$$j = qd + r \text{ und } r \in \{0, \ldots, d-1\}$$

$$g^j \in U, (g^d)^q = g^{dq} \in U$$

also

$$g^{j-qd} = g^r \in U$$

also $r = 0$

$$g^j = (g^d)^q \in < g^d >$$

$$ord(g^d) = |U| = t = \frac{m}{d}$$

Also

$$U =< g^{\frac{m}{t}} >$$

$$< g^i >= G \Leftrightarrow \; ord(g^i) = m \Leftrightarrow \; 1 \in ggT(m, i)$$

Folgerung: Ist $|G| = n$ und $g \in G, (G, \cdot)$ Gruppe, so ist $g^n = 1$

Beweis:

$$< g > \leq |G| = n$$

$$ord(g) = |< g >|||G| = n = ord(g) \cdot q$$

$$1 = g^{ord(g)}, \text{ also } 1 = 1^q = g^{ord(g) \cdot q} = g^n$$

Satz von Euler: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit $1 \in ggT(a, n)$ gilt

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \bmod n$$

Beweis: $[a]_n \in \mathbb{Z}_n^*$ nach Voraussetzung

$$1 = [a]_n^{|\mathbb{Z}_n^*|} = [a_n]_n^{\varphi(n)} = [a^{\varphi(n)}]_n$$

d.h. $n | a^{\varphi(n)} - 1$

Beispiel: Was sind die letzten 3 Ziffern von $b = 7^{123785648801}$?
Antwort: 007

Beweis: $b \equiv 7 \bmod 1000$

$$ggT(7, 1000) = 1 \Rightarrow 7^{\varphi(1000)} \equiv 1 \bmod 1000$$

$$\varphi(1000) = \varphi(10^3) = \varphi(2^3 \cdot 5^3) = (2-1) \cdot 2^2 \cdot (5-1) \cdot 5^2 = 400$$

$$\Rightarrow 7^{400} \equiv 1 \bmod 1000$$

$$123785648801 = q \cdot 400 + 1$$

$$b \equiv 7 \bmod 1000$$

Kleiner Satz von Fermat:(nicht: "Satz vom kleinen Fermat")
Ist p Primzahl und $a \in \mathbb{Z}$ beliebig, so ist

$$a^p = a \bmod p$$

Beweis: Falls $p|a$, dann auch $p|a^p$ und $p|a^p - a$
sonst $p \not| a$ und $1 \in ggT(p, a)$

$$\text{nach Euler } a^{\varphi(p)} \equiv 1 \bmod p$$

$$\varphi(p) = p - 1 \Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \bmod p \Leftrightarrow a^p \equiv a \bmod p$$

(22.06.01)

Satz von Lagrange:

$$H \leq G \Rightarrow |G| = |H| \cdot [G : H]$$

Satz 2: Ist $G =< g >, |G| = m$, so ist

$$ord\ g = |< g >| = Min\{j|g^j = 1\}$$

$$ord\ g^i = \frac{m}{d}, d \in ggT\{m, i\}$$

$$|\{g^i|ord\ g^i = d\}| = \varphi(d) \text{ für } d|m$$

Folgerung: $g \in G, G$ beliebig, $|G| = m < \infty$

$$\Rightarrow g^{|G|} = 1$$

Satz von Euler:

$$G = \mathbb{Z}_m^* \Rightarrow a^{\varphi(m)} = 1, \forall a \in \mathbb{Z}_m^*$$

Kl. Satz von Fermat: Spezialfall $m = p$ Primzahl

(Ende Wiederholung)

Folgerung:(Primzahltest) Ist $p \in \mathbb{N}$ und gibt es $1 < a < p$ mit $a^{p-1} \not\equiv 1 \bmod p$, so ist p keine Primzahl.

Beweis: Wäre p Primzahl, so wäre $\varphi(p) = p - 1$ und $1 \in ggT(a, p)$ und nach Euler oder Fermat

$$a^{p-1} = 1 \bmod p$$

Beispiel:

$$f_i = 2^{(2^i)} + 1$$

i	0	1	2	3	4	$\overbrace{5 \ldots 11}^{\text{Faktoren bekannt}}$	$\ldots 23$
f_i	3	5	17	257	65537	keine Primzahl	

Wende Folgerung an mit $a = 3$

$$[a^{f_i - 1}]_{f_5} = [a^{(2^{32})}]_{f_5}$$

mit 32 Multiplikationen und < 32 Divisionen mit Rest

$$= [302906160]_{f_5} \neq [1]_{f_5}$$

$\Rightarrow f_5$ keine Primzahl

Beispiel zu Satz 2: $G =< g >, |G| = 12$
dann ist

$$\left.\begin{array}{llll} d = ord\ g^i & = 12 \text{ für } i = 1, 5, 7, 11 & , \varphi(d) = 4 \\ ord\ g^i & = 6 \text{ für } i = 2, 10 & , \varphi(d) = 2 \\ ord\ g^i & = 4 \text{ für } i = 3, 9 & , \varphi(d) = 2 \\ ord\ g^i & = 3 \text{ für } i = 4, 8 & , \varphi(d) = 2 \\ ord\ g^i & = 2 \text{ für } i = 6 & , \varphi(d) = 1 \\ ord\ g^i & = 1 \text{ für } i = 12 & , \varphi(d) = 1 \end{array}\right\} \sum = 12$$

Satz 5: Äquivalent sind für eine endliche Gruppe G mit $|G| = m$

a) G ist zyklisch

b) für $1 \leq \ d|m$ ist $|\{g \in G|g^d = 1\}| = d$

c) für $1 \leq \ d|m$ ist $|\{g \in G|ord\ g = d\}| = \varphi(d)$

Beweis: a) $\Rightarrow$ b)
Sei $1 \leq d|m$

$$|\{g \in G|g^d = 1\}| = |\{g \in G|ord\ g|d\}| \overset{\text{Satz 2}}{=} \varphi(d) = \sum_{c|d} \varphi(c) = d$$

b) $\Rightarrow$ c) jetzt $|G| = m, G$ beliebig, $1 \leq d|m$

$$f(d) = |\{g \in G|ordg = d\}|$$

$$d \overset{\text{Vor.}}{=} |\{g \in G|g^d = 1\}| = \sum_{c|d} f(c)$$

Möbiusinversion

$$f(d) = \sum_{c|d} \mu(c)\frac{d}{c} = \varphi(c)$$

c) $\Rightarrow$ a) $\varphi(m) \geq 1$, also gibt es nach Vor. c) ein Element g mit $< g >= G$

Beispiel: (Pseudozufallszahlen, Fortsetzung von 2.3)

$$z_0 = 0, z_n = az_{n-1} + c \text{ in } \mathbb{Z}_m$$

a und c sind so zu bestimmen, daß

$$\mathbb{Z}_m = \{[z_n]_m | 0 < n < m - 1\} \tag{2.4}$$

Wende Chin. Restsatz an

$$\mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_r^{k_r}}$$

falls

$$m = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}, p_i \neq p_j \text{ für } i \neq j, p_i \text{ Primzahl}$$

(2.4) gilt genau dann, wenn

$$\mathbb{Z}_{p_i^{k_i}} = \{[z_n]_{p_i^{k_i}} | 0 < n < p_i^{k_i} - 1\} \text{ für } i = 1, 2, \ldots, r$$

OBdA: $m = p^k$ für eine Primzahl p
In 2.3 war Rekursion aufgelöst

$$z_n = c(1 + a + \ldots + a^{n-1}) \text{ in } \mathbb{Z}_n$$

$$(2.4) \ \Leftrightarrow \ c \in \mathbb{Z}_n^* \text{ und } \mathbb{Z}_m = \{(1 + a + \ldots + a^{n-1}) | 0 < n < m - 1\}$$

Insbesondere folgt

$$0 = (1 + a + \ldots + a^{m-1})$$

$$0 = (1 + a + \ldots + a^{m-1})(a - 1) = a^m - 1$$

Also $a^m = 1$, also $a \in \mathbb{Z}_m^*$, also $ord\ a|m$ und nach Lagrange:

$$ord\ a|\ |\mathbb{Z}_m^*| = \varphi(m) \cdot p^{k-1} \cdot (p - 1)$$

also $ord\ a|p^{k-1}$

Fall: $p \neq 2$
Zeige: $\mathbb{Z}^*_{p^k}$ ist zyklisch.

$$ord\ [p+1]_m = p^{k-1}$$

also

$$[a]_m = [p+1]^j_m$$

also

$$p|a-1$$

Folgerung: Damit (2.4) gilt, müssen a und c die folgenden Bedingungen erfüllen

a) $1 \in ggT(m,c)$

b) Ist $2 \neq p|m$, so muß $p|a-1$

c) Ist $2|m$, so muß $4|a-1$

Umgekehrt folgt aus a) bis c): a und c erfüllen (2.4)
(siehe auch: Knuth, The art of computer programming II, Kap. I)

Es sei $(C, \cdot, ^{-1}, 1)$ beliebige Gruppe und $\sim$ sei eine Kongruenzrelation, d.h. $\sim$ ist Äquivalenzrelation und

$$a \sim b \Rightarrow a^{-1} \sim b^{-1}$$

$$a \sim b, c \sim d \Rightarrow a \cdot c \sim b \cdot d$$

für alle $a, b, c, d \in G$
Setze

$$H := [1]_\sim = \{h \in G | h \sim 1\}$$

weil $\sim$ reflexiv, ist $1 \in G$.
Ist $h \in H$, also $h \sim 1$, so folgt $h^{-1} \sim 1^{-1} = 1$, also $h^{-1} \in H$
Sind $h, h' \in H$, also $h \sim 1$ und $h' \sim 1$, so folgt $h \cdot h' \sim 1 \cdot 1 = 1$, d.h. $h \cdot h' \in H$
Also ist $H \leq G$ "Unterguppe" Sei $h \in H, g \in G$, also $h \sim 1, g \sim g$
dann folgt

$$h \cdot g \sim 1 \cdot g = g$$

$$g^{-1} \sim g^{-1}$$

und hieraus

$$g^{-1} \cdot (h \cdot g) \sim g^{-1} \cdot g = 1$$

also

$$g^{-1} \cdot h \cdot g \in H$$

Definition: Eine Untergruppe H von G heißt Normalteiler, (in Zeichen "$H \trianglelefteq G$"), wenn für alle $g \in G, h \in H$ gilt

$$g^{-1} \cdot h \cdot g \in H$$

oder

$$g^{-1} \cdot H \cdot g = H$$

oder

$$H \cdot g = g \cdot H$$

Dabei ist: $g \cdot H$ Linksnebenklasse, $H \cdot g$ Rechtsnebenklasse

Satz 6: Ist $\sim$ eine Kongruenzrelation auf G, so ist

$$[1]_\sim = H \trianglelefteq G$$

Umgekehrt ist $H \trianglelefteq G$, so wird durch

$$a \sim b \overset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow} a^{-1} \cdot b \in H$$

eine Kongruenzrelation definiert.

Beispiel: $G = S_3$ sym. Gruppe

$$G = \{1, (12), (23), (13), (123), (132)\}$$

$$|G| = 6 = 2 \cdot 3$$

(Hier bekam Hr. Pahlings einen LISP-Anfall und klammerte alles, was sich mit 3 Zahlen schreiben lässt. Wer das ganze logisch sinnvoll aufschreiben konnte, möge sich bei mir melden. Danke.)

$$H nicht \trianglelefteq G$$

$$H \cdot < (123) >= 1 \cdot H = H \cdot 1$$

$$(12)H = G \backslash H = H(12)$$

$$< (123) > \trianglelefteq G$$

Bemerkung: Ist G abelsch und $H \leq G$, so ist $H \trianglelefteq G$

2.9 Euklidische Körper und Codes

Satz 1:

a) Ist K euklidischer Körper, so gilt:

$$p = Min\{j \in \mathbb{N} | j \cdot 1 = \underbrace{1 + \ldots + 1}_{j} = 0\}$$

ist eine Primzahl und $|K| = p^n$.
p heißt Charakteristik von K und es gilt

$$p \cdot a = 0 \text{ und } (a + b)^p = a^p + b^p \text{ für alle } a, b, \in K$$

b) Die multiplikative Gruppe $(K^*, \cdot)$ ist zyklisch

Beweis:

a) $\psi : \mathbb{Z} \to K : j \mapsto j \cdot 1$ ist Ringhomomorphismus
$Bild\ \psi \simeq \mathbb{Z}/Kern\ \psi$ Homomorphiesatz
$Kern\ \psi \trianglelefteq \mathbb{Z}$, also existiert $p \in \mathbb{N}$ mit $Kern\ \psi = p\mathbb{Z}$

$$p = Min\{j \in \mathbb{N} | j \cdot 1 = 0\}$$

Wäre p keine Primzahl, so hätte $Bild\ \psi \simeq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ Nullteiler. Widerspruch!

$$K \geq K_p = Bild\ \psi \simeq \mathbb{Z}_p$$

Körper K kann man also als K_p-Vektorraum auffassen , $dim_{K_p} K = n$
so hat K p^n Elemente, d.h. $|K| = p^n$

$$a \in K, p \cdot a = p \cdot 1 \cdot a = 0 \cdot a = 0$$

$$(a+b)^p = \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} a^j b^{p-j}$$

für $j = 1, 2, \cdot, p-1$ ist

$$p | \binom{p}{j} = \frac{p(p-1) \cdot \ldots \cdot (p-j+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot j}$$

da $pa^j b^{p-j} = 0$ in K, ist $\binom{p}{j} a^j b^{p-j} = 0$ für $j = 1, 2, \ldots, p-1$
also $(a+b)^p = a^p + b^p$

b) $|K| = p^n$, dann ist $|K^*| = p^n - 1$
Nach Lagrange gilt für jedes $\alpha \in K^*$

$$\alpha^{p^n - 1} = 1$$

Also ist jedes $\alpha \in K^*$ Nullstelle von

$$x^{p^n - 1} - 1 = \prod_{\alpha \in K^*} (x - \alpha) \in K[x]$$

Ist $m \mid |K^*| = p^n - 1 = m \cdot q$ mit $q \in \mathbb{N}$, so ist

$$x^{p^n - 1} - 1 = (x^m - 1)(1 + x^m + \cdot + x^{(q-1)m})$$

Also hat $x^m - 1$ in K^* genau m Nullstellen

$$|\{\alpha \in K^* | \alpha^m = 1\}| = m$$

Nach Kap. 2.8, Satz 3 folgt K^* ist zyklisch.

Bemerkung: Ist $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ irreduzibel in $Grad\ f = n$, so ist $\mathbb{Z}_p[x]/f\mathbb{Z}_p[x]$ Körper mit p^n Elementen. Frage: Gibt 's das immer?

Satz 2: Ist p Primzahl und

$$Irr_n(\mathbb{Z}_p) = \{f \in \mathbb{Z}_p[x] | f \text{ irred.}, Grad\ f = n, f \text{ normiert}\}$$

so ist für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$x^{p^n} - x = \prod_{d|n} \prod_{f \in Irr_d(\mathbb{Z}_p)} f \in \mathbb{Z}_p[x] \tag{2.5}$$

$$N_n(p) = |Irr_n(\mathbb{Z}_p)| = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) p^{\frac{n}{d}}$$

Folgerung: Zu jeder Primzahlpotenz p^n gibt es einen Körper K mit $|K| = p^n$

Beispiel: p = 2 , n = 3

$$x^{2^3} - x = x(x-1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$$

Beweis zu Satz 2:

a) **Behauptung:** Ist f irreduzibel $\in \mathbb{Z}_p[x]$ und $Grad\ f = d|n$, so ist $f|x^{p^n} - x$
Beweis: $K = \mathbb{Z}_p[x]/f\mathbb{Z}_p[x]$ ist Körper und $|K| = p^d$

$$\alpha^{p^d-1} = 1, \alpha^{p^d} = \alpha \text{ für alle } \alpha \in K*$$

Speziell für $\alpha = [x]_f$ erhält man

$$[x^{p^d}]_f = [x]_f \text{ also } f|x^{p^d} - x$$

(wie in Satz 1) wenn $d|n$, so ist

$$x^{p^d} - 1|x^{p^n} - x$$

b) **Behauptung:** Ist $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ irred. und $f|x^{p^n} - x$, so ist

$$d = Grad\ f|n$$

Beweis: $n = qd + r$ mit $0 \leq r < d, q \in \mathbb{Z}$
Behauptung: $r = 0, K = K[x]/fK[x], |K| = p^d$

$$[x]_f^{p^d} = [x]_f \text{ wie in a)}$$

Außerdem:

$$[x]_f^{p^n} = [x]_f$$

weil nach Voraussetzung $f|x^{p^n} - x$
daher

$$[x]_f^{p^n} = [x]_f \text{ wobei } n = dq + r$$

$$K \ni \left[\sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i\right]_f^{p^r} = \left(\sum_{i=0}^{d-1} [a_i x^i]_f\right)^{p^r}$$

nach Satz 1 a)

$$= \sum_{i=0}^{d-1} [a_i^{p^r} x^{i^{p^r}}]_f = \left[\sum_{i=0}^{d-1} a_i (x^{p^r})^i\right]_f = \underbrace{\left[\sum_{i=0}^{d-1} a_i x^i\right]_f}_{\alpha}$$

jedes $\alpha \in K$ erfüllt $\alpha^{p^r} = \alpha$, ist also Nullstelle von $x^{p^r} - x$, hat aber höchstens $Grad\ (x^{p^r} - x)$ Nullstellen. Also $r = 0$
Behauptung: Es gibt kein irreduzibles Polynom $f \in \mathbb{Z}_p[x]$ mit

$$f^2|x^{p^n} - x$$

Beweis: Angenommen

$$x^{p^n} - x = f^2 \cdot g = f \cdot (f \cdot g)$$

Wende formale Ableitung an

$$D(x^{p^n} - x) = p^n x^{p^n-1} - 1 = -1 \text{ in } \mathbb{Z}_p[x]$$

$$D(f \cdot (fg)) = f \cdot D(fg) + D(f) \cdot fg = f(D(fg) + D(f) \cdot g)$$

Also $f| - 1$, f Einheit in $\mathbb{Z}_p[x]$ nicht irred.

c) Damit ist 2.5 bewiesen, berechne $Grad$

$$Grad\ (x^{p^n}-x)=p^n=\sum_{d|n}\sum_{f\in Irr_d(\mathbb{Z}_p)} Grad\ f=\sum_{d|n} N_d(p)d$$

$$p^n=\sum_{d|n} dN_n(p)$$

und Kap. 2.7 Möbiusinversion

$$nN_n(p)=\sum_{d|n}\mu(d)p^{\frac{n}{d}}$$

Beweis der Folgerung:

$$N_n(p)=\frac{1}{n}\left[1p^n+\sum_{1\neq d|n}\mu(d)p^{\frac{n}{d}}\right], \mu(d)\in\{0,1,-1\}$$

$$\geq\frac{1}{n}\left[p^n-\sum_{1\neq d|n}p^{\frac{n}{d}}\right]\geq\frac{1}{n}[p^n-(p+p^2+\ldots+p^{n-1})]>0$$

Satz 3: Je zwei Körper mit p^n Elementen sind isomorph. Bezeichnung für einen Körper mit p^n-Elementen ist $GF(p^n)$ ("Galois-Feld")

Beweis: Ist $f\in Irr_n(\mathbb{Z}_p)$ und K ein beliebiger Körper mit $|K|=p$
Behauptung:

$$K\simeq\mathbb{Z}_p[x]/f\mathbb{Z}_p[x]$$

Beweis: Nach Satz 2 enthält K eine Nullstelle von f

$$\psi:\mathbb{Z}_p[x]/f\mathbb{Z}_p[x]\to K:\left[\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i\right]_f\mapsto\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i, a_i\in\mathbb{Z}_p$$

ist Isomorphismus.

Anwendungen von endl. Körpern, z.B. Kodierungstheorie
Problem: Nachricht $\overset{Kodierung}{\to}$ Codeworte $\overset{Senden}{\to}$ Codeworte + Fehler $\overset{Dekodierung}{\to}$
Aufgabe: Bestimme Code so, daß k Fehler korrigiert oder erkannt werden
linearer (n,k)-Code = Teilraum C von $\mathbb{Z}_2^n$ der Dimension k

$$v,w\in\mathbb{Z}_2^n\Rightarrow d(x,y)=|\{i\in\{1,\ldots,n\}|v_i\neq w_i\}|\text{"Hamming-Abstand"}$$

$$d=Min\{d(v,w)|v,w\in C\}=\text{ Minimaldistanz von } C$$

Ist $d=2e+1$, so kann C bis zu e Fehler korrigieren und bis zu $2e$ Fehler entdecken.

(04.07.01)

K endlicher Körper, in der Regel ist $K=\mathbb{Z}_2(K=GF(2^m))$
Ein **linearer** (n,k)-Code ist ein Teilraum C von K^n mit $dim\ C=k$

$$d(v,w)=|\{i|v_i\neq w_i\}|=d(v-w,0)$$

C wird durch Generatormatrix $G(C)$ angegeben, $G(C)\in K^{k\times n}$ mit Zeilen = Basisvektoren von C
Kontrollmatrix $H=H(C)\in K^{n-k,n}$

$$C=\{c\in K^n|H\cdot c^{tr}=0\}$$

(In LA I wurde die Transponierte mit ^{tr} bezeichnet, dies übernehme ich, da die meisten Leser wohl auch LA I gehört haben. Das Zeichen ^{T} wurde damals im Bereich der Orthogonalräume verwendet. Anm. des Autors)
Ist $c' \in K^n$ gegeben, dann ist c' genau dann ein Codewort, wenn $Hc'^{tr} = 0$, Hc'^{tr} heißt Syndrom
C zyklischer Code $\Leftrightarrow$ C linearer (n,k)-Code mit

$$c = (c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) \in C \Rightarrow V(c) = (c_{n-1}, c_0, \ldots, c_{n-2}) \in C$$

$$\psi : K^n \to K[x]/(x^n - 1)K[x] = K[x]/(x^n - 1) : (c_0, \ldots, c_{n-1}) \mapsto \left[\sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i\right]_{(x^n-1)}$$

$$\psi(v(c)) = [x]_{(x^n-1)} \cdot \psi(c)$$

Bemerkung: $C \leq K^n$ linearer Code ist zyklisch $\Leftrightarrow$ $\psi(c) \trianglelefteq K[x]/(x^n - 1)$ (Ideal)
Was sind die Ideale in $K[x]/(x^n - 1)$?
Angenommen $I \trianglelefteq K[x]/(x^n - 1)$

$$J = \{f \in K[x] | [f]_{x^n-1} \in I\} \trianglelefteq K[x]$$

$$= gK[x] \text{ für ein } g \in K[x]$$

$$x^n - 1 \in J \text{ , also } g | x^n - 1$$

Lemma 1: Ist C ein zyklischer (n,k)-Code ($C \neq \{0\}$), so gibt es ein normiertes $g \in K[x]$ mit $g|x^n - 1$ "Generatorpolynom" von C mit

$$\psi(c) = \{[f \cdot g]_{x^n-1} | f \in K[x]\} \leq K[x]/(x^n - 1)$$

Es ist $Grad\ g = n - k$
Es gibt genau soviele zyklische Codes der Länge n wie $x^n - 1$ in $K[x]$ an Teilern hat.

Beispiel: $K = \mathbb{Z}_2, n = 7 = 2^3 - 1$

$$x^7 - 1 = (x+1)(x^3 + x + 1)(x^3 + x^2 + 1)$$

Wähle $g = x^3 + x + 1$

$$G(C) = \begin{bmatrix} 1101000 \\ 0110100 \\ 0011010 \\ 0001101 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to [g]_{x^7-1} \\ \to [xg]_{x^7-1} \\ \to [x^2 g]_{x^7-1} \\ \to [x^3 g]_{x^7-1} \end{array}$$

Beachte: 1000110$\to$ $[x^4 g]_{x^7-1} = [g] + [xg] + [x^2 g]$

$$dim\ C = 4 = 7 - Grad\ g$$

Beweis:(des Lemmas)

$$x^n - 1 = gh \text{ mit } h = \sum_{i=0}^{k} h_i x^i, h_k = 1$$

$$Grad\ g + k = n$$

$$[g], [xg], \ldots, [x^{k-1} g] \text{ in } K[x]/x^n - 1 \text{ lin. unabh.}$$

$$0 = [x^n - 1] = [gh] = [x^k g + \sum_{i=0}^{k-1} h_i x^i g] = [x^k g]$$

$$= -\sum_{i=0}^{k-1} h_i [x^i g] \in < [g], [xg], \ldots, [x^{k-1} g] >$$

$$dim\ C = k$$

Beispiel:

$$x^7 - 1 = g \cdot h, h = (x+1)(x^3 + x^2 + 1) = x^4 + x^2 + x + 1$$

$$[x^4 g] = [g] + [xg] + [x^2 g]$$

C hat Minimaldistanz 3
Nachricht sei $w = 1001 = 1 + x^3$
Codierung: $C = w \cdot g = (1 + x^3)(1 + x + x^3) = x^6 + x^4 + x + 1 = 1100101$
Senden $\to$ Empfangen: $c' = 1101101 = x^6 + x^4 + x^3 + x + 1$
Fehlerkorrektur/erkennung: Teile mit Rest durch g. Äquivalent: Setze in c' das Element $\alpha = [x]_g \in K[x]/(g)$ ein.

$$c'(\alpha) = 1 + [x]_g + [x^3]_g + [x^4]_g + [x^6]_g = [x^6 + x^4 + x^3 + x + 1]_g$$

$$= x^3(x^3 + x + 1) + x + 1 = [x+1]_g = \alpha^j, j = \lg_\alpha [x+1] = 3$$

Fehler an Position 3
$c' = c + e$, Fehlerpolynom $e = x^i$
$c'(\alpha) = \underbrace{c(\alpha)}_{=0} + \alpha^j$, falls nur ein Fehler gemacht wurde
Korrektur: $c'' = c' + x^3 \leftrightarrow\ 1100101 = c\, w'$: teile c durch g , $c = g(1+x^4)$, $w = 1001$

Bemerkung: Ist $L = GF(p^n)$, so gilt für jedes $\beta \in L$, $(K[x]/(f), f$ irred. $\in K[x]$ vom $Grad\ n)$

$$\beta^{p^n} = \beta \text{ , d.h. } x^{p^n} - x = \prod_{\beta \in L} (x - \beta) \in L[x]$$

$$= \prod_{d|n} \prod_{f \in Irr_d(K)} f, Irr_d(K) = \{f \in K[x], Grad\ f = d, f \text{ irred.}, f \text{ normiert}\}$$

Also: Zu jedem β ex. genau ein normiertes, irred. Polynom (vom $Grad\ d|n$) mit $f(\beta) = 0$
Dieses (eindeutig bestimmte) Polynom heißt Minimalpolynom von β, in Zeichen: $f_\beta \in K[x]$

$$L^* = L \backslash \{0\} =< \alpha > \text{ für ein } \alpha \in L$$

Satz 1: Ist $n = p^r - 1$,(p Primzahl, $p = 2$), $t < n - 1, t \in \mathbb{N}$
$L = GF(p^n)$ und $L^* =< \alpha >$

$$g = kgV\{f_{\alpha^i} | 1 \leq i \leq t\} \in K[x]$$

dann ist $g | x^n - 1$ und ist C der zyklische Code mit Generatorpolynom g hat Minimaldistanz $\geq t + 1$

Beispiel: (s.o.)

$$n = 7 = 2^3 - 1, g = x^3 + x + 1 = f_\alpha = f_{\alpha^2}$$

$$\alpha = [x]_g \in K[x]/(g) = L, < \alpha >= L^*$$

Setze $t = 2$

$$g = kgV\{f_\alpha, f_{\alpha^2}\}$$

Also Minimaldistanz von C ist nach Satz 1 $\geq t + 1 = 3$

Beweis:

$$g = \sum_{i=0}^{m} g_i x^i = kgV\{f_\alpha, \ldots, f_{\alpha^t}\}$$

$$\psi(C) = \{[f]_{x^n-1} |\ g|f \Leftrightarrow\ f(\alpha) = f(\alpha^2) = \ldots = f(\alpha^t) = 0\}$$

Also

$$C = (c_0, \ldots, c_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i x^i \in C \Leftrightarrow c(\alpha) = c(\alpha^2) = \ldots + c(\alpha^t) = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \ldots & \alpha^{n-1} \\ 1 & \alpha^2 & (\alpha^2)^2 & \ldots & (\alpha^2)^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \alpha^t & \alpha^{2t} & \ldots & \alpha^{(n-1)t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\alpha) \\ c(\alpha) \\ \vdots \\ c(\alpha^t) \end{bmatrix} = 0$$

Angenommen $Jc \in C$ mit $\alpha(c, 0) \leq t, c_i = 0$ außer für $i \notin \{j_1, \ldots, j_t\}, 0 \leq j_1 < \ldots < j_t \leq n - 1$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \alpha^{j_1} & \alpha^{j_2} & \ldots & \alpha^{j_t} \\ \alpha^{2j_1} & \alpha^{2j_2} & \ldots & \alpha^{2j_t} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha^{tj_1} & \alpha^{tj_2} & \ldots & \alpha^{tj_t} \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} c_{j_1} \\ \vdots \\ c_{j_t} \end{bmatrix} = 0$$

$$det\ M = \alpha^{j_1} \cdot \alpha^{j_2} \ldots \alpha^{j_t} det \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \alpha^{j_1} & \alpha^{j_2} & \ldots & \alpha^{j_t} \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha^{j_1(t-1)} & & \ldots & \alpha^{j_t(t-1)} \end{bmatrix} = \alpha^{j_1} \ldots \alpha^{j_t} \prod_{j_i < j_k} (\alpha^{j_i} - \alpha^{j_k} \neq 0$$

$\Rightarrow c = 0$

(06.07.01)

Definition: Ein Reed-Solomon Code der Länge $n = 2^r - 1$ über $K \leq GF(2^r)$ mit Plandistanz (designed distance) t ist ein Code

$$C = \{c = [c_0, \ldots, c_{n-1} | c(\alpha) = c(\alpha^2) = \ldots = c(\alpha^t) = 0\}$$

wobei $< \alpha >= (GF(2^r))^*$

Bemerkung: C ist ein zyklischer Code mit Generatorpolynom $g = kgV(f_{\alpha^i} | 1 \leq i \leq t)$
$f_{\alpha^i} \in K[x]$ Minimalpolynom von α^i
C hat Minimaldistanz $\geq t + 1$
Ist $t = 2t'$, so kann C t' Fehler korrigieren oder $2t'$ Fehler erkennen.

Beispiel: $K = \mathbb{Z}_2, n = 15 = 2^4 - 1$

$$x^{15} - 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)\underbrace{(x^4 + x + 1)}_{f}(x^4 + x^3 + 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$$GF(2^4) = K[x]/(x^4 + x + 1), \alpha = [x]_f$$

$$f_\alpha = x^4 + x + 1 = f_{\alpha^2} = f_{\alpha^4}, ord\ \alpha = 15$$

$$f_{\alpha^3} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, ord\ \alpha^3 = 5$$

$$\alpha^3 \text{ Nullstelle von } x^5 + 1 = (x+1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

$g_1 = f_\alpha \cdot f_{\alpha^3} = x^8 + \ldots$ ist Generatorpolynom eines zyklischen Codes C_1, $(15,7)$-Code

$$dim\ C_1 = 7, |C_1| = 2^7$$

$$C = \{c = [c_0, \ldots, c_{n-1}] | c(\alpha) = c(\alpha^2) = c(\alpha^3) = c(\alpha^4)\}$$

Minimaldistanz ≥ 5 , also 2 Fehler korrigierend

$$ord\ \alpha^5 = 3 \text{ , also ist } \alpha^5 \text{ Nullstelle von } x^3 + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1)$$

$$f_{\alpha^5} = x^2 + x + 1$$

$$f_{\alpha^6} = f_{\alpha^3}$$

Setzt man $g_2 = f_\alpha \cdot f_{\alpha^3} \cdot f_{\alpha^5} = x^{10} + \ldots$, so ist g_2 Generatorpolynom eines Codes $C_2, (15,5)$-Code

$$dim\ C_2 = 5 \text{ , Minimaldistanz } \geq 7$$

Bei CD's werden Reed-Solomon Codes verwendet mit $n = 2^8 - 1$ und Plandistanz 5

Um Fehlerbündel zu korrigieren, speichere Information in $N \times n$-Matrizen und transponiere (oder sende spaltenweise)

Kapitel 3

Graphen

3.1 Grundbegriffe

Definition 1: Ein Graph $G = (V, E)$ ist eine endliche, nichtleere Menge V (von "Knoten" oder "Vertices") mit $E \subseteq \binom{V}{2} = \{M \subseteq V|\ |M| = 2\}$ Die Elemente von E heißen Kanten ("edges")

Beispiele:

a) $V_n = (V = \{1, \ldots, n\}, \binom{V}{2})$ vollständiger Graph mit n Kanten

b) $V = \{1, 2, 3, 4\}, E = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}, \{2, 4\}\}$
Beschreibung eines Vierecks mit zusätzlicher Diagonale zwischen 2 und 4

Definition: Ist $G = (V, E)$ ein nummerierter Graph

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\}, E = \{e_1, \ldots, e_m\}$$

so heißt die Matrix

$$A = [a_{ij}] \in \mathbb{Z}^{n \times n} \text{ mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } \{v_i, v_j\} \in E \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Adjazenzmatrix von G, und die Matrix

$$B = [b_{ij}] \in \mathbb{Z}^{n \times m} \text{ mit } b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } v_i \in e_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Inzidenzmatrix

Beispiel: (Fortsetzung von b)

$$A = \begin{bmatrix} 0101 \\ 1011 \\ 0101 \\ 1110 \end{bmatrix}$$

Allgemein: A ist immer symmetrisch und die Hauptdiagonale besteht aus Nullen.

$$B = \begin{bmatrix} 10010 \\ 11001 \\ 01100 \\ 00111 \end{bmatrix}$$

$$B \cdot B^{tr} = \begin{bmatrix} 2101 \\ 1311 \\ 0121 \\ 1113 \end{bmatrix} = A + diag(2,3,2,3)$$

Definition: Ist $G = (V, E)$ Graph und $v \in V$, so sei

$$d(v) = deg(v) = |\{e \mid v \in e\}| \text{ Grad des Knoten } v$$

Im Beispiel b) ist $d(1) = 2, d(2) = 3, d(3) = 2, d(4) = 3$

Bemerkung: Ist A Adjazenzmatrik und B Inzidenzmatrix eines nummerierten Graphen, so ist

$$B \cdot B^{tr} = A + diag(d(v_1), \ldots, d(v_n))$$

Beweis: Für $i \neq j$:

$$(BB^{tr})_{ij} = \left(\sum_{k=1}^{m} \underbrace{b_{ik} b_{jk}}_{\neq 0 \text{ nur für } e_k = \{v_i, v_j\}} \right)_{ij} = A_{ij}$$

Für $i = j$:

$$(BB^{tr})_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik} b_{ik} = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{b_{ik}}_{=1 \Leftrightarrow \ v_i \in e_k}$$

Variationen:

- Multigraphen ("Mehrfachkanten"): A_{ij} kann größer als 1 werden
- Graphen mit Schleifen: A_{ii} kann $\neq 0$ sein
- Gerichtete Graphen: (V, E), wobei

  $$E \subseteq V \times V = \{ \underbrace{(v_1, v_2)}_{\text{Kante von } v_1 \textbf{ nach } v_2} \mid v_1, v_2 \in V\}$$

  Dann ist A nicht notwendig symmetrisch.

Lemma 1:(Handschlag-Lemma von Euler) Ist (V, E) ein Graph (im Sinne von Definition 1), so gilt

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|$$

Beweis:

$$\sum_{v \in V} d(v) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\sum_{j=1}^{m} b_{ij}}_{=2} = 2 \cdot m = 2 \cdot |E|$$

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\}, E = \{e_1, \ldots, e_m\}, [b_{ij}] = \text{ Inzidenzmatrix}$$

(11.07.01)

$G = (V, E), \emptyset \neq V$ endliche Menge von "Knoten"

$$E \subseteq \binom{V}{2} = \{\{v, v'\} \mid v \neq v', v, v' \in V\}$$

$$d(v) = |\{e \in E \mid v \in e\}|$$

Handschlag-Lemma von Euler:

$$\sum_{v \in V} d(V) = 2\ |E|$$

Definition: $G = (V, E)$ heißt k-regulär, wenn $d(v) = k$ für alle $v \in V$

Beispiel:

a)

$$V_n = K_n = (V, \binom{V}{2})), |V| = n$$

V_n ist $(n-1)$-regulär

b)

$$Q_n = n\text{-dimensionaler Hyperkubus } = (\mathbb{Z}_2^n, E_n)$$

$$E_n = \{\{v, v'\} \mid v \neq v' \in \mathbb{Z}_2^n, \quad \underbrace{d(v, v')}_{Hammingabstand} \quad = 1\}$$

Q_n ist n-regulär

$$|\mathbb{Z}_2|^n \cdot n = 2 \cdot |E|, |E| = n \cdot 2^{n-1}$$

Definition: Ist $G = (V, E)$ ein Graph, so ist $G' = (V', E')$ ein Teilgraph/Untergraph von G, wenn $V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E \cap \binom{V'}{2}$
G heißt induzierter Teilgraph, wenn $E' = E \cap \binom{V'}{2}$
$G' = G[V']$

3.2 Wege und Kreise

$G = (V, E)$ sei ein Graph

Definition: Ein Weg ("Kantenzug") von v nach v' in V der Länge l ist eine Folge

$$W = (w_0, w_1, \ldots, w_l) \text{ mit } w_i \in V, w_0 = v, w_l = v'$$

und

$$E(W) = \{\{w_{i-1}, w_i\} \mid 1 \leq i \leq l\} \subseteq E$$

W heißt Pfad von v nach v', wenn

$$w_i \neq w_j \text{ für } i \neq j$$

W heißt Kreis, wenn

$$w_0 = w_l \text{ und } w_i \neq w_j \text{ für } i \neq j, 0 \leq i, j \leq l-1 \text{ und } l \geq 3$$

Definition: $G = (V, E)$ heißt zusammenhängend, wenn es zu $v, v' \in V$ stets einen Pfad von v nach v' gibt.

Bemerkung:

a) Gibt es einen Weg von v nach v' in G, so auch einen Pfad

b) Definiert man auf V eine Relation

$$v \sim v' \Leftrightarrow \text{ Es gibt einen Pfad von } v \text{ nach } v'$$

so ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation
Sind $V_1, \ldots, V_s$ die Äquivalenzklassen bezüglich $\sim$, so ist

$$V = V_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} V_s \ , \ E = E \cap \binom{V_1}{2} \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} E \cap \binom{V_s}{2}$$

Die $G[V_i]$ (induzierten Teilgraphen) heißen dann (Zusammenhangs)Komponenten von G

Satz 1: $G = (V, E)$ enthält mindestens $|V| - |E|$ Komponenten. Ist G zusammenhängend, dann ist $|E| \geq |V| - 1$

Beweis: Induktion nach $|E| = m$
$m = 0$:

$$V = \dot{\bigcup_{V_i \in V}} \{V_i\} \text{ Zerlegung in Komponenten}$$

Es gibt $|V|$ Komponenten
$m > 0$: Sei $e \in E$ und $E' = E \backslash \{e\}$, also $|E'| = m - 1$
$G' = (V, E')$ hat nach Ind. Ann. $k \geq |V| - m + 1$ Komponenten
$G = (V, E)$ hat dann k oder $k - 1$, also $\geq |V| - m$ Komponenten

Adjazenzmatrix eines nummerierten Graphen

$$V = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

$$A = [a_{ij}]_n, i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ mit } a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } \{i, j\} \in E \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Satz 2: Ist $G = (V, E)$ nummerierter Graph mit Adjazenzmatrix A und ist

$$A^r = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{r} = [a_{ij}^{(r)}], r \in \mathbb{N}_0$$

so ist $a_{ij}^{(r)}$ = Anzahl der Wege von v_i nach v_j mit Länge r

Beweis: Induktion nach r
$r = 0$:

$$A^0 = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

$r > 0$:

$$W_{ij}^{(r)} = \{w = (w_0, \ldots, w_r) \mid w = \text{ Weg von } v_i \text{ nach } v_j \text{ der Länge } r\}$$

$$(w_0, \ldots, w_r) \mapsto ((w_0, w_1), (w_1, \ldots, w_r))$$

$$W_{ij}^(r) \rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} (W_{ik}^{(1)} \times W_{kj}^{(r-1)}), n = |V|$$

$$|W_{ij}^{(r)}| = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{|W_{ik}^{(1)}|}_{=a_{ik}} \underbrace{|W_{kj}^{(r-1)}|}_{=a_{kj}^{(r-1)}} = (A \cdot A_{i,j}^{r-1} = (A^r)_{i,j} = a_{i,j}^{(r)}$$

Definition: Eine Eulertour in einem Graphen $G = (V, E)$ ist ein "geschlossener" Weg

$$w = (w_o, \ldots, w_m) \text{ mit } w_0 = w_m$$

mit $E(w) = E$ und $m = |E|$, d.h. alle Kanten von G werden genau einmal durchlaufen.
G heißt eulersch, wenn es so eine Eulertour gibt.

Satz 3: Ein zusammenhängender Graph ist genau dann eulersch, wenn $d(v)$ gerade ist für alle $v \in V$

Beweis: $\Rightarrow$:
$w = (w_0, \ldots, w_m)$ sei eine Eulertour.

$$\Rightarrow E(w) = \{\{w_0, w_1\}, \{w_1, w_2\}, \ldots, \{w_{m-1}, w_m\}\}$$

Für $v \in V$ setze $n_v = |\{j \in \{0, \ldots, m-1\} \mid w_j = v\}|$, dann $d(v) = 2n_v \in 2\mathbb{N}$
$\Leftarrow$:
Algorithmus zur Konstruktion einer Eulertour: Bilde maximalen (d.h. nicht verlängerbaren) Weg

$$w = (w_0, w_1, \ldots, w_r) \text{ mit } E(w) = r$$

Behauptung: Dann muß $w_0 = w_r$ sein, denn da $d(w_r) \in 2\mathbb{N}$ gäbe es ein v mit

$$\{w_r, v\} \in E \backslash E(w)$$

und man könnte w verlängern zu $(w_0, \ldots, w_r, v\}$
Also ist $w_0 = w_r$
Ist $E(w) = E$, so ist W Eulertour, sonst gibt es $\{v, v'\} \in E \backslash E(w)$ und weil G zusammenhängend ist, gibt es $\{w_i, v\} \in E \backslash E(w)$ für ein $i \in \{0, \ldots, r-1\}$
Bilde maximalen Weg

$$w' = (w_i = w_0', w_1', \ldots, w_s') \text{ in } (V, E \backslash E(w)) \text{ mit } |E(w')| = s$$

wie oben ist $w_0' = w_s'$ Ersetze

$$w \text{ durch } w_1 = (w_0, \ldots, w_i, w_1', \ldots, w_s', w_{i+1}, \ldots, w_r) \text{ und } r \text{ durch } r + s$$

Wiederhole Algorithmus

(13.07.01)

Beispiel: Kann man alle Dominosteine in einem Rechteck auslegen?

$$D = \{\{i, j\} \mid 0 \leq i, j \leq 6\}, |D| = 28, V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$G' = (V, D) \text{ Graph mit Schleifen}$$

Gesucht: Eulertour in G' existiert genau dann, wenn Eulertour existiert im Graph ohne Schleifen

$$G' \text{ ohne Schleifen } = K_7 \text{ vollst. Graph mit 7 Knoten (6-regulär)}$$

Nach Satz von Euler existiert Eulertour

Definition: Es sei $G = (V, E)$ ein Graph. Ein Hamiltonkreis(-pfad) in G ist ein Kreis (Pfad), der alle Kanten aus V genau einmal durchläuft.
Gibt es einen Hamiltonkreis(-pfad), so heißt G (semi-)hamiltonsch.

Beispiel: Der Kubus Q_3 ist hamiltonsch.

Satz 4: Sei $G = (V, E)$ Graph, $|V| geq 3$
Gilt für $v \neq v'$ mit $\{v, v'\} \notin E$ stets

$$d(v) + d(v') \geq |V| - 1$$

so gibt es immer einen Hamiltonpfad.
Gilt sogar

$$d(v) + d(v') \geq |V|$$

gibt es stets einen Hamiltonkreis.

Beweis:

a) Aus der Voraussetzung folgt: G ist zusammenhängend.
Sonst: Wähle $v \in V_1, v' \in V_2$, wobei $V_1 \neq V_2$ Komponenten sind, dann

$$d(v) \leq |V_1| - 1, d(v') \leq |V_2| - 1$$
$$\Rightarrow d(v) + d(v') \leq \underbrace{|V_1| + |V_2|}_{\leq |V|} - 2 \leq |V| - 2$$

Widerspruch!

b) Konstruktion eines Hamiltonpfads beginnend mit beliebiger Kante $\{w_1, w_2\} \in E$

$$w = (w_1, w_2, \ldots, w_p) \text{ Pfad der Länge } p - 1 \geq 1$$

Ist $p = n = |V|$, so ist man fertig.
Sonst: $v \notin \{w_1, \ldots, w_p\}$ mit $\{v, w_p\} \in E$ oder $\{v, w_1\} \in E$, so kann man W verlängern zu $(v, w_1, \ldots, w_p)$ oder $(w_1, \ldots, w_p, v)$
Also können wir annehmen, es gibt kein

$$v \notin \{w_1, \ldots, w_p\} \text{ mit } \{v, w_p\} \in E \text{ oder } \{v, w_1\} \in E$$

Beispiel:

$$\{w_1, w_{j_1}\}, \ldots, \{w_1, w_{j_k}\}, 2 = j_1 < \ldots < j_k \leq p \Rightarrow d(w_1) = k$$

Wir finden einen Kreis, der $w_1, \ldots, w_p$ enthält
klar, wenn $\{w_1, w_p\} \in E$, sonst $j_k < p$
Ist $\{w_{j_i - 1}, w_p\} \in E$, so erhält man einen Kreis. Eine solche Kante muß existieren, denn sonst wäre

$$d(w_p) \leq p - 1 - k \text{ , also } d(w_1) + d(w_p) \leq p - 1 < |V| - 1$$

Man erhält also einen Kreis mit p Knoten

$$\exists v \notin \{v_1, \ldots, v_p\}, \text{ so } \{v, v_j\} \in E$$

Man erhält einen Pfad mit $p + 1$ Knoten $\Rightarrow$ Es gibt einen Hamiltonpfad
$\Rightarrow$ unter Benutzung $d(v_1) + d(v_n) \geq n = |V|$, so erhält man wie oben einen Hamiltonkreis.

Beispiel: 7 Prüfungen, Kein Dozent prüft mehr als 3 Mal, Gibt es eine Lösung, damit kein Dozent 2 Prüfungen hintereinander machen muß?
Graph $V = \{1, \ldots, 7\}, E = \{\{i, j\} \mid Pr_i \neq Pr_j\}, d(i) \geq 3$
Es gibt Hamiltonpfad.

(18.07.01)

3.3 Bäume und Wälder

Definition: Ein Graph $G = (V, E)$ heißt ein Baum, wenn er zusammenhängend ist und keine Kreise enthält.
Ein Graph, dessen sämtliche Komponenten Bäume sind, heißt Wald.
Ein gewurzelter Baum ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten (G, v_0)

Satz 1: Äquivalent sind für einen Graphen $G = (V, E)$

a) G ist einen Baum

b) Zu $v, v' \in V, v \neq v'$ existiert genau ein Pfad von v nach v'

c) $|E| = |V| - 1$ und G ist zusammenhängend

Beweis: a) $\rightarrow$ b): Da G zusammenhängend ist, existiert genau ein Pfad von v nach v'. Gäbe es 2 verschiedene Pfade, so erhielte man einen Kreis.
b) $\rightarrow$ a): Nach Voraussetzung ist G zusammenhängend. Wäre ein Kreis vorhanden, so erhielte man 2 Pfade von v_0 nach v_1, wenn $e = \{v_0, v_1\}$ im Kreis vorkommt
a) $\rightarrow$ c): Induktion
c) $\rightarrow$ a): Klar

Satz 2: Ist G ein zusammenhängender Graph, so erhält G einen aufspannenden Baum T, d.h. $T = (V, E')$ mit $E' \subseteq E$ und T ist Baum

Beweis:

a) Enthält G einen Kreis, so setze $T = G$, sonst wähle Kreis $(v_0, v_1, \ldots, v_n, v_0)$

$$G' = (V, E \backslash \{v_0, v_1\}) \text{ ist zusammenhängend}$$

Iteriere bis G keinen Kreis mehr enthält.

b) Algorithmus (Breitensuche)
Initiiere: $S = (v_0), v_0 \in V, V' = \emptyset, E' = \emptyset$
`while` $S \neq ()$ `do`

$$v = S[1] \text{ (erstes Element der Liste)}$$

$$E'' := \{(v, v') \in E \mid v' \notin V'\}$$

$$V' := V' \cup \{v' \mid (v, v') \in E''\} \cup \{v\}$$

$$E' := E' \cup \{\{v, v'\} \in E \mid v' \in V'\}$$

$$\text{Lösche } v \text{ in der Liste } S$$

$$\text{Hänge an } S \text{ die Liste } (v' \mid \{v, v'\} \in E'')$$

`od;`

Aufgabe: Finde alle Bäume mit Knotenmenge $(\{v_1, \ldots, v_n\}, \{1, \ldots, n\})$
Äquivalent: Finde alle aufspannenden Bäume des Graphen $(V, \binom{V}{2}) = K_n$

$$n = 2 : Ordnung = 1$$

$$n = 3 : Ordnung = 3$$

$$n = 4 : Ordnung = 16$$

Satz (Cayley): Die Anzahl aller Graphen mit $V = \{1, \ldots, n\}$ ist n^{n-2}

Beweis: Jedem Baum T auf $V = \{1, \ldots, n\}$ wird ein Element $P(T) = (t_1, \ldots, t_{n-2}) \in V^{n-2}$ zugeordnet. "Prüfercode" von T nach folgendem Algorithmus:
Gegeben: Baum T
Bemerkung: In T existiert immer ein $v_0 \in V$ mit $d(v_0) = 1$, v_0 heißt "Blatt". Wähle einen maximalen (d.h. nicht verlängerbaren) Pfad $(v_0, v_1, \ldots, v_m)$, dann ist $d(v_0) = 1 = d(v_m)$
Algorithmus: `for i in` [1, ..., n-2] `do`

$$\text{wähle kleinsten } v \in V \text{ mit } d(v) = 1$$

$$\text{Es gibt dann genau ein } v' \in V \text{ mit } \{v, v'\} \in E$$

$$\text{Setze } t_i := v'$$

$$V := V \backslash \{v\}$$

`od;`

Bemerkung: Ist $P(T) = (t_1, \ldots, t_{n-2})$ und $n_j = |\{i \in \{1, \ldots, n-2\} \mid t_i = j\}|, j \in \{1, \ldots, n\}$, so $d(j) = n_j + 1$

Umgekehrt sei $t = (t_1, \ldots, t_{n-2}), t_i \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben. Konstruiere Graphen (Baum) mit folgendem Algorithmus:
Initiiere: $E' = \emptyset$

$$\text{Sei } i = Min\{j \in V \mid j \notin t\}$$

$$E' := E' \cup \{t_i, t_1\}$$

$$\text{Ersetze } t \text{ durch } (t_2, \ldots, t_{n-1})$$

$$\text{Ersetze } V \text{ durch } V \backslash \{i\}$$

Wiederhole bis $t = ()$
Dann $E' := E' \cup V$, beachte: $|V| = 2$
Damit erhält man Baum T mit $P(T) = t$

Definition: Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen isomorph, wenn es eine Bijektion $\psi : V \rightarrow V'$ gibt mit

$$\{\{\psi(v_i), \psi(v_j)\} \mid \{v_i, v_j\} \in E\} = E'$$

(20.07.01)

Satz (cayley): Anzahl der Bäume auf V mit $|V| = n$ ist n^{n-2}

$$(t_1, \ldots, t_{n-2}), t_i \in V, |V| = n$$

$$\Gamma_V(t_1, \ldots, t_{n-2}) \text{ Baum}$$

entsteht aus

$$\Gamma_{V\backslash\{v\}}(t_2, \ldots, t_{n-2})$$

durch "Anheften des Blattes v an t_1", wobei

$$v = Min\ \{v \in V \mid v \notin \{t_1, \ldots, t_{n-2}\}\}$$

3.4 Planare Graphen

Definition: Eine ebene Einbettung eines Graphen $G = (V, E)$ ist ein Paar ψ, ψ' von injektiven Abbildungen

$$\psi : V \to \mathbb{R}^2$$

$$\psi' : E \to J = \{Bild\ e \mid e : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \text{ inj. und stetig}\} \text{ "Jordankurve"}$$

mit

$$\psi'\overbrace{\{v, v'\}}^{\in E} = Bild\ e, \{\psi(v), \psi(v')\} = \{e(0), e(1)\}$$

und

$$\psi'\underbrace{\{v_1, v_2\}}_{\in E} \wedge \psi'\{v_3, v_4\} = \bigcap_{i=1}^{n} \{\psi(v_i)\}$$

G heißt planar, wenn es eine ebene Einbettung gibt.
Ist (G, ψ, ψ') ein eingebetteter Graph, so heißen die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^2 \setminus \bigcup_{e \in E} \psi'(e)$ Gebiete von (G, ψ, ψ')

Satz 1: (Eulersche Polyederformel) Ist (G, ψ, ψ') ein zusammenhängender Graph, so gilt:

$$g = \text{ Anzahl der Gebiete } = |E| - |V| + 2$$

Beweis: Induktion nach $|E|$ (Anzahl der Kanten)

- $|E| = 0$ dann ist $|V| = 1, g = 1$
- Sei $|E| > 0$: Ist G ein Baum , so ist $|E| - |V| = -1$
  Sonst hat G einen Kreis, sei $e = \{v_1, v_2\} \in E$ Kante in einem Kreis
  $G' = (V, E' = E \setminus \{e\})$ ist zusammendhängend, eingebettet
  G' hat $g - 1$ Gebiete, wenn G genau g Gebiete hat
  $g - 1 \overset{\text{Ind.Ann.}}{=} |E'| - |V| + 2 = |E| - |V| + 2 - 1$

Satz 2: Ist $G = (V, E)$ planar, so ist $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$

Beweis: $\{\psi, \psi'\}$ Einbettung mit g Gebieten
Jedes Gebiet wird von mindestens 3 Gebieten umrandet. Jede Kante berandet höchstens 2 Gebiete

$$2|E| \geq |\{(R, e) \mid R \text{ Gebiet und } \psi'(e) \subseteq \delta R\}| \leq 3g, e \in E$$

einsetzen in $g = |E| - |V| + 2$

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{2}{3}|E|$$

$$|E| \leq 3|V| - 6$$

Beispiel:

a)

$$K_5 : |E| = 10, |V| = 5, 3|V| - 6 = 9 \Rightarrow K_5 \text{ nicht planar}$$

b)

$$K_{m,n} = (V_1 \dot{\cup} V_2, E), |V_1| = m, |V_2| = n$$

$$E = \{\{v_1, v_2\} \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

vollständiger, bipartiter Graph

$$G = K_{3,3}, |V| = 6, |E| = 9$$

$$3 \cdot \ |V| - 6 = 12$$

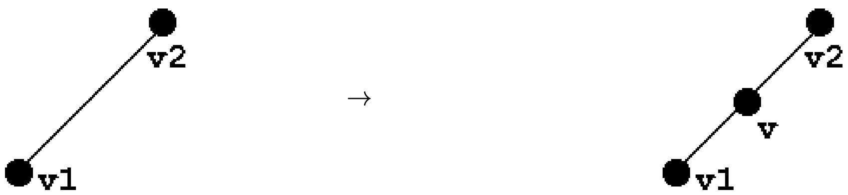
Bedingung von Satz 2 ist erfüllt
In jeder Einbettung von G würde jedes Gebiet von $geq4$ Kanten berandet (denn es gibt in G keinen Kreis der Länge 3). Der Beweis von Satz 2 liefert:

$$|E| - |V| + 2 \leq \frac{2}{4}|E|$$

$$9 = |E| \leq 2|V| - 4$$

$$12 - 4 = 8$$

Definition: (Zwei) Graphen, die durch endlich viele Operationen der Form



oder ihre Umkehrung "Entfernung von Knoten vom Grad 2" hervorgehen, heißen 2-äquivalent.

Satz 3: (Kuratowski) Ein Graph G ist genau dann planar, wenn er keinen Teilgraphen enthält, der 2-äquivalent ist zu K_5 oder $K_{3,3}$ ist.

Ohne Beweis

Definition: Eine ?-Färbung eines Graphen $G = (V, E)$ mit $k \in \mathbb{N}$ Farben ist eine Abbildung

$$c : V \rightarrow \{1, \ldots, k\}$$

mit $c(v) \neq c(v')$, falls $\{v, v'\} \in E$.
G ist k-färbbar, wenn es eine Färbung mit k Farben gibt.

$$\gamma(G) = Min\ \{k \mid G \text{ ist } k\text{-färbbar}\}$$

bipartiter Graph = Graph gefärbt mit 2 Farben

Färbung von Landkarten: Benachbarte Länder sollen verschieden gefärbt werden

Satz 4: (Vierfarbensatz) Ist G planar, so ist $\gamma(G) \leq 4$

Index