Aufgabe P30

a) Nein. In $\mathbb{Z}_4 = \mathbb{Z}_{2^2}$ ist $2 \cdot 2 = 4 = 0$, also ist $\mathbb{Z}_4$ nicht nullteilerfrei und damit kein Körper.

b) Nein. $n = 2$, $p = 2$, dann ist $\mathbb{Z}_2[X]/(x^2 - 1)$ nach Satz 2 (Kap. II, §5) kein Körper, da $\mathbb{Z}_2$ als Körper ein Euklidischer Ring ist und $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ nicht irreduzibel in $\mathbb{Z}_2[X]$ ist.

c) Ja. Satz der Vorlesung.

d) Nein. X und $X + 1$ sind immer irreduzible Polynome vom Grad 1.

Aufgabe P31

8. Nach Vorlesung ist die gesuchte Anzahl $N_n(p) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{d|n} \mu(d) p^{\frac{n}{d}}$ für den Spezialfall $n = p = 3$.

Damit erhält man $N_3(3) = \dfrac{1}{3} \sum\limits_{d|3} \mu(d) \cdot 3^{\frac{3}{d}} = \dfrac{1}{3}\mu(1) \cdot 3^3 + \dfrac{1}{3}\mu(3) \cdot 3^1 = 9 + \mu(3)$. Es gilt allgemein $\mu(1) = 1$ und $\mu(m) = -\sum\limits_{\substack{d|m \\ 1 \leqslant d < m}} \mu(d)$, also ist $\mu(3) = -\mu(1) = -1$ und damit $N_3(3) = 9 + (-1) = 8$.

Aufgabe P32

a) Nein. Wähle $p = 2$, $d = 2$, $n = 3$ mit $(x^2 + x + 1)|(x^3 + 1)$ aber $2 \nmid 3$.

b) Ja. Da $x(x^{p^n - 1} - 1) = x^{p^n} - x$ ist, gilt die Behauptung nach dem Beweis zu Satz 2 (§9).

Aufgabe P33

a) Nein. Die nächste Verschiebung $v = [1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1]$ liegt nicht in C, denn bezeichnen z_i die Zeilenvektoren der Generatormatrix, so muß für $v = a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3$ gelten: $a_1 = 1$, $a_3 = 1$, da die erste und letzte Spalte von v von 0 verschieden ist. Man sieht nun, daß man weder für $a_2 = 0$ noch für $a_2 = 1$ eine Linearkombination von v erhält.

b) Nein. Addiert man den ersten und zweiten Zeilenvektor, so erhält man $[1\ 0\ 0\ 1\ 0]$, also haben diese Vektoren die Distanz 2, womit die Minimaldistanz nicht 3 sein kann.

c) Ja. Die Dimension des Codes ist gerade die Dimension des Zeilenraumes von $G(C)$.

Aufgabe P34

a) 4. Durch Betrachtung der Teiler von $X^3 - 1$ erhält man die Generatormatrizen:

$$1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ X + 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ X^2 + X + 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ X^3 + 1 \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) 3; 2; 1; 0. Dimension = Dimension des Zeilenraumes = Rang der Generatormatrix.

c) 1; 2; 3; nicht definiert. Nach Vorlesung ist die Minimaldistanz größer als der Grad des zugehörigen Minimalpolynoms, also hier für den ersten Code $\geqslant 1$, für den zweiten $\geqslant 2$ und für den dritten $\geqslant 3$. Da $[1\ \ 0\ \ 0]$ aus dem ersten Code zum Nullvektor den Abstand 1 hat, ist die Minimaldistanz hier tatsächlich gleich 1. Analog begründet man, daß bei den anderen Codes 2 bzw. 3 auch tatsächlich minimal sind.