# Klausurvorbereitung - Diskrete Strukturen

Thorsten Uthke

13. September 1999

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Vorwissen

**Definition 1.1 (Ring)**
$(R, +, \cdot)$ heißt **Ring**, wenn gilt

1) $R$ ist Menge, $+ : R \times R \to R$ mit $(a, b) \mapsto a + b$, $\cdot : R \times R \to R$ mit $(a, b) \mapsto a \cdot b$.
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in R$.
3) Es ex. ein Element $0 \in R$ mit $a + 0 = 0 + a = a$ für alle $a \in R$.
4) Für alle $a \in R$ ex. $-a \in R$ mit $a + (-a) = (-a) + a = 0$.
5) $a + b = b + a$ für alle $a, b \in R$.
6) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in R$.
7) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für alle $a, b, c \in R$.

**Definition 1.2 (Äquivalenzklasse, Restklasse)**
Definiere auf $\mathbb{Z}$ die Äquivalenzrelation $a \sim b :<=> m|a - b \quad (m \text{ teilt } (a - b))$.
Hierdurch ist auf $\mathbb{Z}$ eine Partition in Äquivalenzklassen gegeben.

Sei $[a] = \{b \in \mathbb{Z} | b \sim a\}$ die **Äquivalenzklasse** von $a$.
$\overline{a} := [a] = \{a, a + 1 \cdot m, a + 2 \cdot m, \ldots\}$ heißt dann die **Restklasse** von $a$.

**Definition 1.3 (Restklassenring modulo m)**
$\mathbb{Z}_m := \{\overline{a} | a \in \mathbb{Z}\}$, z. B. $\mathbb{Z}_5 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$
Definiere auf $\mathbb{Z}_m$ die Addition $\overline{a} + \overline{b} := \overline{a + b}$ und die Multiplikation $\overline{a} \cdot \overline{b} := \overline{a \cdot b}$ für $a, b \in \mathbb{Z}$.
Dann ist $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ein Ring, der sogenannte "**Restklassenring modulo m**".

**Definition 1.4 (Potenzreihenring)**
$R$ sei Ring-mit-1 (d. h. es ex. ein Element $1 \in R$ mit $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für alle $a \in R$).
$R[[x]] := \{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k | a_k \in R\}$ heißt der **Potenzreihenring über $R$ in der Unbestimmten** $x$.

**Definition 1.5 (Cauchy-Produkt)**
$(R[[x]], +, \cdot)$ ist ein Ring, mit $+, \cdot$ wie folgt:

$+ : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k := \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) x^k$

$\cdot : \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k := \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ mit $c_k := \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$

**Partialbruchzerlegung:**

- $\frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{5x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$
  $A = \frac{5x-7}{x-2}|_{x=1} = \frac{-2}{-1} = 2$, $B = \frac{5x-7}{x-1}|_{x=2} = \frac{3}{1} = 3$
  $=> \frac{5x-7}{x^2-3x+2} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2}$

- $\frac{x^2+3}{x(x^2+2x+1)} = \frac{x^2+3}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} \quad \otimes$
  $A = \frac{x^2+3}{(x+1)^2}|_{x=0} = 3$, $C = \frac{x^2+3}{x}|_{x=-1} = -4$
  Setze in $\otimes$ $x = 1$ ein:
  $\frac{4}{4} = 3 + \frac{B}{2} - 1 => B = -2$

- Falls Zählergrad $\geq$ Nennergrad: Polynomdivision z. B. $\frac{x^3+2x^2+x+3}{x^2+3}$

$$
\begin{array}{l}
\quad x^3 + 2x^2 + x + 3 = (x^2 + 3)(x + 2) - 2x - 3 \\
\underline{-(x^3 \qquad\quad + 3x)} \\
\qquad\quad 2x^2 - 2x \\
\qquad \underline{-(2x^2 \qquad + 6)} \\
\qquad\qquad\quad -2x - 3
\end{array}
$$

$=> \frac{x^3+2x^2+x+3}{x^2+3} = x + 2 + \frac{-2x-3}{x^2+3}$

- Falls sich der Nenner nicht zerlegen läßt z. B. $\frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}$
  $\frac{2x^2+x-1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad \bigoplus$
  $A = \frac{2x^2+x-1}{x^2+x+1}|_{x=1} = \frac{2}{3}$
  Setze in $\bigoplus$ $x = 0$ ein:
  $\frac{-1}{-1} = -\frac{2}{3} + C => \frac{5}{3}$
  Setze in $\bigoplus$ $x = -1$ (willkürlich gewählt) ein:
  $\frac{2-1-1}{1+3} = -\frac{2}{6} + \frac{-B+\frac{5}{3}}{1-1+1} <=> 0 = -\frac{1}{3} - B + \frac{5}{3} => B = \frac{4}{3}$

- Falls sich der Nenner nur in $\mathbb{C}$ zerlegen läßt z. B. $\frac{1}{x^2+1}$
  $\frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x-i)(x+i)} = \frac{A}{x-i} + \frac{B}{x+i}$
  $A = \frac{1}{x+i}|_{x=i} = \frac{1}{i+i} = \frac{i}{i(i+i)} = -\frac{i}{2}$, $B = \frac{1}{x-i}|_{x=-i} = \frac{i}{2}$

# 2 Partielle Ordnungen

**Definition 2.1 (Partielle Ordnung, Poset)**
Sei $P$ eine Menge. Eine **(partielle) Ordung** auf $P$ ist eine Relation $\leq$ auf $P$, so daß für alle $x, y \in P$ gilt:

(i) $x \leq y$ (reflexiv)
(ii) $x \leq y$ und $y \leq x$ impliziert $x = y$ (antisymetrisch)
(iii) $x \leq y$ und $y \leq z$ impliziert $x \leq z$ (transitiv)

$(P, \leq)$ heißt dann **(partiell) geordnete Menge** oder **Poset**[1]

**Definition 2.2 (Vergleichbar)**
Elemente $x, y \in P$ heißen **vergleichbar**, wenn $x \leq y$ oder $y \leq x$ gilt.
Sind sie nicht vergleichbar, schreibt man $x||y$.

**Definition 2.3 (Kette, total geordnet)**
Eine Teilmenge $C \subset P$ heißt **Kette** oder **linear** bzw. **total geordnete Menge** in $P$, wenn je 2 Elemente von $C$ direkt vergleichbar sind.

$\underline{n}$ sei die Kette $0 < 1 < 2 < \ldots < n-1 \quad (n \in \mathbb{N})$

**Definition 2.4 (Antikette)**
Eine Teilmenege $A \subset P$ heißt **Antikette**, wenn keine 2 Elemente von $A$ vergleichbar sind.

$\overline{n}$ sei die Menge $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ als Antikette aufgefaßt

**Definition 2.5 (Überdeckung)**
Sei $P$ Poset und $x, y \in P$. $x \prec y$ ($x$ wird überdacht von $y$) $:<=>$ $y$ überdeckt $x$
$:<=>$ $x < y$ und $x \leq z < y \Rightarrow x = z$ (d. h. es gibt kein Element zwischen x und y)

**Definition 2.6 (gesättigt/saturiert)**
Eine Kette $C \subset P$ heißt **gesättigt** oder **saturiert**, wenn $C$ eine Folge von Überdeckungen ist.

**Definition 2.7 (Transitive Hülle/Abschluß von $\prec$)**
Die Ordnung $\leq$ von $P$ ist die **transitive Hülle** bzw. **Abschluß** von $\prec$. (D. h. für alle Folgen $a_1 \prec a_2 \prec \ldots \prec a_n$ in der Menge $P$ sind alle Elemente solcher Folgen per $\leq$ vergleichbar.)

**Definition 2.8 (Hasse-Diagramm)**
(i) jedem $x \in P$ entspricht genau ein Punkt im $\mathbb{R}^2$ (injektive Abb.).
(ii) $x \prec y$ entspricht genau einer Strecke zwischen $x, y$.
(iii) $x$ und $y$ dürfen nicht durch eine waagerechte Linie verbunden werden.

## 2.1 Beispiele für Ordnungen

a) Natürliche Ordnung: $\mathbb{N}, \mathbb{N}_0, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$
b) Ordnung durch Inklusion:
$X$ sei Menge. $\mathcal{P}(X) := \{A | A \subset X\}$
$A \leq B :<=> A \subset B$ für $A, B \in \mathcal{P}(X)$
$A \prec B <=> B = A \cup \{a\}, a \notin A$ (um ein Element größer)
Für $X = \{1, 2, \ldots, n\} =: [n]$ wird $(\mathcal{P}(X), \leq) = \mathfrak{B}_n$ bezeichnet.
c) Statt der vollständigen Potenzmenge kann auch eine beliebige Teilmenge $S \subset \mathcal{P}(X)$ durch Inklusion geordnet werden.

[1] **p**artially **o**rdered **set**

d) Teilbarkeit:
$\mathbb{N}$ mit $m \leq n :<=> m|n$, d. h. $\exists k \in \mathbb{N} : n = k \cdot m$
$m \prec n <=> \frac{n}{m}$ ist prim
(Bei $\mathbb{N}_0$ ist die 0 größer als alle $n \in \mathbb{N} : \frac{0}{n} = 0$)

e) Für $A$ endliches "Alphabet" (linear geordnet) mit "Buchstaben" $a \in A$:
$A^n := \{(a_1, \ldots, a_n)|a_1, \ldots, a_n \in A\}$ ist die Menge der Worte der Länge $n$.
$P = A^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$ ist die Menge aller endlichen Worte über $A$.
Ordnungen:

- Präfixordnung:
  $u \leq v :<=> u = a_1 \ldots a_n$ und $v = a_1 \ldots a_n a_{n+1} \ldots a_s$
- Unterwortordnung:
  $u \prec v :<=> u$ entsteht aus $v$ durch Streichen eines Buchstabens
- lex(ikographische) Ordnung:
  $u < v :<=> u_i = v_i$ für $i = 1, \ldots, k$ und $u_{k+1} < v_{k+1}$
  Beispiel: $11 \prec 12 \prec 21 \prec 22 \prec 31 \prec \ldots$
- colex(ikographische) Ordnung:
  wie lex-Ordnung, aber Worte hinten beginnend vergleichen
  Beispiel: $11 \prec 21 \prec 31 \prec 12 \prec 22 \prec \ldots$
- rev(erse) lex-Ordnung:
  $u < v :<=> u_i = v_i$ für $i = 1, \ldots, k$ und $u_{k+1} > v_{k+1}$
  Beispiel: $32 \prec 31 \prec 22 \prec 21 \prec 12 \prec 11$

**Definition 2.9 (Mengenpartition, Blöcke)**
Sei $n \in \mathbb{N}, [n] := \{1, \ldots, n\}$. Dann heißt $B = \{B_1, \ldots, B_k\}$ **(Mengen)partition** von $[n]$, wenn alle $B_i \neq \emptyset$ und $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = [n]$ und $B_i \neq B_j$ für alle $i \neq j$. Die $B_i$ heißen **Blöcke** von $B$.

Beispiel: $B = \{\{1, 3, 5\}, \{2\}, \{4, 6\}\}$, abgekürzt $135|2|46$, ist Partition von $[6]$.

f) $P_n$ ist dann die Menge aller Partitionen von $[n]$ mit:
$A \leq B :<=>$ jeder Block von $A$ ist in einem Block von $B$ enthalten.
$A \prec B <=>$ es wird genau ein Block von B in zwei in A aufgespalten.

**Definition 2.10 (Zahlenpartition, Länge)**
Sei $n \in \mathbb{N}. \lambda := (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ heißt **Zahlenpartition** von $n$, kurz $\lambda \vdash n$, wenn $|\lambda| := \lambda_1 + \ldots + \lambda_k = n$ ist, und $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq 1$ für alle $\lambda_i \in \mathbb{N}$ gilt.
$k =: l(\lambda) =$"Anzahl der Elemente in $\lambda$" heißt **Länge** von $\lambda$.

Beispiel: $\lambda = (4, 2, 2, 2, 1, 1) \vdash 12$ ist Partition der Länge 6. Kann man auch als $\lambda = 4^1 2^3 1^2$ schreiben.

Darstellung von $\lambda$ als **Ferrer-Diagramm**

g) Zwei Ordnungen über Zahlenpartitionen:

- **Young-Ordnung**:
  $Y_\lambda$ zu gegebener Partition $\lambda$ ist die Menge aller $\mu$, die sich aus $\lambda$ erzeugen lassen (Durch Weglassen eines Kästchens im Ferrerdiagramm (incl. $\lambda$ selber).
  Geordnet durch Inklusion.
- **Dominanz-Ordnung**:
  $D_n$ zu gegebenem $n \in \mathbb{N}$ ordnet alle möglichen Partitionen $\lambda \vdash n$ folgendermaßen:
  $\lambda \geq \mu :<=> \lambda_1 + \ldots + \lambda_t \geq \mu_1 + \ldots + \mu_t$ für alle $t \geq 1$, wobei $\lambda_t, \mu_t := 0$ für $t \geq l(\lambda), l(\mu)$.
  D. h. jede Teilsumme muss $\geq$ sein, also $4^1 3^1 1^1 \prec 5^1 2^1 1^1$ während $4^1 3^1 1^1$ nicht vergleichbar mit $5^1 1^3$ ist.

**Definition 2.11 ($S_n$ Permutationen)**
Die symetrische Gruppe $S_n$ aller bijektiven Abbildungen der Menge $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$ in sich selbst ist auch die Menge der Permutationen von $[n]$. Eine Permutation schreibt man als Liste der Bilder $\pi(1)\pi(2)\ldots\pi(n)$.

h) $S_n := B_{ij}([n])$ mit folgenden beiden Ordnungen:

- **Schwache Ordnung**:
$\pi = \pi(1)\ldots\pi(i-1)\pi(i)\pi(i+1)\ldots\pi(n)$
$\sigma \prec \pi$ :<=> $\sigma = \pi(1)\ldots\pi(i-1)\pi(i+1)\pi(i)\pi(i+2)\ldots\pi(n)$ mit $\pi(i+1) < \pi(i)$ für ein $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.
(D. h. zwei Glieder von $\pi$, die hintereinander stehen und noch in korrekter Reihenfolge ($<$) sind, werden in $\sigma$ vertauscht, z. B. $213 \prec 231 \prec 321$.)
- **Starke Ordung**:
$\pi = \pi(1)\ldots\pi(i-1)\pi(i)\pi(i+1)\ldots\pi(j-1)\pi(j)\pi(j+1)\ldots\pi(n)$
$\sigma < \pi$, wenn $\sigma = \pi(1)\ldots\pi(i-1)\pi(j)\pi(i+1)\ldots\pi(j-1)\pi(i)\pi(j+1)\ldots\pi(n)$ mit $\pi(j) < \pi(i)$ für $i, j : 1 \leq i < j \leq n$.
(D. h. zwei Glieder von $\pi$, die noch in korrekter Reihenfolge ($<$) sind, werden in $\sigma$ vertauscht, z. B. $213 < 231$ aber auch $213 < 312$.)

**Definition 2.12 (Inversionen und Länge von $\pi$)**
$I(\pi) := \{(i, j) | 1 \leq i < j \leq n, \pi(j) < \pi(i)\}$ heißt Menge der **Inversionen** von $\pi$ (also die Anzahl der Vertauschungen, die von der Original-Reihe bis $\pi$ vorgenommen wurde).

$l(\pi) := |I(\pi)|$ heißt **Länge** von $\pi$.

**Definition 2.13 (maximal, minimal)**
Sei $P$ Poset und $Q \subset P$.
Dann heißt $a \in Q$ **maximal** in $Q$, wenn $a \leq x \in Q \Rightarrow a = x$.
Dann heißt $a \in Q$ **minimal** in $Q$, wenn $a \geq x \in Q \Rightarrow a = x$.

**Definition 2.14 (Maximum, Minimum)**
Sei $P$ Poset und $Q \subset P$.
Dann heißt $a \in Q$ **Maximum** in $Q$, wenn $\forall x \in Q : a \leq x \in Q \Rightarrow a = x$ ($a = max\ Q$).
Dann heißt $a \in Q$ **Minimum** in $Q$, wenn $\forall x \in Q : a \geq x \in Q \Rightarrow a = x$ ($a = min\ Q$).

**Definition 2.15 (top-Element, bottom-Element)**
Sei $P$ Poset und $Q \subset P$.
Falls $\max(Q)$ existiert, nennt man es **top-Element**, kurz $\hat{1}$ oder $\top$.
Falls $\min(Q)$ existiert, nennt man es **bottom-Element**, kurz $\hat{0}$ oder $\perp$.

**Definition 2.16 (Breite, Kettenzerlegung)**
Sei $P$ endliches Poset. Die Zahl $M = M(P) := \max\{\#(A) | A \subset P \text{ ist Antikette}\}$ (Länge der größten Antikette) heißt **Breite** von $P$. (Entspricht der breitesten Stelle im Hasse-Diagramm.)
Die minimale Anzahl von Ketten, in die sich das Poset zerlegen läßt, ist

$$m = m(P) := \min\{k | \underbrace{C_1, \ldots, C_k \subset P \text{ sind Ketten}, P = \bigcup_{i=1}^{k} C_i}_{\textbf{Kettenzerlegung} \text{ von } P}\}.$$

**Satz 2.1 (Satz von Dilworth)** $m = M$.

**Satz 2.2 (Satz von Mirsky)** Sei $P$ endliches Poset. Wenn $P$ keine Kette mit $m + 1$ Elementen besitzt, dann ist $P$ die Vereinigung von $m$ Antiketten.

**Definition 2.17 (monoton, Einbettung, Isomorphismus)**
Seien $P$ und $Q$ geordnete Mengen. Eine Abb. $\varphi : P \to Q$ heißt

(i) **ordnungserhaltend** oder **monoton**, wenn $x \leq y$ in $P$ impliziert, daß $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ in $Q$ ist.

(ii) eine **(Ordnungs-)Einbettung**, wenn ($x \leq y$ in $P$) <=> ($\varphi(x) \leq \varphi(y)$ in $Q$) $[\varphi : P \leftrightarrow Q]$. Man schreibt $P \hookrightarrow Q$ für "$P$ ist eingebettet in $Q$".

(iii) ein **(Ordnungs-)Isomorphismus**, wenn $\varphi$ eine surjektive Ordnungseinbettung ist. $P$ und $Q$ heißen dann **isomorph** $[P \cong Q]$.

**Definition 2.18 (schwaches/induziertes Unterposet)**
Sei $(P, \leq)$ Poset und $Q \subset P$ geordnet bezüglich $\preceq$[2]. $(Q, \preceq)$ heißt **schwaches Unterposet** von $P$, wenn aus ($x \preceq y$ in $Q$) => ($x \leq y$ in $P$); und **(induziertes) Unterposet** von $(P, \leq)$, wenn ($x \preceq y$ in $Q$) <=> ($x \leq y$ in $P$).

**Definition 2.19 (Intervall)**
Für $x \leq y$ in $P$ ist das **abgeschlossene Intervall** $[x, y] := \{z \in P | x \leq z \leq y\}$ mit induzierter Ordnung.

**Definition 2.20 (Verfeinerung)**
Ist $P = Q$ und $(Q, \preceq)$ ein schwaches Unterposet von $(P, \leq)$, dann heißt $(P, \leq)$ **Verfeinerung** von $(Q, \preceq)$. (Die Verfeinerung hat mehr Überdeckungsrelationen.)

Beispiel: $S_n$ mit starker Ordnung ist eine Verfeinerung von $S_n$ mit schwacher Ordnung.

**Definition 2.21 (lokal endlich)**
Ein Poset $P$ bei dem alle $[x, y]$ endliche Mengen sind, mit bottom-Element $\hat{0}$, heißt **lokal endliches** Poset.

**Definition 2.22 (Rang, Rangfunktion, gradiert)**
Sei $P$ lokal endliches Poset. Falls für beliebige 2 Elemente $x, y \in P$ mit $x \leq y$ gilt, daß alle maximalen Ketten $C : x = x_0 \prec x_1 \prec \ldots \prec x_n = y$ dazwischen die gleiche **Länge** $l(C) := n$ haben, dann besitzt $P$ eine **Rangfunktion** $\varrho : P \to \mathbb{N}_0$ mit den Eigenschaften

(i) $\varrho(\hat{0}) := 0$

(ii) $\varrho(y) = \varrho(x) + 1 <=> x \prec y$

$\varrho(x)$ heißt dann **Rang** von $x$ und $\varrho(P) := \max_{x \in P}(\varrho(x)) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ der **Rang** von $P$.
Ein Poset $P$ mit Rangfunktion heißt **gradiert**.

**Definition 2.23 (Whitney-Zahlen 2. Art)**
Die Zahlen $W_i = W_i(P) := \#\{x \in P | \varrho(x) = i\}$ heißen **Whitney-Zahlen 2. Art**. ($W_i$ ist die Anzahl der Elemente in $P$, die den Rang $i$ haben.)

**Definition 2.24 (rangerzeugende Funktion)**
$F(P, q) := \sum_{x \in P} q^{\varrho(x)} = \sum_{i=0}^{\varrho(P)} W_i q^i$ heißt die **rangerzeugende Funktion** von $P$.

**Definition 2.25 (rangunimodal, rangsymetrisch, Sperner)**
Ein endliches gradiertes Poset $P$ vom Rang $m$ heißt

- **rangunimodal**, wenn $W_0 \leq W_1 \leq \ldots \leq W_k \geq \ldots \geq W_m$ für irgendein $k \leq m$ gilt.
- **rangsymetrisch**, wenn $W_i = W_{m-i}$ für alle $i = 0 \ldots m$.
- **Sperner**, wenn für die Breite von $P$ $M(P) = \max W_i$ gilt.

[2]symbolisiert eine beliebige Ordnung

**Definition 2.26 (dual, selbstdual)**
Sei $(P, \leq)$ ein Poset. Dann ist das zu $P$ **duale** Poset $P^*$ definiert durch : $(x \leq y$ in $P^*) <=> (y \leq x$ in $P)$. $P$ heißt **ordnungssymetrisch** oder **selbstdual**, wenn $P \cong P^*$ ist.

| **Posets** | $\hat{0}$ | $\hat{1}$ | gradiert | rang-unimodal | rang-sym. | Sperner | $P \cong P^*$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $(\mathbb{N}_0, \leq)$ | $0$ | — | $\varrho(n) = 1$ | — | — | — | — |
| $B_n$ | $\emptyset$ | $[n]$ | $\varrho(A) = \|A\|$ | × | × | × | — $(A \leftrightarrow [n]\mathfrak{A})$ |
| $P_n$ | $1\|\ldots\|n$ | $1\ldots n$ | $\varrho(B) = n - \|B\|$ | × | — | — | — |
| $Y_\lambda$ | $\emptyset$ | $\lambda$ | $\varrho(\mu) = \|\mu\|$ | — | — | ? | — |
| $D_n$ | $1^n$ | $n^1$ | — | — | — | — | × $(\lambda \leftrightarrow \lambda')$ |
| $S_n$ (schwach) | id $n = 1\ldots n$ | $w_n = n\ldots 1$ | $\varrho(\pi) = l(\pi)$ | × | × | ? | × $(\pi \leftrightarrow \pi w_n)$ |

$\varrho(P) = \varrho(\hat{1})$ sofern vorhanden.

**Definition 2.27 (Dualitätsprinzip)**
Sei $F$ ein Familie von Posets, die zu jedem $P$ auch $P^*$ enthält, und $\phi$ eine Aussage, welche für alle $P \in F$ richtig ist. Dann ist auch die **duale Aussage** $\phi^*$, welche aus $\phi$ durch Vertauschung von $\leq$ und $\geq$ entsteht, richtig für alle $P \in F$.

**Definition 2.28 (Abwärtsmenge, ideal)**
Sei $P$ Poset und $Q \subset P$. $Q$ heißt **Abwärtsmenge** (downset) oder **(ordnungs-)ideal**, wenn für alle $x \in Q, y \in P$ mit $x \geq y$ folgt, daß $y \in Q$. $\downarrow Q := \{y \in P \mid \exists x \in Q : y \leq x\}$ $\quad \downarrow x := \downarrow \{x\}$

$Q$ ist **Ideal** in $P <=> Q = \downarrow Q$

**Definition 2.29 (Aufwärtsmenge, Filter)**
Sei $P$ Poset und $Q \subset P$. $Q$ heißt **Aufwärtsmenge** (upset) oder **(Ordnungs-)Filter**, wenn für alle $x \in Q, y \in P$ mit $y \geq x$ folgt, daß $y \in Q$. $\uparrow Q := \{y \in P \mid \exists x \in Q : y \geq x\}$ $\quad \uparrow x := \uparrow \{x\}$

$Q$ ist **Filter** in $P <=> Q = \uparrow Q$

**Satz 2.3** Sei $P$ Poset und $Q \subset P$, dann gilt: $Q$ Ideal$<=> P \backslash Q$ Filter.

**Definition 2.30 (Poset der Ideale)**
Für jedes Poset $P$ ist $\mathcal{O}(P) := \{\downarrow Q \mid Q \subset P\}$ geordnet durch Inklusion das **Poset der Ideale** von $P$.

## 2.2 Konstruktionen mit Posets

Wir kennen schon: Unterposets, $P^*$, $\mathcal{O}(P)$.

**Definition 2.31 (Disjunkte Vereinigung/Direkte Summe)**
Für zwei Posets $P, Q$ mit $P \cap Q = \emptyset$ ist die **Disjunkte Vereinigung** $P \dot{\cup} Q$ bzw. **direkte Summe** $P + Q$ definiert als die disjunkte Vereinigung der Mengen $P$ und $Q$, wobei $x \leq y <=> (x, y \in Q$ und $x \leq y)$ oder $(x, y \in P$ und $x \leq y)$
Ist kommutativ, assioziativ und hat neutrales Element.
(Hasse-Diagramm $P + Q$: Man zeichnet $P$ und $Q$ (ohne Verbindung) nebeneinander.)

**Definition 2.32 (Lineare Summe)**
Für zwei Posets $P, Q$ ist die **lineare Summe** $P \oplus Q$ definiert als disjunkte Vereinigung der Mengen $P$ und $Q$, wobei $x \leq y$ in $P \oplus Q$ <=> ($x \leq y$ in $P$) oder ($x \leq y$ in $Q$) oder ($x \in P$ und $y \in Q$).
Ist assioziativ, aber nicht kommutativ.
(Hasse-Diagramm $P \oplus Q$: Zeichne $Q$ über $P$ und verbinde alle minimalen Elemente von $Q$ mit den maximalen von $P$.)

**Definition 2.33 (Kartesisches/Direktes Produkt)**
Für zwei Posets $P, Q$ ist das **kartesische** oder **direkte Produkt** $P \times Q$ definiert als $P \times Q$ der Mengen, wobei $(x, x') \leq (y, y')$ in $P \times Q$ :<=> ($x \leq y$ in $P$) und ($x' \leq y'$ in $Q$).
Ist nicht kommutativ oder assioziativ. (Ist nur "kommutativ" oder "assioziativ" für Isomorphie.)
(Hasse-Diagramm $P \times Q$: Im Diagramm von $P$ ersetze jedes Element durch eine Kopie von $Q$ und verbinde "korrespondierende" Elemente dieser Kopien von $Q$ entsprechend den ursprünglichen Überdeckungsrelationen in $P$.)

**Definition 2.34 (Abb$(M, P)$)**
**Abb**$(M, P)$ ($M$ in $P$ abgebbildet) für beliebige Mengen $M$ und ein Poset $P$ ist ein Poset bezüglich der **punktweisen Ordnung** $\mathcal{L} \leq g :<=> \mathcal{L}(x) \leq g(x) \quad \forall x \in M$.

Beispiel: $\underline{2}^{\underline{2}}$
$\text{Abb}(\{0,1\}, \{0,1\}) \cong \{(\varphi(0), \varphi(1)) | \varphi \in \text{Abb}\} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

**Definition 2.35 (Hom$(P, Q)$)**
**Hom**$(P, Q) = Q^P$ ($P$ nach $Q$) für die Posets $P, Q$ ist die Menge der monotonen Abb. von $P$ nach $Q$.
(Jede struktur-/ordnungserhaltende Abb. ist ein **Homomorphismus** (Ordnungshomomorphismus.)
$Q^P$ ist Poset auf der Menge $\text{Hom}(P, Q)$ bezüglich der punktweisen Ordnung.

Beispiel: $\underline{2}^{\underline{2}}$
$\text{Hom}(\{0,1\}, \{0,1\}) \cong (0,0) \leq (0,1) \leq (1,1)$

**Definition 2.36 (Lineare Erweiterungen, monotone Numerierung)**
Für $|P| = n$ und $Q = [n]$ ist $\text{Hom}(P, Q) \neq \emptyset$ die Menge der **linearen Erweiterungen** von $P$, beschrieben durch die verschiedenen möglichen **monotonen Numerierungen** von $P$.
Zu monotonen Numerierung numeriert man immer ein minimales Element der Menge der nicht numerierten Elemente bis alle numeriert sind.

**Definition 2.37 (konvex, verträglich, Quotientenposet)**
Sei $B$ eine Partition der Menge $P$ in Blöcke $B_i$.

Ein Block $B_i$ heißt **konvex**, wenn für $x \leq y$ in $B_i$ und $z \in P$ mit $x \leq z \leq y \Rightarrow z \in B_i$.

$B$ heißt **verträglich** mit der Ordnung $\leq$ auf $P$, wenn alle Blöcke $B_i$ konvex sind.

Dann ist das **Quotientenposet** $P_B$ wohl definiert, welches als Elemente die Blöcke $B_i$ und als Ordnung die indizierte Ordnung von $P$ hat.

**Satz 2.4** $B_n \cong \underline{2}^n = \underbrace{\underline{2} \times \ldots \times \underline{2}}_{n\text{-mal}}$, wobei der Isomorphismus gegeben ist durch die Abb. $\phi : P([n]) \to \{0,1\}^n$, $A \mapsto (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ mit $\delta_i := \begin{cases} 1, \text{ wenn } i \in A \\ 0, \text{ wenn } i \notin A \end{cases}$

# 3 Abzählende Kombinatorik

Elementare Zählprinzipien:
$S, S_i, T$ endliche Mengen.

1) Gleichheitsregel $|S| = |T| <=> \exists$ eine Bijektion zwischen $S$ und $T$.
2) Summenregel $S = \dot{\bigcup}_{i=1}^{n} S_i => |S| = \sum_{i=1}^{n} |S_i|$.
3) Produktregel $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_m => |S| = \prod_{i=1}^{m} |S_i|$.
   speziell: $\text{Abb}(S, T) =: T^S => |T|^{|S|}$.

Folgerungen:

a) $\mathcal{P}(N) = Pot(N) \quad => |\mathcal{P}(N)| = 2^n$
b) $|\text{Inj}(K, N)| = n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k-1)$
c) $|\text{Bij}(K, N)| = n! := n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$
d) Die Anzahl der $k$-Teilmengen einer $n$-Menge $:= W_k := W_k(\mathfrak{B}_n) = \binom{n}{k}$
e) $\mathfrak{B}_n$ ist rangsymetrisch: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
f) **Binominalsatz**: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$
g) $\sum_{k=0}^{n} = 2^n$
h) **Von der Monde Konvolution**: $\binom{x+y}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{x}{k}\binom{y}{n-k}$ für $n \in \mathbb{N}_0, x, y \in \mathbb{C}$
   $\binom{x}{k} \in \mathbb{C}[x]$ (Polynomring), $\binom{x+y}{k} \in \mathbb{C}[x, y]$
i) $\mathfrak{B}_n$ rangunimodal: $\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \ldots < \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil} > \ldots > \binom{n}{n-1}\binom{n}{n}$

**Satz 3.1 (Identitätssatz)** Stimmen 2 Polygone in $\mathbb{C}[x_1 \ldots x_n]$ oder 2 konvergente Potenzreihen aus $\mathbb{C}[[x_1 \ldots x_n]]$ in unendlich vielen Punkten überein, dann sind sie gleich.
(Für Polynome braucht man nur endlich viele Übereinstimmungen, abhängig vom Grad.)

**Satz 3.2** $|\{\lambda \vdash n | \lambda_1 \underbrace{=}_{\text{oder } \leq} k\}| = |\{\lambda \vdash n | l(\lambda) \underbrace{=}_{\text{oder } \leq} k\}|$

**Satz 3.3** $|\{\lambda \vdash n|$ alle $\lambda_i$ ungerade und verschieden$\}| = |\{\lambda \vdash n | \lambda = \lambda'\}|$

**Definition 3.1**
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $K_n := \{(k_1 \ldots k_n) \in \mathbb{N}_0^n | 0 \leq k_j \leq j-1 \text{ für } j = 1 \ldots n\}$
Dann ist

1. Die Abb. $k : S_n \to K_n$ definiert durch $k_j = k_j(\pi) := |\{i | i < j, \pi(i) > \pi(j)\}|$ für $j = 1..n$ eine Bijektion mit $|k(\pi)| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n = l(\pi)$.
2. **Rangerzeugende Funktion** von $S_n$ mit schwacher Ordnung
   $F(S_n, q) = \sum_{\pi \in S_n} q^{l(\pi)} = (1+q)(1+q+q^2)\ldots(1+q+\ldots+q^{n-1})$ für $n \geq 2$.

**Satz 3.4** Alle $B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sind Sperner, d. h. $M(B_n) = W_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

**Definition 3.2 (Zweifaches Abzählen (Double counting))**
Sei $M = (m_{ij})$ eine $m \times n$ Matrix über $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{m} \left( \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{m} m_{ij} \right)$$

**Definition 3.3 (Schubfachprinzip (pigeon hole))**
Verteilt man $n$ Gegenstände (pigeons) auf $r$ Fächer (holes) und ist $n > r$ bzw. $n > k \cdot r$, so enthält mindestens ein Fach mindestens 2 bzw. $k + 1$ Gegenstände.

**Satz 3.5 (Ramsey-Theorie)** Sei $N(a, b)$ die kleinste Anzahl von Personen, so daß entweder $a$ Personen alle miteinander bekannt sind, oder $b$ Personen alle einander unbekannt sind.

(i) $N(a, b) = N(b, a)$ klar

(ii) $N(a, 2) = a$ klar

(iii) $N(a, b) \leq N(a-1, b) + N(a, b-1)$

(iv) $\forall a, b \in \mathbb{N}\backslash\{1\} : N(a, b)$ existiert endlich (rekursiv aus 1-3)

(v) $N(3,3) = 6 \quad N(3,4) = 9 \quad N(3,5) = 14 \quad N(3,6) = 18$
$N(3,7) = 23 \quad N(4,4) = 18 \quad \ldots$
Die restlichen Zahlen sind unbekannt

**Definition 3.4 (Sterlingzahlen der 2. Art)**
Die Anzahl der Partitionen von $[n]$ in $k$ Blöcke heißen **Sterlingzahlen der 2. Art** $S(n, k) := W_{n-k}(P_n)$.

(i) $S(0, 0) = 1$
$S(n, k) = 0$ für $k > n$
$S(n, 0) = 0$ für $n \in \mathbb{N}$
$S(n, 1) = 1$

(ii) $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1$
$S(n, n-1) = \binom{n}{2}$

(iii) Rekursion:
$S(n, k) = k \cdot S(n-1, k) + S(n-1, k-1)$

Tabelle 1: Sterling-Dreieck der 2. Art

| $n\backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 3 | 0 | 1 | 3 | 1 | | |
| 4 | 0 | 1 | 7 | 6 | 1 | |
| 5 | 0 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 |

(iv) Summenformel:
$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sim_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$

(v) Exponentiell erzeugende Fkt. für $S(n, k)$ bei festem $k$:
Eine Fkt. vom Typ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ heißt **exponetiell erzeugend** für die Folge $(a_0, a_1, \ldots)$, eine Fkt. vom Typ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ heißt **(gewöhnliche) erzeugende** Funktion.

(vi) Transferformel:
$x^n = \sum_{k=1}^{n} S(n, k) x^{\underline{k}}$

**Definition 3.5 ($k$-Komposition)**
Ein $k$-Tupel $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathbb{N}^k$ mit $a_1 + \ldots + a_k = n$ heißt **geordnete Partition** oder **$k$-Komposition** von $n$: $a \models n$.
Die Anzahl der $k$-Kompositionen von $n$ ist $\binom{n-1}{k-1}$.

**Definition 3.6 (Multimenge)**
Eine (endliche) **Multimenge** $M$ auf einer (endlichen) Menge $S$ ist eine Funktion $r : S \to \mathbb{N}_0$; für $a \in S$ ist $r(a)$ die Anzahl der Wiederholungen von $a$. Man schreibt eine Multimenge als Menge mit Wiederholungen.

**Definition 3.7 (Untermultimenge)**
$M'$ ist **Untermultimenge** von $M$, wenn $M'$ bestimmt ist durch eine Funktion $r' : S \to \mathbb{N}_0$ mit $r'(a) \leq r(a) \quad \forall a \in S$.
Die Anzahl der $k$-(Unter-)Multimengen über $[n]$ ist $\frac{n^{\overline{k}}}{k!} = \binom{n+k-1}{k}$.

**Definition 3.8**

(i) Die Anzahl der geordneten $k$-Partitionen von $[n]$ mit $b_i = |B_i|$ für $i = 1, \ldots, k$ mit $b = (b_1, \ldots, b_k)$ und $b_1 + \ldots + b_k = n$ ist $\binom{n}{b_1,\ldots,b_k} := \frac{n!}{b_1! \ldots b_k!}$, der **Multinominalkoeffizient**.

(ii) Die Anzahl aus i) hängt nur von der Multimenge $\{b_1, \ldots, b_k\}$ ab, nicht von der Reihenfolge.

(iii) $(x_1 + \ldots + x_k)^n = \sum_{alle(b_1,\ldots,b_k)} \binom{n}{b_1,\ldots,b_k} x_1^{b_1} \ldots x_k^{b_k}$
Dabei ist die Anzahl der verschiedenen Monome $x_1^{b_1} \ldots x_k^{b_k}$ $\binom{n+k-1}{k}$ und die Summe der Koeffizienten ist $k^n$.

(iv) **Rekursionsformel**:
$\binom{n}{b_1,\ldots,b_k} = \binom{n-1}{b_1-1,b_2,\ldots,b_k} + \ldots + \binom{n-1}{b_1,\ldots,b_{k-1},b_k-1}$
(Ein Element fest, alle Möglichkeiten, aus welchem Block es war.)

(v) Sei $M$ eine Multimenge über $S = \{a_1, \ldots, a_s\}$ mit Vielfachheitsfkt. $r$ und $S(M)$ die Menge der Permutationen von $M$, dann ist $|S(M)| = \binom{|M|}{r(a_1),\ldots,r(a_s)}$; speziell für $r \equiv 1$ (also normale Mengen) ist $|S(M)| = \binom{|M|}{1,\ldots,1} = |M|!$

**Definition 3.9 (Partitionszahlen)**
$P(n, k) := \#\{\lambda \vdash n | l(\lambda) = k\}$ heißen **Partitionszahlen**.
$P(n) := \#\{\lambda \vdash n\}$
$P(0, 0) := 1$
$P(0, k) := 0$ für $k > 0$.

(i) $P(n) = \sum_{k=1}^{n} P(n, k)$.

(ii) **Rekursionsformel**:
$P(n + k, k) = \sum_{j=0}^{k} P(n, j)$

(iii) **Erzeugende Funktion**:
Der Koeffizient von $x^n$ in $\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)\ldots}$ mit $a, b, \ldots \in \mathbb{N}$, ist $\#\{\lambda \vdash n | \forall \lambda \in \{a, b, \ldots\}\}$.
Spezialfälle:

- $P_k(n) := \#\{\lambda \vdash n | \lambda_i = k$ der größte Teil$\}$ hat die erzeugende Funktion $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)}$
- $P_u(n) := \#\{\lambda \vdash n | \lambda_i$ ist ungerade$\}$ hat die erzeugende Funktion $\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\ldots}$
- $P(n) := \#\{\lambda \vdash n\}$ hat die erzeugende Funktion $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}$
  Der Koeff. von $x^n$ in $(1 + x^a)(1 + x^b) \ldots$ ist $\#\{\lambda \vdash n | \forall \lambda \in \{a, b, \ldots\}$ alle verschieden$\}$.
  Spezialfall:
  $P_d(n) := \#\{\lambda \vdash n || \forall \lambda_i$ verschieden$\}$ hat die erzeugende Funktion $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \ldots$

(iv) (Euler) $P(n) = P_d(n)$

(v) Für $\lambda = n^m = (???)$ hat $F(Y_\lambda, q) = [???]_q$

Tabelle 2: Verteilung von Bällen in Fächer

Menge $N$ von $n$ Bällen, Menge $R$ von $r$ Fächern, $*$: "nicht unterscheidbar"

| | bel. | inj. | surj. | bij. $(n = r)$ |
|---|---|---|---|---|
| $N, R$ | $r^n$ | $r^{\underline{n}}$ | $r!S(n,r)$ | $r! = n!$ |
| $*N, R$ | $\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$ | $\binom{r}{n}$ | $\binom{n-1}{r-1}$ | 1 |
| $N, *R$ | $\sum_{k=1}^{r} S(n,k)$ | 0 oder 1 | $S(n,r)$ | 1 |
| $*N, *R$ | $P(n)$ | 0 oder 1 | $P(n,r)$ | 1 |

**Definition 3.10 (Zykel von Permutationen)**
Für $\pi \in S_n$ und $i \in [n]$ muß $1 \leq \#\{i, \pi(i), \pi^2(i), \ldots\} \leq n$ gelten. Ist $s \leq n$ minimal mit der Eigenschaft $\pi^s(i) = i$, dann liegt $i$ in einem **Zykel** $(i, \pi(i), \pi^2(i), \ldots, \pi^{s-1}(i))$ der **Länge** $s$. Ist $s = 1$, heißt $i$ **Fixpunkt** von $\pi$.

Offenbar zerfällt $[n]$ bezüglich $\pi$ in disjunkte Zykel; man schreibt z. B. $\pi = \binom{1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9}{5\,8\,3\,1\,9\,7\,6\,2\,4} = (1,5,9,4)(2,8)(3)(6,7)$.
Die Längen der Zykel von $\pi$ bilden eine Partition $\lambda(\pi) \vdash n$, den **Zykeltyp** von $\pi$ (zu obigem Beispiel: $\lambda(\pi) = 4^1 2^2 1^1$) mit Multiplizitäten $m_i(\pi)$;
$m(\pi) := \sum_{i=1}^{n} m_i(\pi) = \#$ Zyklen von $\pi$.

Die Zahlen $s(n,k) := \#\{\pi \in S_n | l(\lambda(\pi)) = k\}$ heißen **Sterlingzahlen der 1. Art**. Es gilt:

(i) $\#\{\lambda(\pi) | \pi \in S_n\} = P(n)$

(ii) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot m_i(\pi) = n$ für alle $\pi \in S_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $\#\{\pi \in S_n | \lambda(\pi) = n^{m_n(\pi)} \ldots 2^{m_2(\pi)} 1^{m_1(\pi)}\} = \frac{n!}{\prod_i m_i(\pi)! \prod_i i^{m_i(\pi)}}$

(iv) $s(n,k) = \sum_{(m_1,\ldots,m_k)} \frac{n!}{\prod_i m_i(\pi)! \prod_i i^{m_i(\pi)}}$ mit $\sum_i i m_i = n$ und $\sum_i m_i = k$.

(v) $s(0,k) = s(n,0) = 0$
$s(0,0) = 1$, $s(n,n) = 1$
$s(n,1) = (n-1)!$
$s(n,n-1) = \binom{n}{2}$

(vi) $\sum_{k=0}^{n} s(n,k) = n!$

(vii) **Rekursionsformel**:
$s(n,k) = s(n-1,k-1) + (n-1)s(n-1,k)$

Tabelle 3: Sterling-Dreieck der 1. Art

| $n\backslash k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | ... |
| 1 | 0 | 1 | | | | |
| 2 | 0 | 1 | 1 | | | |
| 3 | 0 | 2 | 3 | 1 | | |
| 4 | 0 | 6 | 11 | 6 | 1 | |
| 5 | 0 | 24 | 50 | 35 | 10 | 1 |

(viii) $x^{\underline{n}}$[3] $= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s(n,k) x^k$

**Definition 3.11 (Catalan-Zahlen)**
Sei $T_n$ die Anzahl der **numerierten Triangulierungen** (Zerlegung in Dreiecke) eines (regelmäßigen, d. h. konvexen) $n$-Ecks.
$T_3 = 1, \quad T_4 = 2, \quad T_5 = 5, \quad T_6 = 14$

[3] $= x(x-1)\ldots(x-n+1) \in \mathbb{Z}[x]$

(i) **Rekursion**:
$T_{n+1} = T_2 T_n + T_3 T_{n-1} + \ldots + T_n T_2 \quad (T_2 = 1)$

(ii) $C_n := T_{n+1} = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ heißen **Catalan-Zahlen**.
$C_0 := 0 \quad$ (Auch $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.)

**Definition 3.12 (Reflektiertes Polynom)**
Seien $q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $d \geq 1$ und $q_d \neq 0$.
Das Polynom $q(z) = 1 + q_1 z + \ldots + q_d z^d$ läßt sich als
$q(z) = (1 - \alpha_1 z)^{d_1}(1 - \alpha_2 z)^{d_2} \ldots (1 - \alpha_k z)^{d_k}$ oder
$q(z) = z^d(\frac{1}{z} - \alpha_1)^{d_1} \ldots (\frac{1}{z} - \alpha_k)^{d_k}$ darstellen.
Zu diesem Polynom existiert ein **reflektiertes Polynom** in der Form
$q^R(z) := z^d q(\frac{1}{z}) = 1 \cdot z^d + q_1 \frac{1}{z} z^d + \ldots + q_d (\frac{1}{z})^d z^d = z^d + q_1 z^{d-1} + \ldots + q_d$,
daß sich als $q^R(z) = (z - \alpha_1)^{d_1} \ldots (z - \alpha_k)^{d_k}$ darstellen läßt.
Die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sind Nullstellen der Vielfachheiten $d_1, \ldots, d_k$ dieses reflektierten Polynoms.

**Satz 3.6 (Satz über Zählfunktionen)** Für alle Zählfunktionen $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ sind dann die folgenden Bedingungen äquivalent:

A1 <u>Rekursion:</u> (linear, mit konstanten Koeff.)
$\forall n \geq 0 : \quad f(n+d) + q_1 f(n+d-1) + \ldots + q_d f(n) = 0$ mit Anfangsbedingungen $f(0), f(1), \ldots, f(d-1) \in \mathbb{C}$

A2 <u>Erzeugende Funktionen:</u>
$F(z) := \sum_{n \geq 0} f(n) z^n = \frac{p(z)}{q(z)}$ mit Grad $p(z) < d$

A3 <u>Partialbruchzerlegung:</u>
$F(z) := \sum_{i=1}^{k} \frac{g_i(z)}{(1 - \alpha_i z)^{d_i}}$ mit Grad $g_i(z) < d_i$ für alle $i$

A4 <u>Explizite Darstellung:</u>
$f(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n) \alpha_i^n$ mit Grad $p_i(n) < d_i$ für alle $i$
($k$ ist Anzahl der verschiedenen Nullstellen)

# 4 Graphen und Digraphen

**Definition 4.1 (Graph, Ecken, Kantenmenge)**
Ein (endlicher) **Graph** $G = (E, K)$ besteht aus einer (endlichen) Menge $E$ von **Ecken** und einer **Kantenmenge** $K \subset \mathcal{P}_2(E)^2 := \{\{u, v\} \in \mathcal{P}(E) | u \neq v\}$. Für eine Kante $\{u, v\}$ schreibt man kurz $uv$.

**Definition 4.2 (Multigraph)**
Ein **Multigraph** ist ein Graph, bei dem mehrfache Kanten zwischen 2 Ecken und Schlingen von einer Ecke zu sich selbst zugelassen sind.

**Definition 4.3 (Vollständiger Graph)**
Für $|E| = n$ heißt $K_n := (E, \mathcal{P}_2(E))$ der **vollständige Graph**.

**Definition 4.4 (Bipartiter Graph)**
Ein Graph $G = (E = M + N, K)$ heißt **bipartit**, wenn $E$ aus zwei disjunkten Mengen $M$ und $N$ besteht, und jede Kante eine Ecke in $M$ und eine in $N$ hat.
Sind alle Kanten zwischen $M$ und $N$ vorhanden, spricht man von einem **vollständigen bipartiten Graphen** $K_{M,N}$ oder $K_{m,n}$ für $|M| = m$ und $|N| = n$.

Analog definiert man den **$k$-partiten Graphen**.

**Definition 4.5 (Weg, Länge, Kreis)**
Ein **Weg** $P_n$ in einem Graphen besteht aus einer Folge $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von verschiedenen Ecken mit $u_i u_{i+1} \in K$ für alle $i$.
Die **Länge** des Weges ist $n - 1$.

Ein **Kreis** $P_n$ in einem Graphen besteht aus einer Folge $u_1, u_2, \ldots, u_n$ von verschiedenen Ecken mit $u_i u_{i+1} \in K$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $u_n u_1 \in K$.
Die **Länge** des Kreises ist $n$.

**Definition 4.6 (adjazent, inzident, Nachbarschaft)**
In einem Graphen heißen $u, v \in E$ **adjazent** (benachbart), wenn $uv \in K$.
Die Ecke $u \in E$ und die Kante $k \in K$ heißen **inzident**, wenn $u \in k$.
Zwei Kanten $k, l \in K$ heißen **inzident**, wenn $k \cap l \neq 0$.
Die **Nachbarschaft** von $u$ in $G$ ist $N(u, G) := \{v \in E | uv \in K\}$.
Der **Grad** (degree) von $u$ in $G$ ist $d(u) := |N(u, G)|$.

**Definition 4.7 (Adjazenzmatrix, Inzidenzmatrix)**
Für $G = (E, K)$ mit $E = \{u_1, \ldots, u_n\}$ und $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$ heißt die $n \times m$ Matrix $A = (a_{ij})$ mit
$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_i u_j \in K \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
die **Adjazenzmatrix** von $G$.
Die $n \times m$ Matrix $B = (b_{ij})$ mit $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_i \in k_j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$
heißt **Inzidenzmatrix** von $G$.

**Definition 4.8 (isoliert)**
Eine Ecke $u \in E$ heißt **isoliert**, wenn $d(u) = 0$ ist.

**Definition 4.9 (Ordnung, Größe)**
In einem Graphen $G = (E, K)$ heißt $n = |E|$ die **Ordnung** und $m = |K|$ die **Größe**.

**Definition 4.10 ($r$-regulär)**
Ein Graph heißt **$r$-regulär**, wenn $d(u) = r$ für alle $u \in E$. So ist z. B. $K_n$ $(n-1)$-regulär, $C_n$ ist 2-regulär und $Q_n$ ist $n$-regulär.

**Satz 4.1 (Handschlaglemma)** $\sum_{u \in E} d(u) = 2|K|$ (Beweis durch zweifaches Abzählen)

**Satz 4.2** $G$ hat eine gerade Anzahl Ecken ungeraden Grades.

**Definition 4.11**
Seien $G = (E, K)$ und $G' = (E', K')$ Graphen. Dann heißt eine Abb. $\phi : E \to E'$

a) **Graphenhomomorphismus**, wenn
$uv \in E => \phi(u)\phi(v) \in K'$.

b) **Graphenisomorphismus**, wenn $\phi$ bijektiv ist:
$uv \in E <=> \phi(u)\phi(v) \in K'$.
Existiert ein Isomorphismus zwischen $G$ und $G'$, heißen sie **isomorph**.

**Definition 4.12 (Untergraph, induziert, $p$-Clique)**
Ein Graph $G' = (E', K')$ heißt **Untergraph** von $G = (E, K)$, wenn $E' \subset E$ und $K' \subset K'$. Gilt zusätzlich $K' = K \cap \mathcal{P}_2(E')$, d. h. $G'$ enthält alle Kanten zwischen den Ecken in $E'$, die auch in $G$ vorhanden waren, heißt $G'$ **induzierter Untergraph**.
Speziell: Ist $K_p$ ein induzierter Untergraph von $G$, dann sagt man: $G$ enthält eine $p$-**Clique**.

**Satz 4.3 (Theorem von Ramsey)** Jede Kantenfärbung eines $K_n$, wobei $n \geq N(a_1, \ldots, a_m; 2)$ mit $m$ Farben $c_1, \ldots, c_m$, enthält eine $c_1$-farbige $a_1$-Clique oder eine $c_2$-farbige $a_2$-Clique oder ... oder eine $c_m$-farbige $a_m$-Clique.

**Satz 4.4 (Satz von Turan)** Sei $G$ ein Graph mit $E = \{v_1, \ldots, v_n\}$ und $m$ Kanten, der keine $p$-Clique ($p \geq 2$) enthält, dann ist $m \leq (1 - \frac{1}{p-1})\frac{n^2}{2}$.
Der größtmögliche Wert wird angenommen, wenn $G = K_{n_1,\ldots,n_{p-1}}$ mit $n_1 + \ldots + n_{p-1} = n$ und $|n_i - n_j| \leq 1$ für alle $i, j$. $G$ heißt dann **Turangraph**.

**Definition 4.13 (Kantenfolge)**
Für einen Graph $G = (E, K)$ heißt eine Folge $k_1, \ldots, k_r \in K$ **Kantenfolge** in $G$ von der Länge $r$, wenn $|k_i \cap k_{i+1}| \geq 1$ für $i = 1, \ldots, r - 1$.
Man schreibt auch: $v_{i_0} k_1 v_{i_1} k2 \ldots k_r v_{i_r}$.
Die Kantenfolge **verbindet** $v_{i_0}$ und $v_{i_r}$.

**Definition 4.14 (Abstand, Durchmesser)**
Für $u, v \in E$ ist der **Abstand** von $u$ und $v$ $d(u, v) := \min \#\{r | k_1, \ldots, k_r \text{ verbindet } u \text{ und } v\}$. Falls keine verbindende Kantenfolge existiert, ist $d(u, v) := \infty$.

$D(G) := \max_{u,v \in E} d(u, v)$ heißt **Durchmesser** von $G$.

**Definition 4.15 (zusammenhängend, Komponenten)**
Ist $D(G) < \infty$, heißt $G$ **zusammenhängend**, andernfalls **unzusammenhängend**. Die maximalen induzierten Untergraphen von $G$ heißen **Komponenten** von $G$.

**Definition 4.16**
Eine Kantenfolge $v_0, k_1 v_1 \ldots k_r v_r$ in $G$ heißt

- **geschlossen**, wenn $v_0 = v_r$.
- **Kantenzug**, wenn $k_i \neq k_j \quad \forall i \neq j$.
- **Weg**, wenn $v_i \neq v_j \quad \forall i \neq j$.
- **Kreis**, wenn die Kantenfolge geschlossen ist, und $v_i \neq v_j \quad \forall i \neq j$, außer $v_0 = v_r$.

**Definition 4.17 (Euler-Weg/Kreis)**
Ein **Euler-Weg/Kreis** im (Multi-)Graphen $G$ ist ein Weg / geschlossener Kantenzug, der jede Kante von $G$ genau einmal durchläuft.
$G$ ist ein **Eulergraph**, wenn er einen Euler-Kreis besitzt.

**Definition 4.18 (Hamilton-Weg/Kreis)**
Ein **Hamilton-Weg/Kreis** im (Multi-)Graphen $G$ ist ein Weg / geschlossener Kantenzug, der jede Ecke von $G$ genau einmal durchläuft.
$G$ ist ein **Hamiltongraph**, wenn er einen Hamilton-Kreis besitzt.

**Satz 4.5**
a) Sei $G$ ein Graph mit $E = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $K = \{k_1, \dots, k_n\}$ und die $m \times n$ Matrix $B$ die zugehörige Inzidenzmatrix und außerdem $D = \text{diag}(d(v_1), \dots, d(v_n))$. Dann ist $B \cdot B^T = A + D$.

b) Sei $A^l$ die $l$-te Potenz der Adjazenzmatrix $A$ eines Graphen $G$. Dann ist $A^l(ij) = |\{\text{Kantenfolgen von } v_i \text{ nach } v_j \text{ der Länge } l\}|$.

**Definition 4.19 (matching, matching-Zahl)**
Sei $G = (E, K)$ ein Graph. Eine Teilmenge $M \subset K$ heißt **matching**, wenn keine zwei Kanten aus $M$ inzident sind, d. h. eine gemeinsame Ecke besitzen.

$m(G) := \max\{|M| \; |M \subset K, \; M \text{ matching}\}$ heißt die **matching-Zahl** von $G$ und ein matching mit $|M| = m(G)$ heißt **maximal**.

**Satz 4.6 (Satz von König-Hall)** Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph mit $E = S \,\dot\cup\, T$ und $K \subset S \times T$. Dann ist $m(G) = |S|$ <=> für alle $A \subset S$ gilt: $|A| \leq |N(A)|$ mit $N(A) = \bigcup_{a \in A} N(a)$.

**Definition 4.20 (Kritische Familie)**
Sei $n \geq 2$ und $T_i := N(v_i) \subset T$ für alle $v_i \in S$. Eine Familie von $l$ Mengen $T_i$ heißt **kritisch**, wenn ihre Vereinigung gerade $l$ Elemente enthält $(1 \leq l \leq n)$.

**Definition 4.21 (Wald, Baum, Blatt, Zweig)**
Ein Graph $F$ (forest) heißt **Wald**, wenn $F$ keinen Kreis enthält und ein **Baum** (tree), wenn er zusammenhängend ist.

Eine Ecke $v$ eines Baumes, die den Grad 1 hat, heißt **Blatt** (leaf) und mit inzidenter Kante **Zweig** (twig).

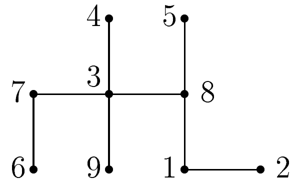
**Definition 4.22 (aufspannender Baum)**
Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph. Dann heißt ein Untergraph $T$, der ein Baum der Ordnung $n = |E|$ ist, ein **aufspannender Baum**.

**Satz 4.7** Für einen auspannenden Baum $T$ der Ordnung $n \geq 2$ gilt
$\sum_{v \in E(T)} d(v) \overset{Handschlaglemma}{=} 2|K| = 2(|E| - 1) = 2n - 2.$

**Satz 4.8 (Satz von Cayley)** Es gibt $n^{n-2}$ numerierte Bäume mit der Eckenmenge $[n]$.

**Definition 4.23 (Prüfersequenz)**
Bijektion $P$, welche jedes $T$ mit $E = [n]$ auf genau ein
$P(T) = \underbrace{(a_1, \dots, a_{n-2})}_{\text{Prüfersequenz zu } T} \,\hat{=}\, [n]^{n-2}$ abbildet:

1) Finde das Blatt $v$ von $T$ mit der kleinsten Nummer; dann ist $a_1$ die Nummer des Nachbarn.
2) Entferne den Zweig mit Blatt $v$ und wiederhole 1) und 2) oft genug, um $a_2, \dots, a_{n-2}$ zu finden. (Es bleibt immer die Ecke $n$ und ein Nachbar übrig.)



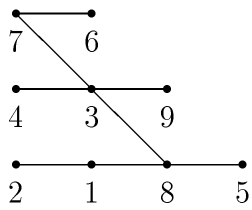

$\stackrel{P}{\mapsto} (1, 8, 3, 8, 7, 3, 3)$

Rest: $(9, 3)$

Umkehrung:
Sei $d_i$ der Grad der Ecke $i$ und $f_i := \{j | a_j = i\}$; $f_i$ Nachbarn von $i$ werden entfernt und es bleibt mindestens noch ein Nachbar übrig.
$n - 2 = \sum_{i=1}^n f_i \stackrel{f_i \le d_i - 1}{\le} \sum_{i=1}^n (d_i - 1) = 2n - 2 - n = n - 2 => f_i = d_i - 1$

$a = (a_1, \ldots, a_{n-2}) \mapsto T$ gegeben durch:
1) $b_1 := \min[n] \backslash \{a_1, \ldots, a_{n-2}\}$ ergibt Kante $b_1 a_1$.
2) $b_2 := \min[n] \backslash \{b_1, a_2, \ldots, a_{n-2}\}$ ergibt Kante $b_2 a_2$.
...
Der vorletzte Knoten $b_{n-1}$ ergibt sich, und den letzten Knoten $b_n := \min[n] \backslash \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ muss man an den letzten Knoten in der Püfersequenz anhängen ($b_n a_{n-2}$).

$(1, 8, 3, 8, 7, 3, 3) \stackrel{P^{-1}}{\mapsto}$
$2, 1, 4, 5, 6, 7, 8$




**Definition 4.24 (Bäume mit zusätzlicher Struktur)**
$T_n$ sei die Menge aller Bäume mit $n$ Ecken.

- $rT_n := \{(T, r_0) | T \in T_n,\ r_0 \in E(T)\}$ die Menge der **verwurzelten Bäume** mit $n$ Ecken, $r_0$ heißt **Wurzel** (root).
  Zeichnung wie gradiertes Hassediagramm mit Rangfkt. $\varrho(r) := d(r, r_0)$ für alle $r \in E(T)$.

- $OrT_n$[4] $:= \{T \in rT_n$ und für alle $r \in E(T)$ ist die Menge $\mathrm{succ}(r)$[5] der Nachfolger von $r$ linear geordnet$\}$

- $MrT_n$[6] $:= \{T \in rT_{n+1}$, wobei die Ecken monoton durchnumeriert sind$\}$ Lineare Erweiterungen der Hassediagramme von $T$ mit Zahlen aus $\{0, 1, \ldots, n\}$.

**Satz 4.9 (Matrix-Gerüst-Satz)** Sei $B$ die Inzidenzmatrix eines Graphen $G$ und $C$ die $n \times m$ Matrix, die aus $B$ hervorgeht, wenn man in jeder Spalte genau eine 1 zu -1 macht. Sei weiter $M = C \cdot C^T$. Dann ist für beliebiges $i \in [n]$ $t(f) := \#\{T | T$ aufspannender numerierter Baum von $f\} = \det M_{ii}$, wobei $M_{ii}$ aus $M$ durch Drehen der $i$-ten Zeile und $i$-ten Spalte besteht.

**Definition 4.25 (Gerichteter Graph/Digraph)**
Ein (endlicher) **gerichteter Graph** oder **Digraph** $\vec{G} = (E, K)$ besteht aus einer (endlichen) Eckenmenge $E$ und einer Menge $K \subset E \times E$ von **gerichteten Kanten** bzw. **Bögen**.
Jedes Paar $(u, v) \in K$ mit $u \neq v$ kommt höchstens einmal vor, sonst spricht man von einem Multigraph.

[4] Ordered tree
[5] $\mathrm{succ}(r) := \{r' \in N(r) | \varrho(r') = \varrho(r) + 1\}$
[6] monoton labeled

Für $k = (u, v) = \overrightarrow{uv}$ heißt $k^- = u$ die **Anfangsecke** und $k^+ = v$ die **Endecke**.
Die **Inzidenzmatrix** von $G$ ist die $n \times m$ Matrix $B = (b_{ij})$ mit

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{falls } u_i = k_j^+ \\ -1 & \text{falls } u_i = k_j^- \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

**Definition 4.26 (Aus-Grad, Ein-Grad)**
$N^+(u) := \{v \in E | \overrightarrow{uv} \in K\}$ "Aus-Nachbarschaft".
$N^-(u) := \{v \in E | \overrightarrow{vu} \in K\}$ "Ein-Nachbarschaft".
$d^+ := |N^+(u)|$ **Aus-Grad**.
$d^- := |N^-(u)|$ **Ein-Grad**.

**Definition 4.27 (azyklisch, zusammenhängend)**
Ein Digraph $\overrightarrow{G}$ heißt **azyklisch**, wenn er keinen gerichteten Kreis enthält. Er heißt **zusammenhängend**, wenn der zugrunde liegende Graph zusammenhängend ist, und **stark zusammenhängend**, wenn für alle $u, v \in E$ ein gerichteter Weg existiert.

**Definition 4.28 (Netzwerk)**
Ein zusammenhängender Digraph $\overrightarrow{N} = (E, K$ heißt **Netzwerk**, wenn genau ein $u \in E$ mit $d^-(u) = 0$ und $d^+(u) > 0$ existiert, die **Quelle**, genau ein $v \in E$ mit $d^-(v) > 0$ und $d^+(u) = 0$ existiert, die **Senke** und es eine Kapazitätsfkt. $c : K \to [0, \infty) = \mathbb{R}_0^+$ gibt, wobei $c(k)$ die **Kapazität** des Bogens $k$ ist. Zusammen: $\overrightarrow{N} = (E, K, u, v, c)$

**Definition 4.29 (Fluß)**
Eine Funktion $f : K \to \mathbb{R}$ heißt **Fluß**, wenn

$0 \leq f(k) \leq c(k)$ für alle $k \in K$ (Kapazitätsbedingung) und

$f^+(a) = f^-(a)$ für alle $a \in E \backslash \{u, v\}$ (Gleichgewichtsbedingung) gilt.

Es gibt immer den **Nullfluß** $f_o(k) = 0$ für alle $k \in K$.

**Definition 4.30 (Flußstärke)**
Sei $f$ ein Fluß in $\overrightarrow{N}$, dann heißt $w(f) := f^+(u)$ ($u$ ist die Quelle) die **Flußstärke** oder **Wert** von $f$.
$f$ heißt **maximal**, wenn kein Fluß $f'$ mit $w(f') > w(f)$ existiert.

**Definition 4.31 (Schnitt)**
Ein **Schnitt** $(X, Y)$ ist eine Partition $E = X + Y$ mit $u \in X$ und $v \in Y$. Die **Kapazität des Schnittes** ist $\text{cap}(X, Y) = \sum c(k)$, wobei die Summe über alle Kanten $k$ mit $k^- \in X$ und $k^+ \in Y$ geht. $(X, Y)$ heißt **minimal**, wenn kein Schnitt $(X', Y')$ mit $\text{cap}(X', Y') >\text{cap}(X, Y)$ existiert.
Der **minimale Schnitt** besteht aus $(X_f, Y_f)$ mit $X_f = \{x | x = u$ oder es existiert ein $f$-zunehmender Weg von $u$ nach $x\}$ und $Y_f = E \backslash X_f$.

**Definition 4.32**
Sei $f$ ein Fluß in $\overrightarrow{N}$, dann heißt $k \in K$:

- **$f$-Null**, wenn $f(k) = 0$.
- **$f$-positiv**, wenn $f(k) > 0$.
- **$f$-ungesättigt**, wenn $f(k) < c(k)$.
- **$f$-gesättigt**, wenn $f(k) = c(k)$.

**Satz 4.10** Seien $(X, Y)$ ein Schnitt und $f$ ein Fluß im Netzwerk $\overrightarrow{N}$, dann ist $w(f) \leq cap(X, Y)$.
Ist $w(f) = cap(X, Y)$, so ist $f$ ein maximaler Fluß und $(X, Y)$ ein minimaler Schnitt.

**Definition 4.33 (Vorwärtsbogen, Rückwärtsbogen)**
Sei $f$ Fluß im Netzwerk $\overrightarrow{N}$, $G(\overrightarrow{N})$ der zugrunde liegende Graph und $w$ ein Weg in $G(\overrightarrow{N})$ mit einer Länge von mindestens 1. Ist ein Bogen $k \in W$ gleich orientiert wie $w$, heißt er **Vorwärtsbogen**, sonst **Rückwärtsbogen**. $s(w) := \min_{k \in w} s(k)$ mit $s(k) := \begin{cases} c(k) - f(k) & , k \text{ Vorwärtsbogen von } w \\ f(k) & , k \text{ Rückwärtsbogen} \\ \infty & , \text{ sonst} \end{cases}$

Der Weg $w$ heißt:

- $f$-**gesättigt**, wenn $s(w) = 0$.
- $f$-**ungesättigt**, wenn $s(w) > 0$.
- $f$-**zunehmend**, wenn $w$ $f$-ungesättigt und $w$ von $u$ zu einem $x$ (in Richtung $v$) führt.

Für einen $f$-zunehmenden Weg ist $F : K \to [0, \infty)$ mit
$$F(k) := \begin{cases} f(k) + s(w) & , \text{wenn } k \text{ Vorwärtsbogen von } w \\ f(k) - s(w) & , \text{wenn } k \text{ Rückwärtsbogen von } w \\ f(k) & , \text{ sonst} \end{cases}$$
ist ein neuer Fluß in $\overrightarrow{N}$ mit $w(F) = w(f) + s(w) > w(f)$.

**Satz 4.11** Ein Fluß $f$ in $\overrightarrow{N}$ ist genau dann maximal, wenn es keinen $f$-zunehmenden Weg gibt.

**Satz 4.12 (Max-flow, min-cut)** In jedem Netzwerk $\overrightarrow{N} = (E, K, u, v, c)$ existieren eine maximaler Fluß $f$ und ein minimaler Schnitt $L = (X, Y)$ mit $w(f) = \text{cap}(L)$.

**Definition 4.34 (eben/planar, Seiten/Flächen)**
Ein Graph $G$ mit $n$ Ecken und $k$ Kanten ist **eben** oder **planar**, wenn er im $\mathbb{R}^2$ ohne Überdeckungen der Kanten gezeichnet werden kann. Dann wird $\mathbb{R}^2 \backslash G$ in $f$ Zusammenhangskomponenten - die **Seiten** oder **Flächen** zur Zeichnung von $G$ - zerlegt; dabei zählt das Äußere als eine Fläche mit.
$\boxed{n - k + f = 2}$ **Euler-Formel**

**Definition 4.35 (Dualer Graph)**
Der **duale Graph** $G^*$ zu einem Graphen $G$ hat eine Eckenmenge, die pro Fläche in $G$ eine Ecke enthält, und die Kanten ergeben sich, indem für zwei benachbarte Flächen [7] in $G$ eine Kante zwischen den zugehörigen Ecken in $G^*$ eingefügt wird.

[7] d. h. die beiden Flächen haben eine gemeinsame Kante