Diskrete Strukturen

eine Mitschrift zur Vorlesung von

Prof.Dr.rer.nat. Triesch

im Sommersemester 1998

letzte Aktualisierung:

4. September 1998

Dieses Skript ist E-Mail-Ware!

Fehlerbeschreibungen, Verbesserungsvorschläge, Lob und Tadel bitte an folgende Adresse:

DiskreteMathematik@gmx.net

Vorwort

Liebe Freunde der Diskreten Mathematik!

Das vorliegende Skript stellt eine Vorlesungsmitschrift zu „Diskrete Strukturen“, gelesen von Prof.Dr.E.Triesch im Sommersemester 1998 an der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule zu Aachen, dar. Diese ist Produkt unserer handschriftlichen Aufzeichnungen und daher sei zum Umgang mit dem SKript folgendes angemerkt:

Unsere Intention war es, den Vorlesungsinhalt noch einmal in einer strukturierten Form aufzuarbeiten, ihn mit einer entsprechenden Gliederung zu versehen und diese in LaTeXumzusetzen. Dies soll den Stoff grob umreißen und eine gezielte Vorbereitung auf die Vordiplomsklausur ermöglichen. Wir möchten an dieser Stelle jedoch darauf hinweisen, daß das Skript nur eine Anregung zum Selbststudium sein kann und nicht als Lehrbuch verstanden werden will. Hierzu sei auf das Werk von Martin Aigner: „Diskrete Mathematik“, erschienen bei Vieweg Studium verwiesen. Desweiteren können wir keine Garantie für Vollständigkeit und Richtigkeit geben. Wir möchten daher anregen, uns über eventuelle Fehler mit einer E-Mail an DiskreteMathematik@gmx.net zu benachrichtigen.

Es bleibt zu wünschen, daß dieses Werk dem Leser den Stoff der Vorlesung etwas näher bringt.

Aachen, im August 1998

Matthias Egerland
Florian Hasibether
Simon Kirstein

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Elementare Zählprinzipien

Gleichheitsregel:

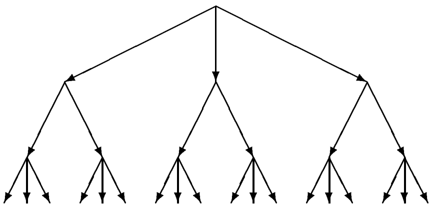
$$|S| = |T| \Leftrightarrow \text{es ex. eine Bijektion zwischen } S \text{ und } T$$

Summenregel:

Falls $S = \dot{\bigcup}_{i=1}^{t} S_i$ disjunkte Vereinigung endlicher Mengen, so ist $|S| = \sum\limits_{i=1}^{t} |S_i|$

Produktregel:

Ist $S = S_1 \times \ldots \times S_t$ ein kartesisches Produkt, so ist $|S| = \prod\limits_{i=1}^{t} |S_i|$



$$\left.\begin{array}{c} n \\ n-1 \\ n-2 \\ \vdots \end{array}\right\} n!$$

Beispiel:

$\binom{n}{k}$ sei die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge S.

$$\binom{S}{K} := \{A \subseteq S : |A| = k\}, \binom{n}{k} = |\binom{S}{K}|$$

Gesucht: Rekursion für $\binom{n}{k}$

wähle $x \in S$ beliebig.

$M := \{A \in \binom{S}{K} : x \in A\}$

$N := \{A \in \binom{S}{K} : x \notin A\}$

$M \dot{\cup} N = \binom{S}{K}$

zu $|M|$: $|M| = \left|\binom{S \backslash \{x\}}{k-1}\right| = \binom{n-1}{k-1}$

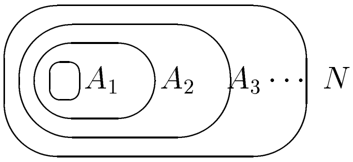
zu $|N|$: $|N| = \left|\binom{S \backslash \{x\}}{k}\right| = \binom{n-1}{k}$

Summenregel: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Beispiel:
Es seien R, N endliche Mengen, $R^N := \{f : N \to R\}$. Was ist $|R^N|$?
Antwort: $|R^N| = |R|^{|N|}$
$N = \{x_1, \ldots, x_n\}_{\neq}$[1]
$R^N \simeq$[2] $\{(f(x_1), \ldots, f(x_n)) : f \in R^N\} = \underbrace{R \times R \times \ldots \times R}_{n-mal}$

$2^N := \{A : A \subseteq N\}; |2^N| = 2^{|N|}$
$\underbrace{2^N}_{\in A} \simeq \{f : N \to \{0,1\}\}$
$A \to f_A; f_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Folgerung: Was ist die Anzahl der Ketten $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_r \subseteq N$ in 2^N der Länge r?
Antwort: $(r+1)^{|N|} = (r+1)^n$
Bijektion:$(A_1, A_2, \ldots, A_r) \to f$, wobei
$f(x) = i$, falls $x \in A_i \backslash A_{i-1}$; $i = 1, \ldots, r+1$; $A_0 := \emptyset$; $A_{r+1} := N$



$$A_i = \{x \in N : f(x) \leq i\}$$

1.1.1 Regel vom zweifachen Abzählen

Es sei $M = (m_{ij})$ eine Matrix mit $m_{ij} \in \mathbb{R}$ für alle i, j.
Dann gilt:

$$\sum_i \left(\sum_j m_{ij} \right) = \sum_j \left(\sum_i m_{ij} \right)$$

Beispiel: $i \mid j$
$n : t(n) =$ Anzahl der Teiler von n
$\overline{t(n)}$[3]$:= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} t(i)$
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $M = (m_{ij})$ die folgende $n \times n$-Matrix:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } i \mid j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Bezeichnung: Es sei A eine Aussage.

$$[A] := \begin{cases} 1, & \text{falls } A \text{ wahr} \\ 0, & \text{falls } A \text{ falsch} \end{cases}$$

[1] Damit soll symbolisiert werden, daß die Menge keine gleichen Elemente enthält
[2] bijektiv
[3] arithmetisches Mittel

$$m_{ij} = [i \mid j]$$

Offenbar ist $t(j) = \sum\limits_i m_{ij}$

$$nE(n) = \sum_{j=1}^{n} t(j) = \sum_j \sum_i m_{ij} = \sum_i \sum_j m_{ij}$$

Es ist $\sum\limits_j m_{ij} = \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$[4]

$\Rightarrow \sum\limits_i \sum\limits_j m_{ij} = \sum\limits_{i=1}^{n} \lfloor \frac{n}{i} \rfloor$

$$E(n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \begin{cases} \leq \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} =: H_n \\ \geq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \right) - 1 \end{cases}$$

H_n heißt n-te harmonische Zahl

$\overline{t(n)} \sim$[5]$\log n$

1.1.2 Schubfachprinzip

Verteilt man n Gegenstände auf r Fächer und ist $n > r$, so enthält ein Fach (mind.) 2 Gegenstände.

Verallgemeinerung:
Ist $f : N \to R$ mit $|N| = n > r = |R|$, so ex. mindestens ein $a \in \mathbb{R}$ mit $|f^{-1}(a)| \geq \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor + 1$

(Angenommen dies wäre nicht der Fall:

$$n = |N| = \left| \dot{\bigcup_{a \in \mathbb{R}}} f^{-1}(a) \right| = \sum_{a \in \mathbb{R}} \underbrace{|f^{-1}(a)|}_{\leq \lfloor \frac{n-1}{r} \rfloor} \leq \frac{n-1}{r} = n - 1 \to \text{Widerspruch!})$$

<u>Beispiel:</u> Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_{n^2}, a_{n^2+1}$ $n^2 + 1$ verschiedene Zahlen.
<u>Behauptung:</u> Es gibt Indizes $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1}$ mit:

$$a_{i_1} < a_{i_2} < \ldots < a_{i_{n+1}} \text{ oder } a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_{n+1}}$$

<u>Beweis:</u> Für jedes i, $1 \leq t_i \leq n^2 + 1$, sei t_i die maximale Länge einer mit a_i beginnenden, monoton steigenden Folge $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_i, \ldots, a_{n^2}, a_{n^2+1})$
Falls ein i ex. mit $t_i \geq n + 1$, so sind wir fertig, also: Für alle i gilt: $1 \leq t_i \leq n$.
Schubfachprinzip: Es gibt ein $t \in \{1, \ldots, n\}$, so daß die Anzahl der i in $\{1, \ldots, n^2 + 1\}$ mit $t_i = t$ mindestens $\underbrace{\left\lfloor \frac{(n^2+1) - 1}{n} \right\rfloor + 1}_{n+1}$ beträgt, also etwa

$$t_{i_1} = t_{i_2} = \ldots = t_{i_{n+1}} = t \;;\; 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_{n+1} \leq n^2 + 1$$

Angenommen, $a_{i_r} < a_{i_{r+1}}$, $1 \leq r \leq n$.

[4] nach unten gerundet
[5] asymptotisch

Wir wählen eine aufsteigende, mit $a_{i_{r+1}}$ beginnende Folge der Länge $t = t_{i_{r+1}}$ und verlängern diese zu einer $(t+1)$-elementigen, aufsteigenden Folge, die mit a_{i_r} beginnt.
$\Rightarrow t_{i_r} \geq t+1$, Widerspruch zu $t_{i_r} = t$
$\Rightarrow a_{i_1} > a_{i_2} > \ldots > a_{i_n} > a_{i_{n+1}}$

Beispiele: Wir betrachten $n \times n$-Matrizen $M = (m_{ij})$ mit

1. $m_{ij} \in \mathbb{N}$

2. Falls $m_{ij} = m$, so ex. genau ein Paar (k,l) mit $(k,l) \neq (i,j)$ und $m_{kl} = m$
   ($\Rightarrow n^2$ gerade $\Rightarrow n$ gerade)

Es sei $\pi \in S_n := \{\pi : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\} \pi \text{ Bijektion}\}$
Eine Transversale in M ist gegeben durch die Paare $\{(i,\pi(i));\, 1 \leq i \leq n\}$ $(\pi \in S_n)$
Die Transversale heißt zulässig, falls alle $m_{i,\pi(i)}, 1 \leq i \leq n$, verschieden sind!
Frage: Gibt es immer eine zulässige Transversale?

- Nein, bei z.B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

- Ja, für $n \geq 4$

Beispiel: $(n \times n)$-Matrizen $M = (m_{ij})$

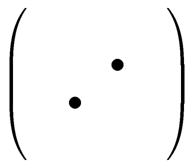
1. $m_{ij} \in \mathbb{N}$

2. Falls $m_[ij] = m$, so existiert genau ein Paar $(k,l) \neq (i,j)$ mit: $m_{kl} = m$, n gerade

Transversale: $\pi \in S_n$
$$\{(i,\pi(i)) : 1 \leq i \leq n\} \text{ Transversale}$$
zulässige Transversale: $\pi \in S_n$ mit $|\{m_{i,\pi(i)} : 1 \leq i \leq n\}| = n$
Für $n = 2 :$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
$n \geq 4$ (gerade) : Es gibt immer eine zulässige Transversale

Beweis: Die Matrix M sei gegeben.
Ein Paar $\{(i,j),(k,l)\}$ mit $i+k$ und $j+l$ und $m_{ij} = m_{kl}$ nennen wir *singulär*.
$$\pi \text{ zulässig} \Leftrightarrow \pi \text{ enthält kein singuläres Paar}$$
Es sei T die Menge der singulären Paare $0 \leq |T| \leq \frac{n^2}{2}$
$N := (n_{\pi,t})_{\pi \in S_n, t \in T}$ sei die folgende Matrix:
$$n_{\pi,t} := \left\{ \begin{array}{l} 1, \pi \text{ enthält das Paar } t \\ 0, \text{sonst} \end{array} \right\} = [\pi \text{ enthält } t]$$

$$\underbrace{\sum_{\pi} \left(\sum_{t} n_{\pi,t} \right)}_{n! \text{ Summanden}} = \sum_{t} \underbrace{\left(\sum_{\pi} n_{\pi,t} \right)}_{(n-2)!} = |T|(n-2)!$$



M

Schubfachprinzip: Es ex. mind. ein Summand π_0 mit $\sum_t n_{\pi_0,t} \overset{\substack{|T|\le \frac{n^2}{2}\\ \downarrow}}{\le} \left\lfloor \frac{n}{2(n-1)} \right\rfloor = 0$ für $n \ge 4$

π_0 ist also zulässig!

1.1.3 Die fundamentalen Zählkoeffizienten

$\binom{n}{k}$ zählt die k-Untermenge einer n-elementigen Menge N *Binomialkoeffizienten*

$S_{n,k}$ Anzahl der Mengenpartitionen von N in k nichtleere Blöcke heißen *Stirlingzahlen 2.Art*

$$\{1,2,3,4\} = \{1,2\} \,\dot\cup\, \{3\} \,\dot\cup\, \{4\}$$

$P_{n,k}$: Anzahl der Zahlpartitionen von n in k Summanden

$$n = \underbrace{n_1}_{>0} + \underbrace{n_2}_{>0} + \ldots + \underbrace{n_k}_{>0},\ \text{Œ}\, n_1 \ge n_2 \ge \ldots \ge n_k > 0$$

$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} P_{n,k}$$

Darstellung der Zahlpartitionen durch Ferrersgraphen

Beispiel: $10 = 5 + 3 + 2$

$$\begin{array}{ccccc} \times & \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & & \\ \times & \times & & & \end{array}$$

$1 \quad 2 \quad 3 \ \ldots \ n$

$\pi(1)\ \pi(2)\ \pi(3)\ \ldots\ \pi(n)$

k-Partitionen von N

Alle $a_1, \ldots, a_k$ mit $a_i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le k$ und $a_1 \ne a_j$, $1 \le i < j \le n$

Anzahl: $n(n-1)\ldots(n-k+1) =: n^{\underline{k}}$ „fallende Faktorielle“

$n(n+1)\ldots(n+k-1) =: n^{\overline{k}}$

$\binom{n}{k} k! = n^{\underline{k}}$

$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$

Stirlingzahlen 2. Art zählen ungeordnete k-Mengenpartitionen ab

$$\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\} = \{\{1,2\},\{4\},\{3\}\}$$

Die *geordneten* k-Mengenpartitionen von N werden durch $S_{n,k} \cdot k!$ abgezählt.

Geordnete k-Zahlpartitionen werden <u>nicht</u> durch $k!\ P_{n,k}$ abgezählt, da die Summanden nicht alle verschieden sein müssen.

Es gilt: Die Anzahl der geordneten k-Zahlpartitionen von n ist $\binom{n-1}{k-1}$.

Zum Beweis konstruieren wir eine Bijektion nach $\binom{\{1,\ldots,n-1\}}{k-1}$

$$f : (n_1, \ldots, n_k) \to \{n_1, n_1 + n_2, \ldots, n_1 + n_2 + \ldots + n_{k-1}\}$$

Wegen $n_i \ge 1$ für alle i: Bild $f \le \binom{\{1,\ldots,n-1\}}{k-1}$

Die Inverse g ist gegeben durch:

$$g(\{a_1 < a_2 < \ldots < a_{k-1}\}) = (a_1, a_2 - a_1, \ldots, a_{k-1} - a_{k-2}, n - a_{k-1})$$

Zusammenfassung:

$\binom{n}{k}$	k-Untermengen einer n-elementigen Menge
	$\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$
$S_{n,k}$	Anzahl der Mengenpartitionen von N ($\lvert N\rvert = n$) in k nichtleere Blöcke
	Stirlingszahlen 2. Art
$P_{n,k}$	Anzahl der Zahlpartitionen von n in k Summanden
	$(n = n_1 + \ldots + n_k = n_k + \ldots + n_1)$
$P(n)$	$=\sum_{k=1}^{n} P_{n,k}$ (Anzahl der Partitionen)

Gezeigt: Die Anzahl der geordneten k-Partitionen von n ist $\binom{n-1}{k-1}$

1.1.4 Multimengen

Bei Mengen gilt: $\{1,2,3\} = \{1,2,2,3\} = \{1,3,2\}$,
bei Multimengen gilt: $\{1,2,3\} = \{1,3,2\} \neq \{1,2,2,3\}$

Formal: Eine Multimenge ist ein Paar (M, V), $v : M \leftarrow N$

Problem: Bestimme die Anzahl der k-elementigen Multimengen mit Elementen aus N.

Lösung: $\binom{n+k-1}{k} = \frac{n^{\overline{k}}}{k!}$

Bijektion f auf $\binom{\{1,\ldots,n+k-1\}}{k}$

Œ $N := \{1, \ldots, n\}$

Schreiben k-Multimengen mit Elementen aus N als Folgen

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & \leq & a_2 & \leq & a_3 & \leq & \ldots & \leq & a_k \\ & & +1 & & +2 & & & & +k-1 \end{array}$$

$f(\{a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_k\}) = \{a_1 + a_2 + 1, a_3 + 2, \ldots, a_k + (k-1)\}$

Bild $f \subseteq \binom{\{1,\ldots,n+k-1\}}{k}$

$g = f^{-1}$ ist definiert wie folgt:

$\{b_1 < b_2 < \ldots < b_k\} \subseteq \{1, \ldots, n+k-1\}$

$g(\{b_1, \ldots, b_k\}) := \{b_1, b_2 - 1, b_3 - 2, \ldots, b_k - (k-1)\}$

Klar, daß f eine Bijektion ist.

1.1.5 Abzählung von Abbildungen mit „gewissen“ Eigenschaften

Bekannt: $\lvert R^N\rvert = r^n$ mit $r := \lvert R\rvert$, $n := \lvert N\rvert$

$Inj(N, R) = \{f \in R^N : f \text{ injektiv}\}$

$$\lvert Inj(N,R)\rvert = r(r-1)(r-2)\ldots(r-n+1) = r^{\underline{n}}$$

$Surj(N, R) = \{f \in R^N : f \text{ surjektiv}\}$

f definiert eine Partition von N in r nichtleere Klassen.

$$\lvert Surj(N,R)\rvert = S_{n,r} \cdot r! \quad \lvert S_n\rvert = n!$$

Beispiel: $R^N = \dot{\bigcup\limits_{\substack{A\subseteq R\\ A\neq\emptyset}}} Surj(N,A)$

$$\begin{aligned} r^n = |R^N| &= \sum_{\substack{A\subseteq R\\ A\neq\emptyset}} |Surj(N,A)| \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{A\subseteq R\\ |A|=k}} S_{n,k}k! \\ &= \sum_{k=1}^{n} \binom{r}{k} k! S_{n,k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} S_{n,k}\cdot r^{\underline{k}} \end{aligned}$$

Aufgabe: Verteilung von Bällen auf Fächer

	bel.	inj.	surj.	bij.
$\begin{matrix}N\\R\end{matrix}$	r^n	$r^{\underline{n}}$	$S_{n,r}\cdot r!$	$r! = n!$
$\begin{matrix}N*\\R\end{matrix}$	$\frac{r^{\overline{n}}}{n!}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$	$1(n=r)$
$\begin{matrix}N\\R*\end{matrix}$	$\sum_{k=1}^{r} S_{n,k}$	0 oder 1	$S_{n,r}$	1
$\begin{matrix}N*\\R*\end{matrix}$	$\sum_{k=1}^{r} P_{n,k}$	0 oder 1	$P_{n,r}$	1

N:Bälle, R:Fächer, * heißt nicht unterscheidbar

1.1.6 Permutationen

Permutationen $\pi \in S_n$, $\pi : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\}$

Darstellung:

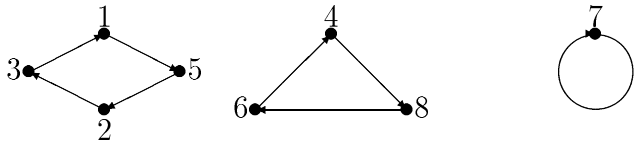
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & & \pi(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & n \\ \pi(2) & \pi(1) & & \pi(n) \end{pmatrix}$$

Zyklendarstellung:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 1 & 8 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$(1\ \ 5\ \ 2\ \ 3)(4\ \ 8\ \ 6)(7)$

$(i\ \ \pi(i)\ \ \pi^2(i)\ \ \cdots)$



$(1\ \ 5\ \ 2\ \ 3) = (5\ \ 2\ \ 3\ \ 1)$

Betrachte die Permutaion π

$(1\ \ 5\ \ 2\ \ 3)(4\ \ 8\ \ 6)(7) = (1\ \ 5\ \ 2\ \ 3)(4\ \ 8\ \ 6)$

$\varrho := (1 \quad 5 \quad 2 \quad 3) \in S_8$
$\sigma := (4 \quad 8 \quad 6) \in S_8$
Dann gilt: $\pi = \varrho \circ \sigma = \sigma \circ \varrho$
Bezeichung: $b_i(\pi)$ sei die Anzahl der i-Zyklen der Permutation π

$$b(\pi) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\pi)$$

Der formale Ausdruck $t(\pi) := 1^{b_1(\pi)} 2^{b_2(\pi)} n^{b_n(\pi)}$ heißt *(Zykel-)Typ* von π
Beispiel: $1^1 2^0 3^1 4^1 5^0 6^0 7^0 8^0 = 1^1 3^1 4^1$
Bemerkung:

1. Es gibt genausoviele Typen von Permutationen wie es Partitionen der Zahlen gibt, d.h. es ex. eine Bijektion:

$$(b_1(\pi), b_2(\pi), \ldots, b_n(\pi)) \mapsto \underbrace{1 + \ldots + 1}_{b_1(\pi)} + \underbrace{2 + \ldots + 2}_{b_2(\pi)} + \ldots + \underbrace{i + \ldots + i}_{b_i(\pi)} + \ldots + \underbrace{n}_{b_n(\pi)}$$

2. Die Permutationen eines gegebenen Typs bilden in der s_n eine Konjugiertenklasse. Wieviele Permutationen enthält sie?

$$\pi \sim \sigma \Leftrightarrow \text{Es ex. } \varrho \in s_n \text{ mit } \varrho \pi \varrho^{-1} = \sigma$$
$$(\varrho \ldots (\ldots (ij \ldots) \ldots) \varrho^{-1} = (\ldots (\varrho(i) \varrho(j) \ldots) \ldots)$$
$$\underbrace{(.) \cdots (.)}_{b_1} \underbrace{(..) \cdots (..)}_{b_2} \cdots \underbrace{\overbrace{(.....)}^{i} \cdots \overbrace{(.....)}^{i}}_{b_i} \cdots$$

Wir füllen die n Plätze mit den $n!$ verschiedenen Reihenfolgen von $1, 2, \ldots, n$
Wie oft wird die gegebene Permutation so produziert?
$\prod_{i=1}^{n} b_i!$ Möglichkeiten, die Zyklen gegebener Länge miteinander zu permutieren.
$\prod_{i=1}^{n} b_i!$ muß noch mit $\prod_{i=1} i b_i!$ multipliziert werden.
Gesuchte Anzahl:

$$\frac{n!}{(\prod_i b_i!) \cdot (\prod_i i^{b_i})}$$

$\pi \in s_n : t(\pi) = 1^{b1} 2^{b2} \ldots n^{bn}$
$\sum_i i b_i = n$
Auf $n!$ Weisen: Zahlen von $1, \ldots, n$ einfüllen. $b_1! b_2! \ldots b_n! 1^{b1} 2^{b2} \ldots i^{bi} \ldots n^{bn}$
$(i_1 \ldots i_k) = (i_2 \ldots i_k i_1) = (i_3 \ldots i_k i_1 i_2) = \ldots$
$(j_1 \ldots j_k) = (j_2 \ldots j_k j_1) = \ldots$
$\Rightarrow$ Die Anzahl der Permuationen $\pi \in s_n$ mit $t(\pi) = 1^{b1} 2^{b2} \ldots n^{bn}$ ist

$$\frac{n!}{b_1! b_2! \ldots b_n! 1^{b1} 2^{b2} \ldots i^{bi} \ldots n^{bn}}$$

1.1.7 Stirlingzahlen 1.Art

$s_{n,k} := |\{\pi \in s_n \pi \text{ hat genau } k \text{ Zyklen}\}|$
Die $s_{n,k}$ heißen Stirlingzahlen 1. Art.

- $s_{0,0} = 0$
- $s_{0,k} = s_{n,0} = 0$
- $s_{n,1} = (n-1)!$
- $s_{n,n-1} = \binom{n}{2}$
- $\sum\limits_{k=1}^{n} s_{n,k} = n!\ (n \geq 1)$

Es gilt:

1. $s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$
2. $\underbrace{x^{\underline{n}}}_{x(x-1)\dots(x-n+1)} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} x^k$

1.2 Inversion:

Zu zeigen:

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}$$

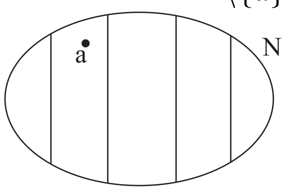
$(S_{n,k} = 0 \text{ für } k > n, S_{0,0} = 1, S_{0,k} = 0 \text{ für } k > 0, S_{n,0} = 0 \text{ für } n > 0)$
Es gilt die folgende Rekursion:

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k} \qquad (n, k > 0)$$

<u>Beweis:</u> Es sei $N = \{1, \dots, n\}, a \in N$. Klassifizieren k-Partitionen von N wie folgt:

1. $\{a\}$ ist ein Block
2. a ist in einem Block der Kardinalität ≥ 2 enthalten

zu 1.: Anzahl der k-Partitionen vom Typ 1 = Anzahl der (k-1)-Partitionen von $N \backslash \{a\} = S_{n-1,k-1}$
zu 2.: Zerstörung von a heißt eine k-Partition von $N \backslash \{a\}$. Umgekehrt entsteht jede k-Partition von $N \backslash \{a\}$ bei diesem Prozeß auf genau k Weisen.



Der zweite Summand ist also $S_{n-1,k} \cdot k$

Stirling Dreieck 2.Art

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 7 & 6 & 1 \\ & \vdots & & \vdots \end{matrix}$$

$S_{n,1} = 1, S_{n,2} = 2^{n-1} - 1, S_{n,n-1} = \binom{n}{2}$

1.2.1 Basisfolgen

Definition: Eine *Basisfolge* $(p_0(x), p_1(x), \dots)$ ist eine Folge von Polynomen mit Grad $(p_n) = n$ (für alle n)
Beispiele: $p_n(x) := x^n, x^{\underline{n}}, x^{\overline{n}}$
Die Polynome $p_0(x), p_1(x), \dots p_n(x)$ bilden eine Basis im Vektorraum aller Polynome vom Grad $\leq n$

Sind $(p_0(x), p_1(x), \dots)$ und $(q_0(x), q_1(x), \dots)$ Basisfolgen, so ex. Zahlen $(a_{n,k})$ und $(b_{n,k})$ mit

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k} p_k(x)$$

bzw.

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} q_k(x)$$

Wir nennen $(a_{n,k})$ und $(b_{n,k})$ die *Zusammenhangskoeffizienten* der Basisfolgen.
Sie bilden zwei (unendliche) untere Dreiecksmatrizen. $(a_{n,k} = b_{n,k} = 0$ für $k > n)$

$$\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ \vdots \end{pmatrix}$$

$A := (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$, $B := (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$

Dann gilt: $AB = BA = I_n$ ←Einheitsmatrix

Beispiel:
$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} s_{n,k} x^k$
$x^n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k} x^{\underline{k}}$

$$\sum_j(\sum_k b_{i,k}a_{k,j})p_j(x) = \sum_k b_{i,k} \underbrace{\sum_j a_{k,j}p_j(x)}_{q_k(x)} = \sum_k b_{i,k}q_k(x) = p_i(x)$$

Also: $\sum_k b_{ik}a_{kj} = [i=j] = \delta_{ij}$[6]

Satz: Es seien (p_n) und (q_n) zwei Basisfolgen mit Zusammenhangskoeffizienten $(a_{n,k})$ bzw. $(b_{n,k})$. Dann gilt für 2 beliebige Folgen $(n_0, n_1, \dots,)$, $(v_0, v_1, \dots,)$ von Elementen aus K die folgende Aussage:(Inversionsformel)

$$\text{Für alle } n : v_n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}u_k \Leftrightarrow \text{Für alle } u_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}v_k$$

Beweis: Da A und B (wie oben) invers zueinander sind, ist mit $u = (u_0, u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ die Aussage $v = Au$ äquivalent zu $u = Bv$

Beispiel: Binomial-Inversion:

Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Seien $a = x-1, b = 1$ und Basisfolgen $(1, x, x^2, \dots)$, $(1, x-1, (x-1)^2, \dots)$

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(x-1)^k$$

Seien $a = x, b = -1$

$$(x-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(-1)^{n-k}x^k$$

Folgerung:

$$\text{Für alle } n \text{ gilt: } v_n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}u_k \Leftrightarrow \text{Für alle } n \text{ gilt: } u_n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(-1)^{n-k}v_k$$

Symmetrische Form: (Ersetze (u_n) durch $(-1)^n u_n$)

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(-1)^k u_k \;\forall n$$
$$\Updownarrow$$
$$u_n(-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(-1)^{n-k}v_k \;\forall n$$
$$\Downarrow$$
$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \tbinom{n}{k}(-1)^k v_k \;\forall n$$

Anwendung: Derangementzahlen

[6] Kronecker-Delta

$D_n :=$ Anzahl der Permutationen in der symmetrischen Gruppe S_n ohne Fixpunkte
$d(n,k) :=$ Anzahl der Permutationen in S_n mit genau k Fixpunkten
$\Rightarrow D_n = d(n,0)$
Klar: $d(n,k) = \binom{n}{k} \cdot D_{n-k}$

$$\Rightarrow |S_n| = n! = \sum_{k=0}^{n} d(n,k) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k} \overset{\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}}{\overset{\downarrow}{=}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_k$$

Binomialinversion: $u_n = D_n$; $v_n = n!$

$$D_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \frac{1}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

$$\frac{D_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \approx e^{-1}$$

1.3 Erzeugende Funktionen

Idee: Wir fassen die gesuchten Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ auf als Koeffizienten einer Potenzreihe, etwa $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$. Aus uns bekannten Eigenschaften der Folge (a_n) leiten wir Eigenschaften von $F(z) := \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ her. Damit versuchen wir, $F(z)$ zu „bestimmen“. Dann entwickeln wir die Funktion in eine Reihe und erhalten die Folge (a_n).

Beispiel 1:
Die Fibonacci-Zahlen sind definiert durch:

- $F_n = 0$ für $n \leq 0, n \in \mathbb{Z}$
- $F_1 = 1$
- $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$

0 1 1 2 3 5 8 13 21...

Lösung dieser Rekursion mittels erzeugender Funktion:

1. Drücke die Rekursion in einer einzigen Formel aus (einschließlich Anfangsbedingung)
   $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ gilt für alle $n \in \mathbb{Z}\backslash\{1\}$
   Bei $n = 1$ rechts eine 1 addieren:
   $F_n = F_{n-1} + F_{n-2} + [n = 1]$ für alle $n \in \mathbb{Z}$

2. Was sagt uns diese Rekursion über $F(z) = \sum_n F_n z^n$?

$$\begin{aligned} F(z) = \sum_n \underbrace{F_n}_{F_{n-1}+F_{n-2}+[n=1]} z^n &= \sum_n F_{n-1} z^n + \sum_n F_{n-2} z^n + \sum_n [n=1] z^n \\ &= z \cdot \sum_n F_n z^n + z^2 \sum_n F_n z^n + z = zF(z) + z^2 F(z) + z \end{aligned}$$

3. Löse nach $F(z)$ auf:
   $F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$

4. Entwickle diese rationale Funktion in eine Potenzreihe:
   $1 - z - z^2 = (1 - \alpha z)(1 - \beta z)$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$
   Partialbruchzerlegung: bestimme $a, b \in \mathbb{C}$ mit:
   $\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)} = \frac{a}{(1-\alpha z)} + \frac{b}{(1-\beta z)}$
   $\Rightarrow F(z) = z\left(\frac{a}{(1-\alpha z)} + \frac{b}{(1-\beta z)}\right) = z\left(a \sum\limits_{n\geq 0} \alpha^n z^n + b \sum\limits_{n \geq 0} \beta^n z^n\right) = \sum\limits_{n \geq 1} \underbrace{a \cdot \alpha^{n-1} + b \cdot \beta^{n-1}}_{F_n} z^n$

Also: Wir ermitteln α, β, a, b:
$q(z) = 1 - z - z^2$, $q^R(z) := z^2 \cdot q\left(\frac{1}{z}\right) = z^2 - z - 1$ sei das *reflektierte* Polynom

Behauptung: α und β sind die Nullstellen des reflektierten Polynoms $q^R(z)$

Allgemeiner: Sei $q(z)) = 1 + q_1 z + \ldots + q_d z^d$, $q^R(z) := z^d + q_1 z^{d-1} + \ldots + q_d = q\left(\frac{1}{2}\right) \cdot z^d$
Seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ Nullstellen von $q^R(z)$
$q^R(z) = (z - \alpha_1) \cdot \ldots \cdot (z - \alpha_d) \Rightarrow q(z) = z^d q^R\left(\frac{1}{z}\right) = 2^d\left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2} - \alpha_d\right) = (1 - \alpha_1 z) \cdot \ldots \cdot (1 - \alpha_d z)$

Hier: $q^R(z) = z^2 - z - 1 = \left(z - \underbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}_{\phi}\right)\left(z - \underbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}_{\hat{\phi}}\right)$
$q(z) = 1 - z - z^2 = (1 - \phi z)(1 - \hat{\phi} z)$
$\frac{1}{(1-\phi z)(1-\hat{\phi} z)} = \frac{a}{1-\phi z} + \frac{b}{1-\hat{\phi} z} \Rightarrow a = \frac{\phi}{\sqrt{5}}$; $b = \frac{-\hat{\phi}}{\sqrt{5}}$
$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

Beispiel 2: Es sei C_n die Anzahl der möglichen Klammerungen eines Produktes aus n Faktoren.

n	0	1	2	3	4	5
C_n	0	1	1	2	5	15

Rekursion: $p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n$ sei das zugrundeliegende nicht assoziative Produkt. Sind in zulässiger Weise Klammern gesetzt, so werden bei der Berechnung sukzessive Multiplikationen ausgeführt, bis schließlich eine letzte Multiplikation das Produkt aller Faktoren ergibt. Dabei wird ein Produkt $p_1 \times \ldots \times p_k$ multipliziert mit $p_{k+1} \times \ldots \times p_n$, $1 \leq k \leq n-1$

$\Rightarrow C_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} C_k C_{n-k}$ (für $n \geq 2$)
$C_0 = 0$
$n = 1 : 1 = C_1 \stackrel{?}{=} \sum\limits_{k=0}^{1} C_k C_{1-k} = C_0 C_1 + C_1 C_0 = 0$ Widerspruch!

Vollständige Rekursion:
Für $n \geq 0$: $C_n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_k C_{n-k} + [n = 1]$
$F(z) = \sum\limits_{n \geq 0} C_n z^n = \sum\limits_{n \geq 0} \left\{\sum\limits_{k=0}^{n} C_k C_{n-k}\right\} z^n + \sum\limits_{n \geq 0} [n = 1] z^n = (F(z))^2 + z$

Auflösen nach $F(z)$:

$F(z)^2 - F(z) + z = 0$

$F(z) = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - z} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-4z}$

$F(0) = 0 \Rightarrow F(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1-4z}$

$(1-4z)^{\frac{1}{2}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}(-4z)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n 4^n z^n \ , \ \left(|z| < \frac{1}{4}\right)$

$\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n 4^n = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-1)^n 4^n = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{1}{2}\right)}{n!}4^n = \frac{(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{n!}2^n$

Erweitern mit $\frac{(n-1)!}{(n-1)!}$ führt zu: $(-2)\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} = -\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}$

$$\Rightarrow F(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{n\geq 0}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4)^n z^n = \sum_{n\geq 1}\underbrace{\frac{1}{n}\binom{2n-1}{n-1}}_{C_n} z^n$$

1.3.1 Rekursion

$f(n)$+Rekursion $\longrightarrow F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f(k) z^k$

Haben wir $F(z)$ bestimmt, so entwickeln wir daraus die Potenzreihe und erhalten daraus eine explizite Darstellung der Funktion $f(n)$.

<u>Ziel:</u> Verallgemeinerung dieses Prinzips auf „lineare Rekursion mit konstanten Koeffizienten“

<u>Satz:</u> Seien $q_1, \ldots, q_d \in \mathbb{C}$; $d \geq 1$; $q_d \neq 0$

sei desweiteren $q(z) = 1 + q_1 z + q_2 z^2 + \ldots + q_d z^d = (1-\alpha_1 z)^{d_1}(1-\alpha_2 z)^{d_2}\ldots(1-\alpha_k z)^{d_k}$,

dabei sind die Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ die Nullstellen von $q^R(z)$

Für eine Zahl $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (A1)(Rekursion) $\forall n \geq 0 : f(n+d) + qf(n+d-1) + \ldots + q_d f(n) = 0$
- (A2)(Erzeugende Funktion) $F(z) = \sum\limits_{n\geq 0} f(n)\cdot z^n = \frac{p(z)}{q(z)}$, wobei $p(z)$ einen Grad $< d$ hat.
- (A3)(Partialbruchzerlegung) $F(z) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)_i^d}$
- (A4)(Explizite Darstellung) $f(n) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i(n)\cdot\alpha_i^n$

Beweis: Def: $V_i = \{f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C} \mid f \text{ hat die Eigenschaft } A_i\}$; $i = 1, \ldots, 4$

$\Rightarrow V_i$ sind lineare Vektorräume

$$\Rightarrow \dim V_i = \begin{cases} d & , \quad i=1 \\ d & , \quad i=2 \\ d & , \quad i=3 \\ d & , \quad i=4 \end{cases}$$

Sei $f \in V_i : p(z) = \sum\limits_{n\geq 0} f(n)\cdot z^n\{1+qz+\ldots+q_d z^d\}$
$\Rightarrow$ (Koeffizientenvergleich von z^l ; $l \geq d$) $0 = f(n+d)+q_1 f(n+d-1)+\ldots+q_d f(n)\ \left(z^{n+d}\right)$
$\Rightarrow f \in V_1 \Rightarrow V_2 \subseteq V_1 \Rightarrow V_1 = V_2$ [7]

$$f \in V_3 : F(z) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} g_i(z)\cdot \prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k}(1-\alpha_j z)^{\alpha_j}}{\prod\limits_{i=1}^{k}\underbrace{(1-\alpha_i)}_{q(z)}\cdot z^{\alpha_i}}$$

$\Rightarrow$ der Zähler hat den Grad: $\leq \max\limits_{1\leq i\leq k}\{\mathrm{grad} g_i(z) + \sum\limits_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{k} d_j < \sum\limits_{i=1}^{q}\alpha_i = d$

$\Rightarrow f \in V_2 \Rightarrow V_3 \subseteq V_2 \Rightarrow V_3 = V_2$

Zeige: $V_3 \subseteq V_4$; $f \in V_3 \Rightarrow F(z) = \sum\limits_{i=1}^{k}\frac{g_i(z)}{(1-\alpha_i z)^{\alpha_i}}$

Betrachte: $\frac{1}{(1-\alpha_i z)^{\alpha_i}} = \sum\limits_{n\geq 0}\binom{\alpha_i+n-1}{n}\alpha_i^n z^n = \sum\limits_{n\geq 0}\binom{\alpha_i+n-1}{\alpha_i-1}\alpha_i^n z^n$
$\Rightarrow g_i(z) = g_0 + g_1 z + \ldots + g_{d_i-1}z^{d_i-1}$
$g_i(z)\cdot\frac{1}{(1-\alpha_i z)_i^d} = \sum\limits_{n\geq 0}\left\{\sum\limits_{j=0}^{d_i-1} g_j\binom{d_i+n-j-1}{d_i-1}\alpha_i^{n-j}\right\} z^n = \sum\limits_{n\geq 0}\left\{\sum\limits_{j=0}^{d_i-1} g_j\binom{d_i+n-j-1}{d_i-1}\alpha_i^{-j}\alpha_i^n\right\} z^n$
setze: $p_i(n) = \sum\limits_{j=0}^{d_i-1}\alpha_i^{-j}\alpha_i^n\binom{d_i+n-j-1}{d_i-1} \Rightarrow f \in V_4 \Rightarrow V_3 \subseteq V_4 \Rightarrow V_3 = V_4 = V_2 = V_1$

$\square$

Beispiel 1:
$f(n+3) - 6f(n+2) + 12f(n+1) - 8f(n) = 0$
$\Rightarrow q(z) = 1 - 6z + 12z^2 - 8z^3 = (1 - \underbrace{2}_{=\alpha_1} z)^{\overbrace{3}^{=d_1}}$
$\Rightarrow$ (A4) $f(n) = p_i(n)\alpha_1^n = (a+bz+cz^2)\alpha_i^n = (a+bz+cz^2)2^n$

$$\left.\begin{array}{lcl} f(0) &=& a\\ f(1) &=& (a+b+c)\cdot 2\\ f(2) &=& (a+2b+4c)\cdot 2^2 \end{array}\right\}\text{LGS}$$

Beispiel 2:
Falls alle Nullstellen von $q(z)$ einfach sind, also $d_i = 1\ \forall i = 1\ldots k$, $k = d$, wie sehen dann $\underbrace{g_i(z)}_{:=a_i}$ und $\underbrace{p_i(n)}_{:=a_i}$ aus?

$$\frac{p(z)}{q(z)} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{d} a_i\cdot\prod\limits_{j\neq 1}(1-\alpha_i z)}{\prod\limits_{j=1} d(1-\alpha_j z)}$$

$\Rightarrow p(z) = \sum\limits_{i=1}^{d} a_i\cdot\prod\limits_{j\neq i}(1-\alpha_j z)$; $p(\frac{1}{\alpha_i}) = a_i\cdot\prod\limits_{j\neq i}(1-\frac{\alpha_j}{\alpha_i})$

$\Rightarrow a_i = \frac{p(\frac{1}{\alpha_i})}{\prod\limits_{j\neq i}(1-\frac{a_j}{\alpha_i})}$

[7], da die Dimensionen gleich sind

$q(z) = \prod_{j=1}^{d}(1-\alpha_j z) \Rightarrow q'(z) = \sum_{j=1}^{d}(1-\alpha_j z) \Rightarrow q'(z) = \sum_{j=1}^{d}(-a_j)\prod_{l\neq j}(1-\alpha_j z)$
$\Rightarrow q'(\frac{1}{\alpha_i}) = (-\alpha_i)\cdot\prod_{j\neq i}(1-\frac{\alpha_j}{\alpha_i})$
$\Rightarrow a_i = \frac{p(\frac{1}{\alpha_i})}{-q'(\frac{1}{\alpha_i})}\alpha_i$

Beispiel 3:
$(F_n)_{n\geq 0}$ $F(z) = \frac{z}{1-z-z^2}$; $\alpha_1 = \phi$; $\alpha_2 = \hat{\phi}$
$p(\frac{1}{\phi})$ $a'(z) = -1-2z$
$q'(\frac{1}{\phi})$ $\ldots$ [8]
$\Rightarrow a_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $a_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
$\Rightarrow f(n) = \sum_i a_i\alpha_i^n = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\phi^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\hat{\phi}^n$

1. Ansatz: $(f_n)_{n\geq 0} \rightsquigarrow F(z) = \sum_{n\geq 0} f_n z^n$
weiterer Ansatz: $\rightsquigarrow \hat{F}(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{f_n}{n!}z^n$,

genannt „Erzeugende Funktion vom Exponentialtyp“ $\left(e^z = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}z^n\right)$

Falls:

$$\left.\begin{aligned}\hat{A}(z) &= \sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n!}z^n\\ \hat{B}(z) &= \sum_{n\geq 0}\frac{b_n}{n!}z^n\end{aligned}\right\}\hat{C}(z) = \hat{A}(z)\cdot\hat{B}(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{c_n}{n!}z^n \text{ [9]}$$

$\Rightarrow \frac{c_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}\frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \Leftrightarrow c_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k\cdot b_{n-k}$ [10]

Beispiel 1 [Binomial-Satz]:
$e^{az}\cdot e^{bz} = e^{(a+b)z} \Rightarrow (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k\cdot b^{n-k}$

Beispiel 2 [Vandermonde Identität]:
$(1+z)^a(1+z)^b = (1+z)^{a+b}$
$(1+z)^a = \sum_{n\geq 0}\binom{a}{n}z^n = \sum_{n\geq 0}\frac{a^{\underline{n}}}{n!}z^n$
$\Rightarrow (a+b)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{\underline{k}}\cdot b^{\underline{n-k}} \Rightarrow \binom{a+b}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$

Beispiel 3 [Binomial Inversion]:
$\hat{v}\underbrace{(z)}_{v_n} = \hat{u}\underbrace{(z)}_{u_n}\cdot e^z \Leftrightarrow \hat{u}(z) = \hat{v}(z)\cdot e^{-z}$
$\Rightarrow v_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot u_k \Leftrightarrow u_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}v_k$

[9] zu berechnen als Cauchy-Produkt
[10] „Binomial-Konvolution“

1.4 Lösen von Reihen mit Hilfe von Matrizen

$f(n+d) = \sum_{i=1}^{d} a_i f(n+d-i)\ \forall n \geq 0$

Betrachte die Vektoren $\hat{f}(n) = (f(n+d-1), \ldots, f(n))^T$ $(\forall n \geq 0)$

$\hat{f}(n+1) \overset{?}{\sim} \hat{f}(n)$ [11]

$\Rightarrow \hat{f}(n+1) = A \cdot \hat{f}(n)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_d \\ 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \hat{f}(n+d) = A^d \hat{f}(n)$

Lösen der Rekursion durch die Bestimmung der Potenzen von A

Beispiel [anhand der Fibonacci-Zahlen]:

$(F_n)_{n\geq 0} :\ F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

$\underbrace{(F_{n+2}, F_{n+1})^T}_{=\hat{f}_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{(F_{n+1}, F_n)^T}_{=\hat{f}_n}$

(Transformiere nun A in Diagonalgestalt)

Sei $B = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{1+\phi^2}} & \frac{-1}{\sqrt{1+\hat{\phi}^2}} \\ \frac{\phi}{\sqrt{1+\phi^2}} & \frac{\hat{\phi}}{\sqrt{1+\hat{\phi}^2}} \end{pmatrix}$

Es gilt: $B^{-1} = B^T$

$\Rightarrow B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \hat{\phi} & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = B \begin{pmatrix} \hat{\phi} & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} B^{-1}$

$\Rightarrow A^n = \overbrace{B \begin{pmatrix} \hat{\phi} & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \underbrace{B^{-1}B}_{E} \begin{pmatrix} \hat{\phi} & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} \underbrace{B^{-1}B}_{E} \ldots \begin{pmatrix} \hat{\phi} & 0 \\ 0 & \phi \end{pmatrix} B^{-1}}^{n\text{-mal}} = B \begin{pmatrix} \hat{\phi}^n & 0 \\ 0 & \phi^n \end{pmatrix} B^{-1}$

$\Rightarrow (F_n, F_{n-1})T = A^{n-1}(1,0)^T \Rightarrow F_N = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n)$

[11] welche Relation besteht dazwischen?

Kapitel 2

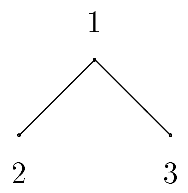
Graphentheorie

2.1 Grundlagen der Graphentheorie

2.1.1 Definitionen

Definition: Ein *Graph* ist ein Paar G = (V, E) wobei V eine endliche Menge ist und $E \subseteq \binom{V}{2}$. Die Elemente von V nennt man *Ecken* (engl. „vertices“). Die Elemente von V nennt man *Kanten* (engl. „edges“).

Beispiel: $G = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{1, 3\}\})$



Andere Autoren lassen auch *Mehrfachkanten* und *Schlingen* zu.

Beispiel:

Hier werden jedoch nur *schlichte Graphen* verwendet.

Literaturverweis:	Volkmann:	Fundamente der Graphentheorie
	Bollorbàs:	Graph Theory

Definition: Zwei Graphen G, G' sind *isomorph*: $\exists$ eine Bijektion $\phi : V \to V'$
$\{u, v\} \in E \Leftrightarrow \{\phi(u), \phi(v)\} \in E'$

Beispiel: $\phi(1) = 3, \phi(2) = 1, \phi(3) = 2$ erfüllt diese Bedingung.

Lemma: Es gibt $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ verschiedene Graphen mit $V = \{1, \dots, n\}$

Beweis: $|\binom{V}{2}| = \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$
Für jede mögliche Kante gibt es zwei Möglichkeiten: $e \in E$ oder $e \notin E \Rightarrow 2^{|\binom{V}{2}|}$

$\square$

Schwierig: Anzahl der nicht-isomorphen Graphen mit $|V| = n$

Definition: $G = (V, E)$.
Zwei Ecken $u, v \in V$ sind *adjazent* (benachbart) $\Leftrightarrow \{u, v\} \in E$.
Die Kante {u,v} heißt *inzident* mit u,v.

Der *Grad d(u)* einer Ecke u:

$$d(u) = |\{u|\{u, v\} \in E\}|$$

Schreibweisen: $d(u) = d_a(u)$
Die *Nachbarschaft* von u in G:

$$\{u|\{u, v\} \in E\}$$

Schreibweisen: $N(u, G) = \Gamma(u, G) = N(u) = \Gamma N(u)$
Lemma: $G = (V, E)$. Es gilt $\sum\limits_{u \in V} d(u) = 2|E|$ („Handschlaglemma")
Beweis: In $\sum d(u)$ werden alle Kanten genau 2 mal gezählt $\Rightarrow$ Behauptung

$\square$

Folgerung: $G = (V, E)$. Die Anzahl der Ecken ungeraden Grades ist gerade.

Beweis: $\sum\limits_{u \in V} d(u) = \sum\limits_{\substack{u \in V \\ 2|d(u)}} d(u) + \sum\limits_{\substack{u \in V \\ 2\nmid d(u)}} d(u) = 2|E|$

$\square$

Definition: Ein Graph $G' = (V', E')$ ist *Teilgraph* von $G = (V, E) \Leftrightarrow V' \subseteq V$ und $E' \subseteq E$.
G' heißt *induzierter* Teilgraph von $G \Leftrightarrow G' \subseteq G$ und $E' = E \cap \binom{V'}{2}$.

Definition: Eine *Kantenfolge* in $G = (V, E)$ ist eine Folge von Kanten $e_1, e_2, \ldots, e_r \in E$ mit $|e_i \cap e_{i+1}| \geq 1$ für $i = 1, \ldots, r-1$. Dabei heißt r die *Länge* der Kantenfolge.
Andere Schreibweise: $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}, i = 1, \ldots, r$
$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots e_r v_r$
Die Kantenfolge verbindet v_0 und v_r. Die Länge der kürzesten Kantenfolge, die v_0 und v_r verbindet nennt man den *Abstand* ($dist_G(v_0, v_r)$) von v_0 und v_r.
Definition: Eine Kantenfolge $K : v_0 e_1 \ldots e_r v_r$ heißt

i.)	„geschlossen"	$\Leftrightarrow$	$v_0 = v_r$	
ii.)	„Kantenzug"	$\Leftrightarrow$	$e_i \neq e_j$	$\forall\, i \neq j$
iii.)	„Weg"(P_n)	$\Leftrightarrow$	$v_i \neq v_j$	$\forall\, i \neq j$
iv.)	„Kreis"(C_n)	$\Leftrightarrow$	geschlossen und $v_i \neq v_j$	$\forall\, 1 \neq i, j,\ i \neq j$

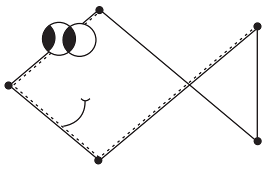
Definition: $G = (V, E)$ heißt *zusammenhängend* $\Leftrightarrow u, v \in V\ \exists$ Kantenfolge, die u und v verbindet. Falls $G = (V, E)$ nicht zusammenhängend ist, dann heissen die maximalen zusammenhängenden Teilgraphen von G *Komponenten.*

Lemma: $G = (V, E)$ $u, v \in V$; K sei eine Kantenfolge in G, die u und v verbindet.
$\Rightarrow$ Es ex. ein Weg in G der u und v verbindet.

Beweis: Unter allen Kantenfolgen wähle die mit minimaler Länge $\Rightarrow$ Diese ist ein Weg.

$\square$

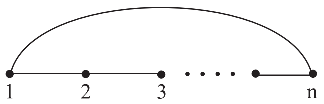
Beispiel:



2.1.2 Vollständige Graphen

$P_n = (\{1, \dots, n\}|\{i, i+1\}|\{i = 1, n-1\})$

C_n=Kreis mit n Ecken



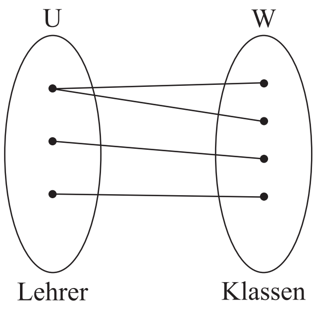
K_n=vollständiger Graph

$K_n = (v, \binom{V}{2})$, $|V| = n$

2.1.3 Bipartite Graphen

Definition: Sei $G = (V, E)$ Graph. G heißt *bipartit*, falls $V = U \dot{\cup} W$ und für alle $e = \{x, y\} \in E$ gilt, daß $|e \cap U| = |e \cap W| = 1$

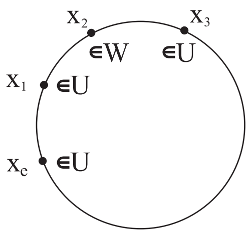
Beispiel:



Satz: Sei $G = (V, E)$ Graph. G ist genau dann *bipartit*, wenn G keinen Kreis ungerader Länge enthält.

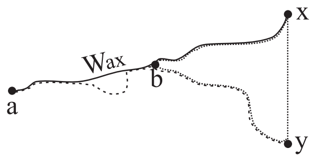
Beweis: „ $\Rightarrow$ “

Sei $V = U \dot{\cup} W$ die Bipartition. Sei $e : x_1 x_2 \dots x_e x_1$ bel. Kreis und Œ $x_1 \in U$



$\Rightarrow x_2 \in W$
$\Rightarrow x_3 \in U$
$\vdots$
$\Rightarrow x_e \in U$ falls e ungerade ($\rightarrow$ Widerspruch)
$\Rightarrow x_e \in W$ falls e gerade
$\Rightarrow e$ ist gerade.

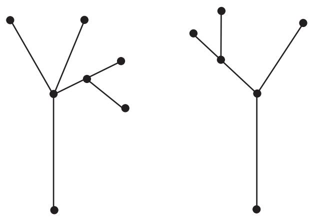
„ $\Leftarrow$ “
Sei $G = (V, E); a, b \in V$
Sei Œ G zusammenhängend und $a \in V$ bel. Definition zwei Mengen.
$U = \{b \mid 2 | dist_G(a, b)\}$
$W = \{b \mid 2 \nmid dist_G(a, b)\}$
$\Rightarrow V = U \dot{\cup} W$
<u>Annahme:</u> $e = \{x, y\} \in E$ mit $x, y \in U$ (analog für W)
Seinen W_{ax} und $\tilde{W}_{ay}$ zwei kürzeste Wege von a nach x und a nach y. Sei b die letzte Ecke, die W_{ax} und $\tilde{W}_{ay}$ gemeinsam haben.



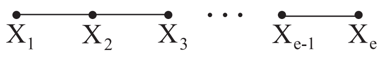
Das Stück von W_{ax} bis b nenne W_{ab}, das Stück von W_{ay} bis b nenne $\tilde{W}_{ab}$.
$l(W_{ab}) = l(\tilde{W}_{ab})$
$\Rightarrow W_{bx}; \tilde{W}_{by}$
$\Rightarrow l(W_{bx})$ und $l(\tilde{W}_{by})$ haben die gleiche Parität. Dann ist $c : W_{bx} \cup \tilde{W}_{by} \cup \{x, y\}$ ungerader Kreis $\Rightarrow$ Widerspruch, da G bipartit.

2.1.4 Bäume und Wälder

<u>Definition:</u> $G = (V, B)$. G heißt ein *Wald*, falls er keine Kreise besitzt. G heißt *Baum*, falls er ein zusammenhängener Wald ist.



<u>Lemma:</u> Jeder Baum hat (mind.) zwei Ecken vom Grad 1.
<u>Beweis:</u> Es sei $w : x_1 \ldots x_e$ ein längster Weg in G.



$\Rightarrow x_1, x_e$ haben Grad 1.

$\square$

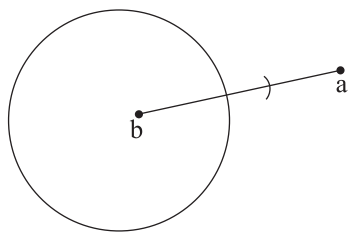
<u>Satz:</u> Sei $G = (V, E)$ Graph. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. G ist ein Baum.

2. G ist zusammenhängend und $|V| - 1 = |E|$.

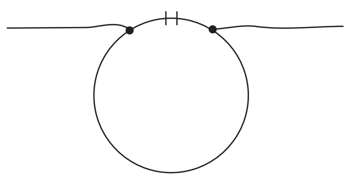
3. Zwischen je zwei Ecken in G existiert ein *eindeutiger* Weg.

<u>Beweis:</u> $1 \Rightarrow 2$ (per Induktion)
<u>$n = 1$</u>: $\surd$
<u>$(n-1) \to n$</u>: Es sei $a \in V$ mit $d(a) = 1$, b sei der Nachbar von a.
$\Rightarrow T' = (V \backslash \{a\} | E \backslash \{a, b\})$



$\Rightarrow |V| - 1 = |V(T')| \underbrace{=}_{(Ind.)} |E(T')| + 1 = |E|$

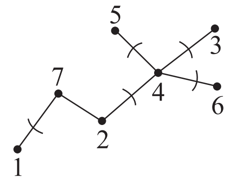
$2 \Rightarrow 1$: <u>Annahme:</u> G ist kein Baum $\Rightarrow$ Es gibt keinen Kreis C.
G' entstehe, indem aus G solange Kanten entfernt werden, ohne daß der Zusammenhang zerstört wird.



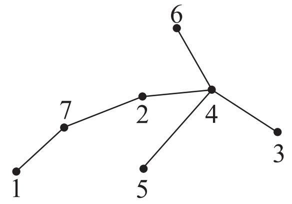
$\Rightarrow G'$ ist ein Baum
$\Rightarrow |V| - 1 = |V(G')| - 1 = |E(G')| < |E| \Rightarrow$ Widerspruch!
$1 \Leftrightarrow 3$: <u>Gesehen:</u> Es gibt $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ verschiedene Graphen auf V mit $|V| = n$
$\to$ Gleiche Frage für Bäume?!

<u>Satz:</u>(Cayley): Es gibt $n^n - 2$ verschiedene Bäume auf n Ecken.
<u>Beweis:</u> $\{T | V(T) = \{1, \ldots, n\}\} \xrightarrow{bij} \{(a_1, \ldots a_{n-2}) | 1 \leq a_i \leq n \,\forall\, 1 \leq i \leq n-2\}$
„Prüfer-Code des Baumes “. Sei T gegeben für $i = 1, \ldots, n-2$ führe folgende Schritte aus:

Streiche die Ecke b_i mit $a(b_i) = 1$ mit dem kleinsten Index und setze a_i gleich dem Index des Nachbarn.



$\rightarrow (7, 4, 4, 4, 2)$

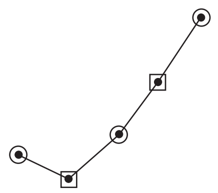


2.2 Matchings

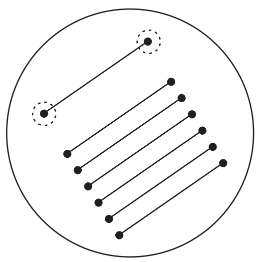
2.2.1 Definitionen

Definition: $G = (V, E)$. Eine Menge $E' \subseteq E$ heißt *Matching*, falls keine zwei Kanten aus E' mit der gleichen Ecke inzidieren. $V(E')$ für Matching E' sind die Ecken, die mit Kanten aus E' inzidieren.
E' heißt *perfekt*, falls $V(E') = V$.
Die Kardinalität eines maximalen [1] Matching E' nennt man die *Matchingzahl* $\nu(G)$.

Definition: $G = (V, E)$. Eine Menge $V' \subseteq V$ heißt *Eckenüberdeckung*, falls für alle Kanten $e = \{x, y\} \in E$ $|V' \cap \{x, y\}| \geq 1$ gilt.



Die Kardinalität einer minimalen Eckenüberdeckung V' nennt man die *Eckenüberdeckungszahl* $\tau(G)$
Klar: $\nu(G) \leq \tau(G)$ M max.



[1] d.h. $\nexists$ E'' mit $|E''| > |E'|$

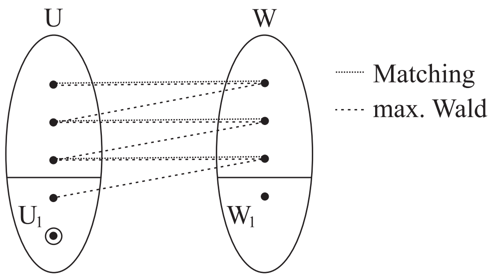
$\Rightarrow$ Falls M ein Matching und T eine Eckenüberdeckung ist und es gilt $|M| = |T|$
$\Rightarrow$ M max, T min., d.h. $|M| = \nu = \tau = |T|$

<u>Satz:</u> Sei $G = (V, E)$ ein bipartiter Graph ($V = U \dot\cup W$) und M sei ein Matching in G.
$U_1 = U \setminus V(M)$
$W_1 = W \setminus V(M)$
Ferner sei $F \subset G$ ein *maximaler Wald* mit folgenden Eigenschaften:

(*) Jede Ecke w von F in W hat den Grad 2 in F und eine der beiden Kanten, mit denen w inzidiert, ist in M.

(**) Jede Komponente von F enthält eine Ecke aus U_1.

$\Rightarrow M_{max} \Leftrightarrow$ keine Ecke in W_1 ist zu einer Ecke in F adjazent.



<u>Beweis:</u> „ $\Rightarrow$ “
Annahme: $w \in W_1$ ist adjazent zu $v \in V(F)$
$\Rightarrow v \in U$
Falls $v \in U_1 \Rightarrow M \cup \{\{v, w\}\}$ ist Matching. $\rightarrow$ Widerspruch!
Falls $c \notin U_1 \Rightarrow$
Sei $a \in U_1$, die zu der Komponente gehört, in der die Ecke liegt, zu der W adjazent ist.
Sei $(a = a_1)a_2a_3 \ldots (a_{i-1} = V)(a_i = w)$ der eindeutige Weg von a nach W in F.
$d :\Rightarrow$ Es gilt: $a_ja_{j+1} \in M$ für $j = 2, 4, 6$
$a_ja_{j+1} \notin M$ für $j = 1, 3, 5$
$\Leftrightarrow i$ ist gerade
$\Rightarrow M' = M \setminus \{\{a_j, a_{j+1}\} | j = 2, 4, \ldots, i-2\} \cup \{\{a_j, a_{j+1}\} | i = 1, 3, \ldots, i-1\}$ ist ein Matching und $|M'| = |M| - \frac{i-3}{2} + \frac{i-1}{2} = |M| + 1$

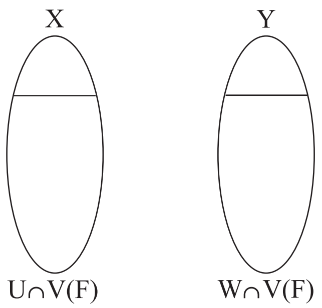
$\square$

„ $\Leftarrow$ “
Definiere folgende Mengen: $x = U \setminus V(F)$; $y = W \cap V(F)$
Zeige: i) $|X \cup y| = |M|$
ii) $X \cup y$ ist eine Eckenüberdeckung

zu i) $\rightarrow x \cup y \subseteq V(M)$

Annahme: $\exists y \in Y \setminus V(M) \Rightarrow y \in V(F) \cap W$
$\overset{(*)}{\Rightarrow} y$ inzidiert mit einer Kante aus $M \rightarrow$ Widerspruch!

Annahme: $\exists x \in X \backslash V(M) \Rightarrow x \in U_1$



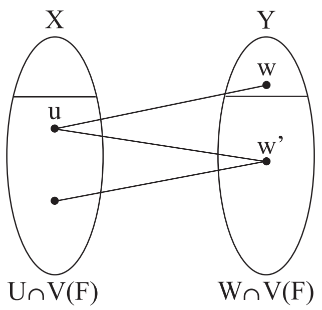
$\Rightarrow F' = (V(F) \cup \{x\}, E(F))$
$\Rightarrow$ (*) und (**) gelten für F'. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von F.

$x \cup y \subseteq V(M)$
$\rightarrow$ Sei $e = \{u, w\} \in M \Rightarrow$ nicht beide Ecken u, w liegen in $x \cup y$.

Annahme: $u \in X$; $w \in Y = V(F) \cap W$
$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ w inzidiert mit einer Kante $e' = \{w, u'\} \in M$ in F
$\Rightarrow e' \neq e \Rightarrow w$ inzidiert mit zwei Kanten aus M $\rightarrow$ Widerspruch!

$\rightarrow$ Sei $e = \{u, w\} \in M \Rightarrow |\{u, w\} \cap (x \cup y)| \geq 1$

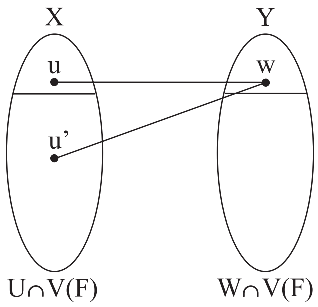
Annahme: $u \in V(F) \cap U$; $w \in W \backslash V(F)$
$\Rightarrow u \notin U_1$



$\Rightarrow e' = \{u, w'\} \in M$; $w' \in y$
$\Rightarrow |x \cup y| = |M|$

zu ii) $x \cup y$ ist Eckenüberdeckung

Annahme: $\exists\, e = \{u, w\}$ $u \in U \cap V(F)$ $w \in W \backslash V(F)$



$\Rightarrow w \in W_1 \;\Rightarrow\; \exists\, e' = \{w, u'\} \in M\; u' \in x$

$\Rightarrow F' = (V(F) \cup \{w, u'\}, E(F) \cup \{e, e'\})$

$\Rightarrow (*), (**)$ gelten für F'

$\Rightarrow$ Widerspruch zur Maximalität von F

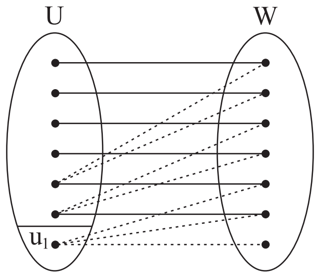
$\Rightarrow \exists$ Eckenüberdeckung $x \cup y$ mit der gleichen Kardinalität wie M

$\Rightarrow M$ ist maximal

Obiger Satz führt zur polynomialen Algebra für maximale Matchings in bipartiten Graphen

1. Starte mit beliebigem Matching M

2. $U_1 \rightsquigarrow$ konstruiere F



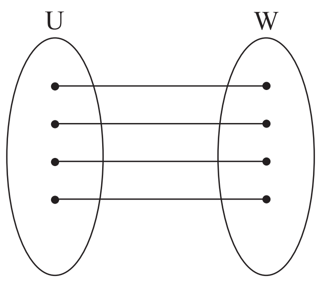
3. $F_{max} \begin{cases} \nearrow\ {\scriptstyle w \in w_1} \text{ adjazent zu } \underbrace{v \in V(F)}_{M \to M'} \\ \searrow\ \text{nicht adjazent zu } {\scriptstyle M_{max}} \end{cases}$ [2]

2.2.2 Satz von König

Folgerung:
Für einen bipartiten Graphen G gilt: $v(G) = \tau(G)$

[2] „Ungarische Methode“

Beweis: $G = (U \dot\cup W, E)$ Sei M ein maximales Matching
1.Fall: $U \subseteq V(M)$



$\Rightarrow U$ ist Eckenüberdeckung $|U| = |M|$
$\Rightarrow v(G) = \tau(G)$

2. Fall: U $\not\subseteq V(M) \Rightarrow U_1 \neq \emptyset$

Sei F maximaler Wald mit (*),(**)
$\Rightarrow$ (wie oben) $X \cup Y = (U \backslash V(F)) \cup (W \cap V(F))$ ist Eckenüberdeckung gleicher Kardinalität wie M
$v(G) = \tau(G)$

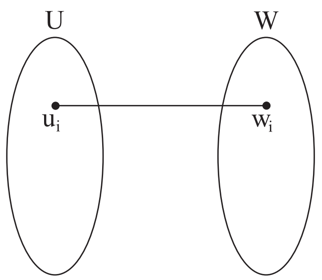
Folgerung: (Satz von König)
Sei $G = (U \cup W, E)$ bipartit. Es existiert genau dann ein Matching M mit $U \subseteq V(M)$, wenn für alle $S \subseteq U$ folgende Bedingung gilt:

$$|N(S)|^3 \geq |S|$$

$$\Big[N(S) = N(S,G) = \{v | \exists u \in S \text{ mit } \{u,v\} \in E\} = \bigcup_{v \in S} N(v,G)\Big]$$

Beweis: „ $\Rightarrow$ “

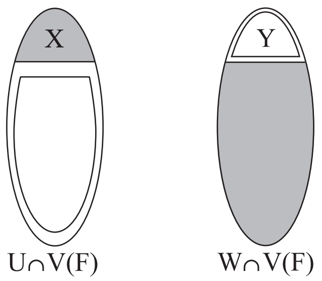
Sei $U = \{u_1, \dots, u_r\}$; $W = \{w_1, \dots, w_s\}$
Sei $S = \{u_1, \dots, u_k\} \subseteq U$
$N(S) : \{w_1, \dots, w_k\} \subseteq N(S)$



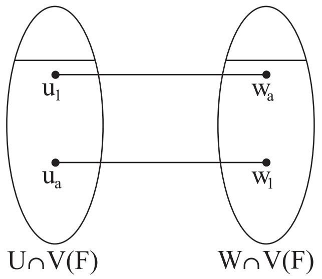
[3] Menger der Ecken, die Nachbarn in S haben

$|S| = k \leq |N(S)|$

„ $\Leftarrow$ “
<u>Annahme:</u> M ist nicht maximal $\Rightarrow$ (Bez. wie oben) $U_1 \neq \emptyset$
$\rightsquigarrow F$; $X \cup Y$ ist Eckenüberdeckung



$N(U \cap V(F)) \subseteq W \cap V(F)$
$W \cap V(F) = \{w_1, \ldots, w_a\}$



$\Rightarrow \{u_1, \ldots, u_a\} \subseteq U \cap V(F)$
$\Rightarrow |N(U \cap V(F))| \leq |w \cap V(F)) = a$
$|U \cap V(F)| \geq a + |U_1| \geq a + 1$
$S = U \cap V(F) : |N(S) < |S| \rightarrow$ Widerspruch!

<u>Folgerung:</u> Eine Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ heißt *doppelt-stochastisch*
$\Leftrightarrow$ $\rightarrow$ $a_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i, j$
$\rightarrow$ $\sum\limits_j a_{ij} = 1 \quad \forall\, i$ [Summe der Zeileneinträge]
$\rightarrow$ $\sum\limits_i a_{ij} = 1 \quad \forall\, j$ [Summe der Spalteneinträge]
per $A = \sum\limits_{\pi \in S_n} a_1, \pi(1) a_2, \pi(2) \ldots a_n, \pi(n) > 0$

<u>Beweis:</u>

$U = \{u_1, \ldots, u_n\}$
$\rightarrow$ bip. G
$W = \{w_1, \ldots, w_n\}$
$E : u_i w_j \in E \Leftrightarrow a_{ij} > 0$

$\Rightarrow$(König) $|S| \leq |N(S)| \forall S \subseteq U$

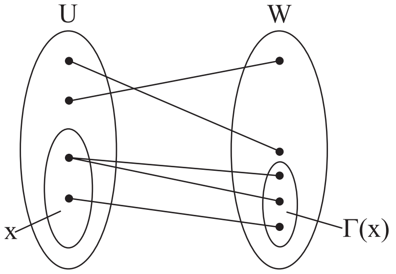
$\Rightarrow$ G hat ein perfektes Matching

$\Rightarrow$ per $A > 0$

$\square$

2.2.3 Satz von Hall

Sei $G = (U \cup W, E)$ bipartit. Es ex. ein perfektes Matching in G, falls $|U| = |W|$ und für alle $x \subseteq U$: $|\Gamma(x)| \geq |x|$



Ziel: Analoger Satz für allgemeine Graphen

2.2.4 1-Faktorsatz von Tutte(1946)

Es sei G ein Graph, $S \subseteq V(G)$

$G - S$[4]$= (V \backslash S, E(G) \cap \binom{V \backslash S}{2})$[5]

$q(G_S) :=$ Anzahl der ungeraden[6] Zusammenhangskomponenten von $G - S$

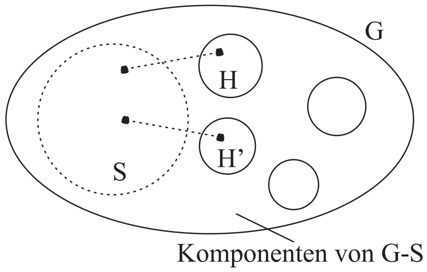
Es sei G ein Graph. G besitzt ein perfektes Matching[7] $\Leftrightarrow$ Für alle $S \subseteq V(G)$ gilt:

$$\underbrace{q(G_S) \leq |S|}_{\text{Tutte-Bedingung}}$$

<u>Beweis</u>:
„ $\Rightarrow$ “

[4]sprich: „G ohne S“
[5]streiche alle Kanten aus G, dir mit einer Kante aus S inzidieren
[6]Anzahl der Ecken ungerade
[7]also ein Matching, das alle Ecken von G überdeckt

G besitze ein perfektes Matching

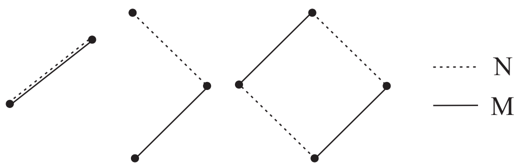


Zu jeder ungeraden Komponente H von $G-S$ existiert mindestens eine Matchingkante, die H mit S verbindet.
Für verschiedene ungerade Komponenten H, H' sind die entsprechenden Punkte in S verschieden.
$\Rightarrow q(G-S) \leq |S|$

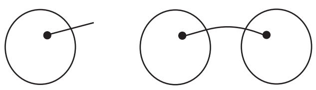
„ $\Leftarrow$ “ Es gelte die Tutte-Bedingung.

(i) Ist H ein Graph, dessen Grade alle ≤ 2 sind, so bestehen seine Komponenten aus isolierten Punkten oder Wegen oder Kreisen.

(ii) Es seien M und N Matchings in einem Graphen G. Dann bestehen die Komponenten von $H := (V(G), M \oplus N)$ aus isolierten Punkten oder „alternierenden“ Kreisen oder „alternierenden“ Wegen.
$M \oplus N := (M \backslash N) \cup (N \backslash M)$



(iii) Die Tutte-Bedingung bleibt erhalten, wenn wir zu G eine beliebige Kante hinzufügen.
$G' = G \cup e$ $q(G' \backslash S) \leq q(G \backslash S)$ für alle $S \subseteq V(G)$

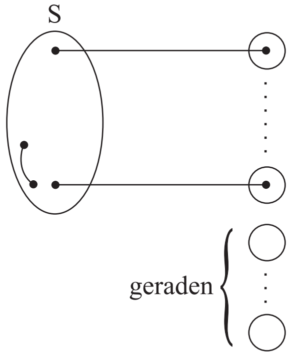


Der eigentliche <u>Beweis</u>:
Falls G kein perfektes Matching enthält, so fügen wir zu G so lange Kanten hinzu, bis jede neu hinzugefügte Kante einen Graphen mit perfektem Matching liefern würde.
(Beachte (iii) und Tutte-Bed. für $S = \emptyset$)
Œ $G \cup e$ besitzt perfektes Matching für jedes $e \in \binom{v}{2} \backslash E(G)$

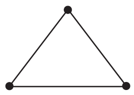
Es sei $S := \{v \in V \,|\, v \text{ ist in } G \text{ mit allen anderen Punkten adjazent}\}$

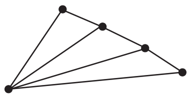
<u>Behauptung:</u> Alle Komponenten von $G - S$ sind vollständige Graphen.
(Wenn wir dies gezeigt haben, so sind wir fertig!)

Wir wählen perfekte Matchings in den geraden Komponenten von $G - S$ und fast perfekte[8] Matchings in den ungeraden.
Wir ergänzen dies durch jeweils eine Kante zwischen den ungeraden Komponenten und S und ggfs. durch Kanten zwischen Punkten aus S.



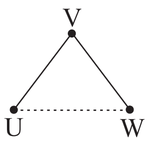
<u>Behauptung:</u> In den Komponenten von $G - S$ ist die Adjazenz eine Äquivalenzrelation.





zu zeigen: $u, v, w \in H$, H Komponente von $G - S$
$uv \in E(G)$, $vw \in E(G) \Rightarrow uw \in E(G)$

Angenommen nicht:

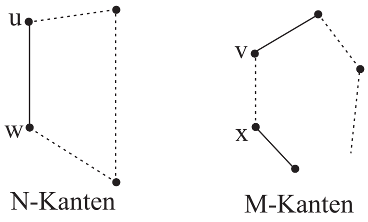


$G \cup uw$ besitzt ein perfektes Matching M
Da $v \notin S$, ex. $x \in V \backslash S : vx \notin E(G)$
N sei ein perfektes Matching von $G \cup vx$

$K := (V(G), M \oplus N)$

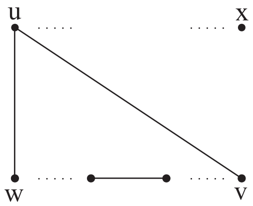
[8] d.h. alle Punkte bis auf einen überdeckend

<u>1. Fall</u>: vx und uw in der gleichen Komponente von K:

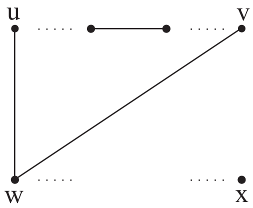


Wir können also ein perfektes Matching konstruieren, ohne die Kanten uw bzw. vx zu benutzen.

<u>2.Fall</u>:



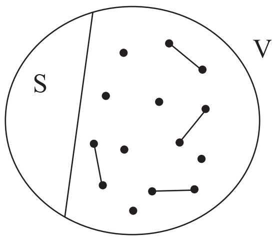
uv und jede 2. Kante auf dem Bogen $uvxu$ läßt sich ergänzen zu einem perfekten Matching.



Es folgt wiederum: G muß bereits ein perfektes Matching enthalten. $\rightarrow$ Widerspruch!

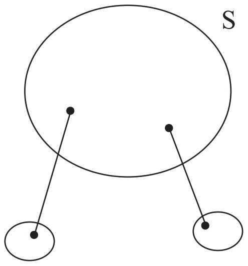
□

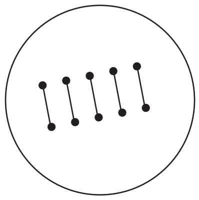
$S \subseteq V, G - S$



$q(G_S) = q(G - S) :=$ Anzahl der ungeraden Zusammenhangskomponenten von $G - S$.

G hat perf. Matching $\Leftrightarrow$ $\forall\ S \subseteq V$ gilt: $q(G - S) \leq |S|$



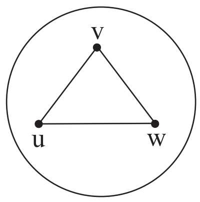


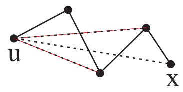
Beweis: (Indirekt durch Gegenbeispiel)

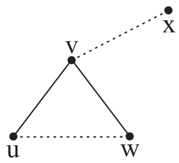
$G + e$ hat perf. Matching für alle $e \notin E(G)$

$S :=$ Menge der Punkte, die mit allen anderen verbunden sind.

Behauptung: Die Komponenten von $G - S$ sind alle vollst. Graphen.





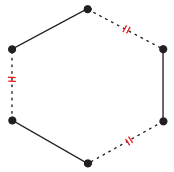


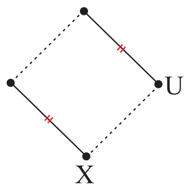
M perfektes Matching in $G + uw$

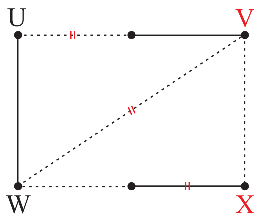
N perfektes Matching in $G + vx$

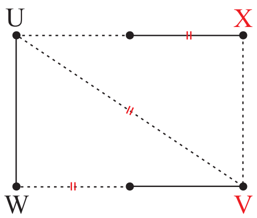
$M \oplus N = (M \backslash N) \cup (N \backslash M)$

$H = (V, M \oplus N)$

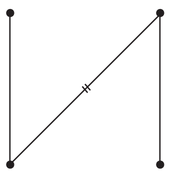








Matchingzahl $=\nu(G)$ Kantenzahl eines maximum- bzw. maximalen Matchings

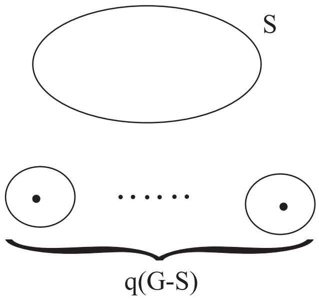


2.2.5 Berse-Formel

Satz:

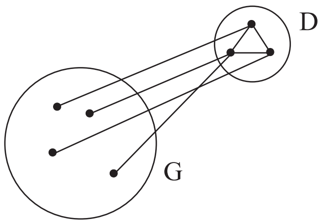
$$|V| - 2\nu(G) = \max_{S \subseteq V}(q(G-S) - |S|)$$

Beweis: Klar: $|V| - 2\nu(G)$ =minimale Anzahl von Punkten, die von einem Matching nicht überdeckt werden $\leq \max\limits_{S \subseteq V}(q(G-S) - |S|)$



$q(G-S) - |S|$

Es sei nun umgekehrt
$d := \max\limits_{S \subseteq V}(q(G-S) - |S|)$
$d \geq q(G'_S) - |S'|$
Erweitern G zu einem Graphen
$G' := (V(G) \cup D, E(G) \cup \{vx | v \in V, x \in D\} \cup \binom{D}{2}), \ \ |D| = d$

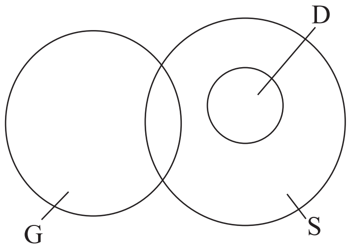


Behauptung: G' erfüllt die Tutte-Bedingung
$S \subseteq V(G') = V(G) \cup D$
$q(G' - S)$?
$|V \cup D|$ ist gerade !

1. Falls $S \subseteq (V \cup D)$ nicht ganz D enthält, so besteht $G' - S$ aus genau einer Komponente.

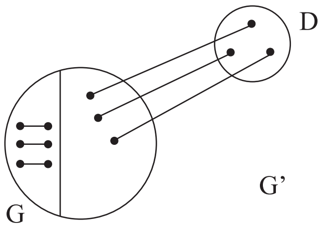
- $S = \emptyset$: $G' - S = G'$ von gerader Ordnung, also $q(G' - S) = 0$
- $S \neq \emptyset$: $|S| \geq 1$: Tuttebedingung klar, da nur eine Komponente existiert.

2. Also enthalte S ganz $D \Rightarrow G' - S = G - \underbrace{(S \backslash D)}_{S'}$



$$\Rightarrow q(G' - S) = q(G - S') \underbrace{\leq}_{\text{Definition von d}} |S'| + d = |S|$$

Aus dem Satz von Tutte folgt: G' besitzt ein perfektes Matching, etwa M. Die Kanten aus M, die zu G gehören, lassen dann höchstens d Punkte in G unüberdeckt.



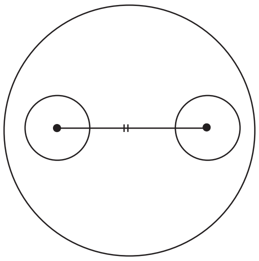
Die zeigt die andere Richtung der Ungleichung!

□

2.2.6 Satz von Petersen

<u>Definition</u>: e heißt *Brücke*, falls $G - e$ mehr Komponenten besitzt als G.

Ein 3-regulärer[9], brückenloser Graph besitzt ein perfektes Matching.



<u>Beweis:</u> Œ sei G zusammenhängend.

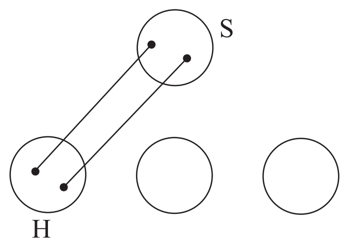
[9] d.h. Grad der Ecken=3 $\forall x \in V(G)$ (Kanten haben den Grad 3)

Wir überprüfen die Tutte-Bedingung:

$$\underbrace{\sum_{x\in V} d(x)}_{|V|\cdot 3} = 2\cdot|E| \Rightarrow |V| \text{ gerade}$$

<u>Zu zeigen</u>: $q(G-S) \leq |S| \qquad (S \subseteq V)$

Es sei H eine ungerade Komponente von $G-S$



Es gibt eine $H-S$-Kante, da G zusammenhängend ist.

Es gibt zwei $H-S$-Kanten, da G keine Brücke enthält.

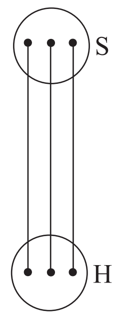
$$\sum_{x\subseteq V(H)} d_G(x) = \underbrace{3\cdot \underbrace{|V(H)|}_{\text{ungerade}}}_{\text{ungerade}}$$

$$\sum_{x\subseteq V(H)} d_H(x) \text{ gerade}$$

Würden genau 2 Kanten von H nach S führen, so wäre

$$\sum_{x\subseteq V(H)} d_G(x) = 2 + \underbrace{\sum_{x\subseteq V(H)} d_H(x)}_{\text{gerade}}$$

Es gibt also deshalb mindestens 3 $H-S$-Kanten.



Jeder Punkt in S mit höchstens drei Kanten indizieren, also

$3|S| \geq 3\cdot q(G-S)$, daher gilt die Tutte-Bedingung.

2.3 Flüsse in Netzwerken

Graphen: $G = (V, E),\ E \subseteq \binom{V}{2},\ \{u, v\},\ uv$

$\bullet\!\longrightarrow\!\bullet$

<u>Gerichteter Graph:</u>

$G = (V, B)$, $B \subseteq V \times V$

Elemente von B (gerichtete Kanten) heißen *Bögen*

<u>Bezeichung:</u> $\overset{u}{\bullet}\!\longrightarrow\!\overset{v}{\bullet}$ $\qquad \overrightarrow{uv} \qquad (u, v)$

<u>Definition:</u>

Ein *Netzwerk* N ist ein Quadrupel (G, C, q, s) mit

1. G ist ein gerichteter, schlingenloser[10] Graph

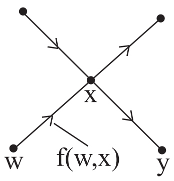
2. $C : B = B(G) \to \mathbb{R}_+$, i.e. C ordnet jedem Bogen von G eine nicht negative Zahl als seine *Kapazität* zu. $|C(u, v)| := C(u, v)$

3. $q, s \in V(G), q \neq s$ q heißt *Quelle*, s heißt *Senke* von N.

Ein *Fluß* in N ist eine Funktion $f, B(G) \to \mathbb{R}_+$ mit folgenden Eigenschaften:

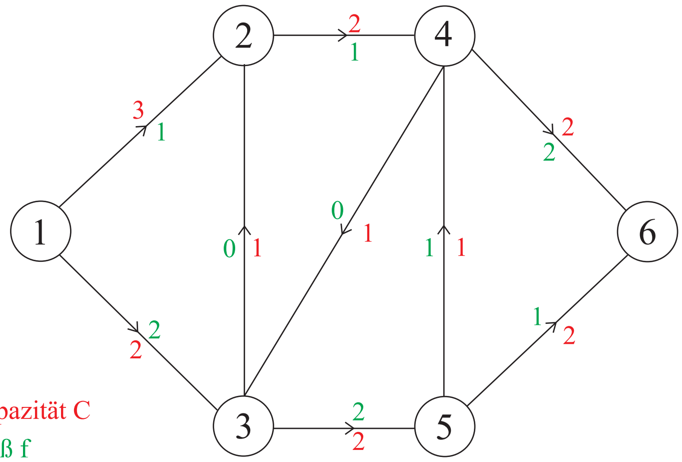
1. $\forall e \in B(G) :\ f(e) \leq C(e)$

2. $\forall x \in V(G) \backslash \{q, s\} : \sum_{W:(W,X) \in B(G)} f(W, X) = \sum_{Y:(X,Y) \in B(G)} f(X, Y)$ (1.Kirchhoffsches Gesetz)



<u>Beispiel:</u>

[10] d.h. $(U, U) \notin B$ für $U \in V$



Definition:

1. Der *Wert* $val(f)$ *eines Flusses* f ist definiert durch:

$$val(f) := \sum_{x:(q,x)\in B} f(q,x) - \sum_{y:(y,q)\in B} f(y,q)$$

2. Ein *Schnitt* in N ist eine Teilmenge $W \subseteq V(G)$ mit $q \in W, s \notin W$. Die *Kapazität* eines Schnittes, $cap(W)$, ist definiert durch

$$cap(W) := \sum_{\substack{(x,y)\in B \\ x\in W, y\notin W}} C(x,y)$$

Lemma: Es sei N ein Netzwerk, f ein Fluß in N, W ein Schnitt. Dann gilt:

(i) $val(f) := \sum_{\substack{(x,y)\in B \\ x\in W, y\notin W}} f(x,y) - \sum_{\substack{(u,v)\in B \\ u\notin W, v\in W}} f(u,v)$

(ii) $val(f) \leq cap(W)$

Beweis:
Offenbar impliziert (i) (ii).

Zu (i): $\sum_{x\in W} \underbrace{\left(\sum_{(x,y)\in E} f(x,y) - \sum_{(w,x)\in B} f(w,x) \right)}_{\begin{cases} val(f) & \text{, falls } x = q \\ 0 & \text{, sonst (nach Flußbed.)} \end{cases}}$

Halten wir nun einen einzelnen Bogen (u,v) fest und fragen, wie oft die Werte $\pm f(u,v)$ in der obigen Summe vorkommen:

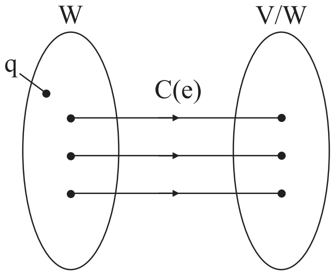
$$\begin{array}{lcl} u \in W,\ v \in W & : & \text{2-mal (} f(u,v) \text{ und } -f(u,v) \text{)} \\ u \in W,\ v \notin W & : & \text{1-mal (} f(u,v) \text{)} \\ u \notin W,\ v \in W & : & \text{1-mal (} -f(u,v) \text{)} \\ u \notin W,\ v \notin W & : & \text{überhaupt nicht} \end{array}$$

$\Rightarrow$ Die Summe ist:

$$\sum_{\substack{(x,y)\in B\\ x\in W, y\in W}} f(x,y) - \sum_{\substack{(u,v)\in B\\ u\notin W, v\in W}} f(u,v)$$

$\Rightarrow$ Behauptung

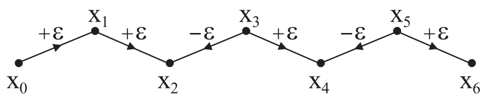
Zu (ii): $val(f) \leq cap(w)$



Dann folgt aus (i) unter Beachtung von $0 \leq f(e) \leq c(e) \, \forall \, e \in B$

<u>Definition:</u> Es sei N ein Netzwerk und f ein Fluß in N. Eine Folge $x_0, x_1, x_2, \cdots x_{r-1}, x_r$ heißt *vergrößernder* $(x_0 - x_r)$-*Weg* für f, falls:

(i) die x_i paarweise verschiedene Punkte aus $V(G)$ sind.
(ii) die e_j Bögen aus $B(G)$ sind mit $e_j = (x_{j-1}, x_j)$ (Vorwärtskante) oder $e_j = (x_j, x_{j-1})$ (Rückwärtskante)
(iii) für jede Vorwärtskante $e_j = (x_{j-1}, x_j)$ ist $f(x_{j-1}, x_j) < c(x_{j-1}, x_j)$
(iv) für jede Rückwärtskante $e_j = (x_j, x_{j-1})$ ist $f(x_j, x_{j-1}) > 0$



2.3.1 Das Schnitt-Fluß-Theorem

<u>Satz:</u> Ein Fluß f ist maximal ($val(f)$ ist maximal) $\Leftrightarrow$ es existiert kein vergößernder $(q-s)$-Weg.
<u>Beweis:</u>
(i)
Es sei $q = x_0, e_1, x_1 \ldots xr - 1, e_r, x_r$ ein vergößernder Weg. Wir definieren:
$\varepsilon_1 := min\{f(e_j) : e_j$ Rückwärtskante$\}$
$\varepsilon_2 := min\{e_j - f(e_j) : e_j$ Vorwärtsskante$\}$

$\Rightarrow \varepsilon := min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$

f' sei nun der folgende Fluß:

$$f'(e) := \begin{cases} f(e) & , \quad e \notin \{e_1, \dots, e_r\} \\ f(e) + \varepsilon & , \quad e \text{ Vorwärtskante} \\ f(e) - \varepsilon & , \quad e \text{ Rückwärtskante} \end{cases}$$

Dann ist f' ein Fluß

und es gilt: $val(f') = val(f) + \varepsilon$

(ii)
Wir setzen W:= $\{q\} \cup \{x \in V(G) \backslash \{q\}$: Es ex. ein vergrößernder $(q - x)$-Weg$\}$.
Nach Voraussetzung ist $s \notin W$. W ist ein Schnitt.

Wir wollen zeigen: $val(f) = cap(w)$

Es sei $x \in W, y \notin W, (x, y) \in B$. Dann muß $f(x, y) = c(x, y)$ sein, denn anderenfalls könnten wir den nach Definition von W existierenden $(q - x)$-Weg zu einem vergößerenden $(q - y)$-Weg verlängern.

Analog: Falls $(x, y) \in B$ für $y \notin W, x \in B$, so muß $f(x, y) = 0$ sein!

Insgesamt:

$$val(f) = \sum_{\substack{(x,y) \in B \\ x \in W, y \in W}} f(x, y) - \sum_{\substack{(u,v) \in B \\ u \notin W, v \in W}} f(u, v) = cap(W) \Rightarrow \text{Behauptung}$$

Folgerung: (Schnitt-Fluß Theorem, Ford & Fuklerson bzw. Elias, Feinstein & Shannon, 1956)

Sei f ein Fluß, W ein Schnitt $\Rightarrow max\ val(f) = min\ cap(W)$

Algorithmus (für den Fall ganzzahliger Kapazitäten):

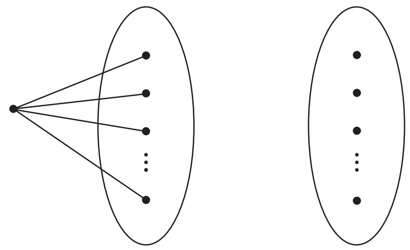
1. Es sei f_0 ein Fluß in N, z.B. $f_0 = 0$
2. $i := U$
3. Suche einen vergrößernden Weg für f_i. Falls kein solcher existiert, so ist f_i maximal und wird ausgegeben. Andernfalls vergrößern wir f_i wie im Beweis des vorigen Satzes und nennen den neuen Fluß f_{i+1}.
4. $i := i + 1$, Weiter mit 3.

Fragen:

1. Wie finde ich einen vergrößernden Weg ?
2. Wie oft muß man vergrößern ?
3. Wie finde ich einen minimalen Schnitt ?
4. Was ist, wenn die Kapazitäten nicht ganzzahlig sind ?

Zu 4.:
Vorsicht bei irrationalen Kapazitäten!
Aber: Edmonds und Karp haben gezeigt:
Falls immer ein vergrößernder Weg mit minimaler Kantenzahl gewählt wird, so stoppt der Algorithmus nach $O(mn)$, $m = |B(G)|, n = |V(G)|$ Vergrößerungen mit einem maximalen Fluß.

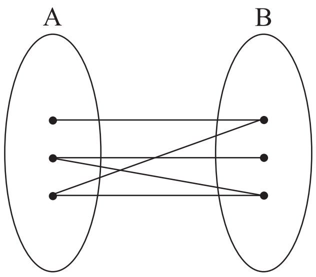
Zu 1.:
Sind G und f gegeben, so konstruieren wir einen *Residualgraphen* $G'(V(G), B')$:
$\vec{xy} \in B'$, falls $\vec{xy} \in B$ und $f(\vec{xy}) < c(\vec{xy})$ oder falls $\vec{yx} \in B$ und $f(\vec{yx}) > 0$.



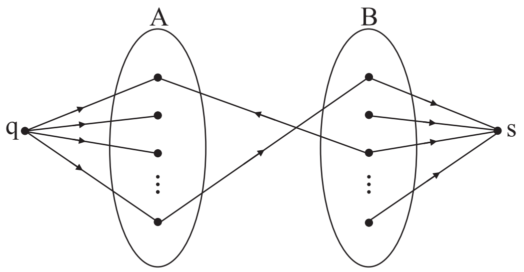
Ist f maximal, so ist $W = \{q\} \cup U_1 \cup U_2 \cup \ldots$ ein minimaler Schnitt.

2.3.2 Anwendungen des Schnitt-Fluß-Theorems

1. Satz von König

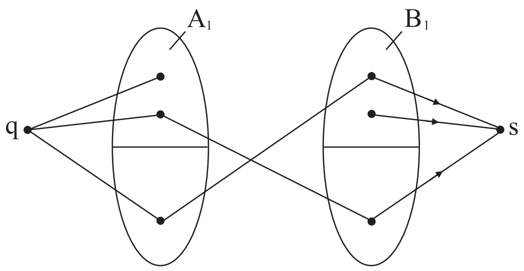


Beweis (mittels Schnitt-Fluß-Theorem):
Wir konstruieren ein Netzwerk wie folgt:



$(q,a), a \in A \quad (b,s), b \in B$
$c(q,a) = 1 \qquad c(b,s) = 1$

$\{a,b\} \in E : (a,b) \in B$ mit $c(a,b) = |A| + |B| + 1$.
Ein minimaler Schnitt sei $\{q\} \cup A_1 \cup B_1$ mit $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$

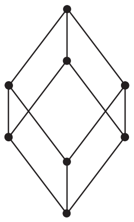


Dann ist $(A \backslash A_1) \cup B_1$ ein *Vertex-Cover*. (Da $cap(\{q\} \cup A_1 \cup B_1) \in |A|$ (vergleiche mit $\{q\}$) kann es keine Kante (a,b) mit $a \in A_1$ und $b \in B_1$ geben). Ein ganzzahliger Fluß (von q nach s) definiert zwischen A und B ein Matching. Die Anzahl der Kanten des Matchings ist der Wert des Flusses. D.h. es gibt in dem bipartiten Graphen ein Matching mit $cap(\{q\} \cup A_1 \cup B_1)$ Kanten. Aber $cap(\{q\} \cup A_1 \cup B_1) = |A \backslash A_1| + |B_1|$.

2.3.3 Satz von Dilworth

Vorbemerkung:
$P = (\mathcal{X}, \leq)$ heißt Halbordnung (partielle Ordnung), falls $\mathcal{X}$ eine Menge ist und $\leq$ eine 2-stellige Relation auf $\mathcal{X}$ mit:

(i)	$\forall x \in \mathcal{X} : x \leq x$	(Reflexivität)
(ii)	$x \leq y$ und $y \leq x \Rightarrow x = y$	(Antisymmetrie)
(iii)	$x \leq y$ und $y \leq z \Rightarrow x \leq z$	(Transitivität)



Hasse-Diagramm

$A \subseteq \mathcal{X}$ heißt *Antikette*, falls keine zwei Elemente in A vergleichbar sind.
$K \subseteq X$ heißt *Kette*, falls je zwei Elemente in K vergleichbar sin.
$\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_r\}$ heißt *Kettenzerlegung von P*, falls $X = C_1 \dot{\cup}, \ldots, \dot{\cup}\, C_r$ und alle C_i Ketten sind.
Offenbar ist:

$$max|A| \leq min|\mathcal{C}|$$

<u>Bemerkung:</u>
Ist $P = (\mathcal{X}, \leq)$ Halbordnung, so schreiben wir $x \leq y \Leftrightarrow x \leq y$ und $x \neq y$
Es gilt stets:

$$x \nless x$$
$$x < y, y < z \Rightarrow x < z$$

<u>Satz (von Dilworth):</u>
Für jede unendliche Halbordnung gilt:

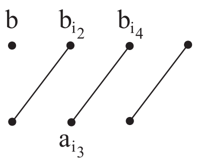
$$max|A| = min|\mathcal{C}|$$

<u>Beweis:</u> (mit dem Satz von König)
$P = (\mathcal{X}, \leq)$ sei die Halbordnung, $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$
G sei ein bipartiter Graph mit Farbklassen $A = \{a_1, \ldots, a_n\}, B = \{b_1, \ldots, b_n\}$
$a_i b_i \in E(G) :\Leftrightarrow x_i < x_j$ (in P)

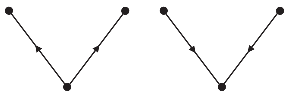
<u>Lemma:</u>
Es sei M ein Matching in G. Dann existiert eine Kettenzerlegung $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_r\}$ von P mit:

$$|M| + |C| = |M| + r = n$$

<u>Beweis:</u>
Wir schreiben $M = \{a_{i_1}, b_{i_2}, a_{i_3} b_{i_3}, \ldots, a_{i_{2n-1}} b_{i_{2n}}\}$, also $x_{i_1} < x_{i_2}, x_{i_3} < x_{i_4}, \ldots, x_{i_{2k-1}} < x_{i_{2k}}$.
Auf der Menge $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{2k}}\}$ der verschiedenen x_{i_j} erhalten wir eine Zerlegung in disjunkte Ketten der Länge ≥ 2 $(\mathcal{C}')$



Formal:
Wir bilden einen gerichteten Graphen $x_{i_{2j-1}} \vec{\ } x_{i_{2j}}$.
Dieser gerichtete Graph enthält keine Kreise. Jedes c_{i_j} inzidiert mit einer Kante.
Die folgenden sind als Teilgraphen ausgeschlossen!



Es gibt demnach nur Graphen wie:

Die Komponenten dieses gerichteten Graphen entsprechen der Kettenzerlegung $C' = \{C_1, \ldots, C_s\}$.
Sie wird durch einelementige Ketten zu einer Kettenzerlegung $\mathcal{C} = \{C_1, \ldots, C_s\}$ von P erweitert.
$\Rightarrow n = \sum_{j=1}^{r} |C_j| = \sum_{j=1}^{r} (n_j - 1) + r = |M| + r$, wobei $n_j = |C_j|, n_j - 1$ die Anzahl der gerichteten Kanten in dem obigen Graphen ist, die zur Kette C_j gehören. Diese Kanten entsprechen bijektiv den Kanten aus $|M|$.

Lemma:
Ist $W \subseteq A \cup B$ min. Vertex Cover von C_j, so existiert eine Antikette $K \subseteq P$ mit $|K| + |W| \geq n$

Beweis:
Wir setzen $W = \{a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}, b_{j_1}, \ldots, b_{j_m}\} \Rightarrow \mathcal{X}' := \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}, x_{j_1}, \ldots, x_{j_m} \subset \mathcal{X}$
$|\mathcal{X}'| \leq |W|$
$U := \mathcal{X} \backslash \mathcal{X}'$ ist Antikette und $|U| + |W| \geq |U| + |\mathcal{X}'| = |\mathcal{X}| = n$
Beweisschluß:
Wir wählen nach König ein Matching M und ein Vertex-Cover W mit $|M| = |W|$.
Zu M: Kettenzerlegung $\mathcal{C}$ mit $|M| + |\mathcal{C}| = n$
Zu W: Antikette U mit $|U| + |W| \geq n$
$\Rightarrow |U| \geq |\mathcal{C}|$

□

Beweis: Wir zeigen: Falls jede Antikette in P höchstens n Elemente besitzt, so ist P Vereinigung von m Ketten.

Induktion nach $|X|$

$X = \emptyset$: klar.

$|X| > 0$: Wir wählen in P eine maximale Kette C. Falls keine Antikette in $(X \backslash C, \leq)$ m Elemente enthält, so folgt die Behauptung aus der Induktionsannahme. (Überdecken $X \backslash C$ mit $m - 1$ Ketten und fügen C hinzu!)

Annahme: $(X \backslash C, \leq)$ enthält eine Antikette $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ mit m Elementen.

$S^- := \{x \in X : x \leq a_i$ für ein $i\}$ (unterer Schatten)
$S^+ := \{x \in X : x \geq a_i$ für ein $i\}$ (oberer Schatten)

Es ist $X = S^- \cup S^+$

(Angenommen $y \in X \backslash \{S^- \cup S^+\}$, dann wäre y zu allen a_i unvergleichbar, also $A \cup \{y\}$ eine Antikette mit $m+1$ Elementen $\rightarrow$ Widerspruch)

Keine der Mengen S^-, S^+ kann bereits gleich X sein, denn das maximale Element von C gehört nicht zu S^- und das minimale Element von C gehört nicht zu S^+.

(Angenommen: $C \max C|tS^- \Rightarrow$ es existiert i mit $y \leq a_i$ für alle $y \in C \Rightarrow C \cup \{a_i\}$ größere Zahl $\rightarrow$ Widerspruch zur Wahl von C)

$P+ := (S^+, \leq)$ und $P^- := \{S^-, \leq\}$ sind also Halbordnungen, für die wir die indirekte Annahme verwenden können.

$\Rightarrow S^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \underbrace{C_i^+}_{\text{Kette in } P+}, S^- = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \underbrace{C_i^+}_{\text{Kette in } P^-}$ weil veschiedene a_i zu verschiedenen Ketten gehören, können wir Œ annehmen, daß $a_i \in C_i^+ \cap C_i^-$, $1 \leq i \leq m$.

Wir sind fertig, falls $a_i = \max C_i^- = \min C_i^+$, denn dann ist $C_i := C_i^+ \cup C_i^-$ eine Kette und $\bigcup\limits_{i=1}^{m} C_i = \bigcup\limits_{i=1}^{m} C_i^+ \cup \bigcup\limits_{i=1}^{m} C_i^- = S^+ \cup S^- = X$

Angenommen, a_i wäre nicht das größte Element in $C_i^- \Rightarrow$ es gibt $x \in C_i^-$ mit $a_i \in X$

Nach Defintion von S^- existiertein $a_j \in A$ mit $x \leq a_j$

$\Rightarrow a_i < a_j \rightarrow$ Widerspruch zur Antiketteneigenschaft. Rest analog.

2.4 Ramsey-Theorie

Beispiel:

Betrachten einen Graphen mit unendlichen vielen Punkten. $G(V,e)$, $E \subseteq \binom{V}{2}$, V unendlich.

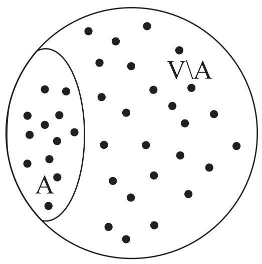
Behauptung:

Es gibt immer eine unendliche Teilmenge $W \subseteq v$, so daß $\binom{W}{2} \subseteq E$ oder $\binom{W}{2} \cap E = \emptyset$

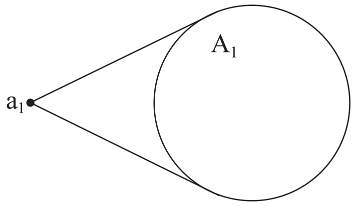
Beweis:

Angenommen, es existiert keine unendliche unabhängige Menge $W \subseteq V$.

Es sei A eine maximal unabhängige Teilmenge von G.



Da jeder Punkt von $V \backslash A$ eine Verbindung nach A besitzt, existiert ein $a_1 \in A$ mit unendlich vielen Nachbarn. Diese Menge der Nachbarn sei A_1



Wie oben finden wir in A_1 einen Punkt a_2, der unendlich viele Nachbarn besitzt (A_2). Analog konstruieren wir a_3, a_4, a_5 usw. Insgesamt erhalten wir eine Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ von verschiedenen Elementen von V, in der jedes Element mit jedem anderen verbunden ist.

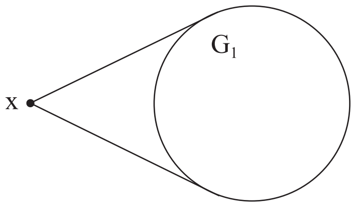
Satz: Jeder Graph mit $\binom{k+l}{k}$ Punkten enthält einen vollständigen Graphen mit $k+1$ Punkten oder eine unabhängige Menge mit $l+1$ Punkten.

Beweis: Induktion nach $k+l$: Für $k=1$ bzw. $l=1$ ist die Aussage trivial. Es sei nun $k>1, <\subseteq V(G)$

$\Rightarrow a_G(X) + a_{\overline{G}}(X)^{11} = |V(G)| - 1 = \binom{k+l}{k} - 1 = \binom{k+l-1}{k-1} + \binom{k+l-1}{k} - 1$

$\Rightarrow d_g(x) \geq \binom{k+k-1}{k.1}$ oder $d_{\overline{G}}(X) \geq \binom{k+l-1}{k} (in\overline{G})$

Falls die erste Ungleichung gilt, so sei G_1 der von den Nachbarn von x induzierte Untergraph.



$\binom{k+l-1}{k-1} = \binom{(k-1)+l}{k+1} \leq |V(G_1)|$

Nach Induktionannahme existiert in G_1 ein vollständiger Graph der Größe $(k-1)+1=k$ oder eine unabhängige Maenge der Größe $l+1$. Im letzteren Fall sind wir fertig. Im ersterem Fall ist der vollständige Grapg G_1 zusammen mit x ein vollständiger Graph der Größe $k+1$ in G. Falls die zweite Ungleichung gilt, also $d_{\overline{G}}(X) \geq \binom{k+l-1}{k} = \binom{k+l-1}{(k+l-1)-k} = \binom{k+(l-1)}{l-1}$

Weiteres Vorgehen analog. Betrachten den Graphen G_2, der von den zu x nicht benachbarten Punkten induziert wird.

Satz: Ist $k \in \mathbb{N}, a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbb{N}$, so existiert eine natürliche Zahl $R_K(a_1, \ldots, a_k)$ mit folgender Eigenschaft:

Färben wir die Kanten eines vollständigen Graphen $K_n, n \geq R_K(a_1, \ldots, a_k)$ mit den Fraben $1, \ldots, k$, so existiert ein $i \in \{1, \ldots, k\}$, so daß K_n einen vollständigen Graphen K_{a_i} enthält, dessen Kanten alle mit der Farbe i gefärbt sind.

Beweis: Induktion nach k:

[11] $G=(V,E) \Rightarrow \overline{G} := (V, \binom{V}{2} \backslash E)$

$k=1$: trivial
$k=2$: Wir wissen $R_2(A_1,a_2) \le \binom{a_1+a_2}{a_1} = \binom{a_1+a_2}{a_2}$
$k\ge 3$: Es sei $n \ge R_{K-1}(a_1,a_2,\dots,R_2(a_{K-1},a_K))$. Angenommen die Kanten von K_n sind mit den Farben $1,\dots,k$ gefärbt. (Identifizieren vorbergehend Farben $k-1$ mit k). Falls ein $i \in \{1,\dots,k-2\}$ existiert, so daß ein K_{a_i} mit Farbe i vollstndig gefrbt ist, so sind wir fertig.

Anderenfalls existiert ein vollständiger Graph der Gre $R_2(a_{k-1},a_k)$, dessen Kante alle mit den Farben $k-1$ oder k gefärbt sind. Nach Definition von $R_2(a_{k-1},a_k)$ existiert ein monochromatischer Teilgraph mit a_{k-1} Punkten zur Farbe $k-1$ oder ein ein monochromatischer Teilgraph mit a_k Punkten zur Farbe k.

$R_2(a_1,\dots,a_k)$ existiert und ist $\subseteq R_2(a_1,\dots,k-2,R_2(a_{k-1},a_k)$

2.4.1 Satz von Ramsey

Es seien $r,k,a_1,\dots,a_k \in \mathbb{N}$.

Dann existiert ein $R_k^r(a_1,\dots,a_k) \in \mathbb{N}$ mit:

Färbt man $\binom{V}{r}$ mit $|V| \ge R_k^r(a_1,\dots,a_k)$ mit den Farben $1,\dots,k$, so existiert ein $i \in \{1,\dots,k\}$ und $V_i \subseteq V$, so daß $|V| \ge a_i$ und jedes $X \in \binom{v_i}{r}$ mit der Farbe i gefärbt ist. [12]

Beweis:
Induktion nach r
$r=1$: Schubfachprinzip
$r=2$: siehe vorheriger Satz

Es sei $r\ge 3$ $(r-1 \to r)$

Ind.Annahme: $R_k^r(a_1,\dots,a_k)$ existiert für alle $b_1,\dots,b_n$.

Wir zeigen den Induktiosnschritt durch Induktion nach $a_1+a_2+\dots+a_k$.

Da die Existenz von $R_k^r(a_1,\dots,a_k)$ trivial ist, falls ein $a_i \le r$ ist, können wir $a_i > r$ für alle i annehmen. Der Induktionsanfang ist damit klar.

Es sei nun $|V|=n,\ x\in V$ beliebig aber fest.

Wir färben die $(r-1)$-elementigen Teilmengen von $V\backslash\{x\}$ wie folgt. Farbe von $S \in \binom{V\backslash\{x\}}{r-1}$ wird definiert als die Farbe von $S\cup\{x\}$.
Falls $n-1 \ge R_k^{r-1}(b_1,\dots,b_k)$ ist, so existiert für ein $i\in\{1,\dots,k\}$ ein $V_i \subseteq V\backslash\{x\}$, $|V_i| = b_i$, so daß alle $(r-1)$-elementigen Teilmengen von V_i die Farbe i bekommen.

[12] „Färbung“ heißt: Abbildung: $c:\binom{v}{r} \to \{1,\dots,k\}$

Wir wählen für $b_i = R_k^r(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i - 1, a_{i+1}, \ldots, a_k)$, $1 \leq i \leq k$ (die b_i existieren nach Ind.Annahme).
Dann besitzt V_i entweder eine a_j-elementige Teilmenge W, deren r-elementige Teilmengen alle gleich gefärbt sind mit Farbe j ($j \neq i$) oder V_i besitzt eine $(a_i - 1)$-elementige Teilmenge W, deren r-elementige Teilmengen alle die gleiche Farbe i haben.

Im ersten Fall ($j \neq i$) sind wir fertig, im zweiten Fall betrachten wir $W' := W \cup \{x\}$.

Was ist die Farbe der r-elementigen Teilmengen von W'?

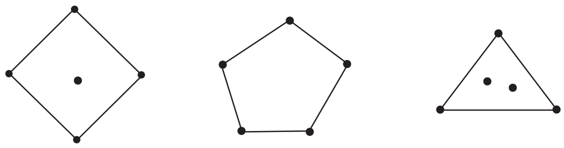
Es sei $S \in \binom{W'}{r}$. Falls $x \notin S$, dann ist $S \in \binom{W}{r}$, ist also i-gefärbt. Falls $x \in S$: $(S \backslash \{x\} \in \binom{V_i}{r-1}$ und ist damit i-gefärbt.

Nach Konstruktion der Färbung auf $\binom{V \backslash \{x\}}{r-1}$ muß auch S i-gefärbt sein!

Beispiel 1: (Erdös-Szekeresz)
Gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ eine Zahl $K(n)$ mit:
Unter je $K(n)$ Punkten der Ebene in allgemeiner Lage[13] gibt es n Punkte, die ein konvexes[14] n-Eck bilden?
Die Antwort lautet, „Ja!“

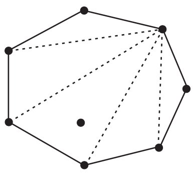
K(3)=3 4

Es seien 6 Punkte in allgemeiner Lage gegeben. Wir betrachten die konvexe Hülle:



1. Fall 2. Fall 3. Fall

Falls diese in ihrem Inneren 0 oder 1 Punkt enthält, sind wir fertig. $K(4) = 5$.
n Punkte bilden genau dann die Ecken eines konvexen n-Ecks, wenn je 4 der Punkte ein konvexes 4-Eck bilden.
Gäbe es einen inneren Punkt, so könnten wir folgende Aufteilung vornehmen:



[13] d.h., keine 3 Punkte liegen auf einer Geraden
[14] Für je 2 Punkte muß gelten: Ihre Verbindungslinie ist ganz in der Menge enthalten.
$M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist *konvex*, wenn für alle $x, y \in M$ gilt: $\{\lambda x + (1 - \lambda) y : 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq M$

Wir wählen nun K : $R_2^4(n,5)$ und K Punkte in allgemeiner Lage seien gegeben. Diese Menge sei V. Eine 4-elementige Teilmenge der Punkte erhält die Farbe 1, falls dies Punkte ein konvexes 4-Eck bilden, andernfalls 2.

Dann gibt es:

(i) $W \subseteq V$ mit $|W| = n$, so daß alle 4-elementigen Teilmengen ein konvexes 4-Eck bilden.

(ii) 5 Punkte, so daß <u>keine</u> 4 davon ein konvexes 4-Eck bilden.

(ii) kann nicht gelten, wegen $K(4) = 5$. Im Fall (i) bilden die Punkte aus W die Ecken eines konvexen n-Ecks.

<u>Beispiel 2:</u>
Für alle $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$.
Färbt man {1,2, ... ,N} mit k Farben, so existiert ein $i \in \{1, \dots k\}$ und x, y, z mit Farbe i und $x + y = z$.

<u>Beweis:</u>
Wir wählen $N := R_k^2(3, \dots, 3)$. Es sei $c : \{1, \dots, N\} \to \{1, \dots, k\}$ eine Färbung. Wir konstruieren $c' : \binom{\{1,\dots,N\}}{2} \to \{1, \dots, k\}$ wie folgt:

$$c'(\{i,j\}) := c(|i-j|)$$

Satz von Ramsey: Es gibt $\{i < j < k\} \subseteq \{1, \dots, N\}$ mit $c'(\{i,j\}) = c'(\{i,k\}) = c'(\{j,k\})$, also $\underbrace{c(j-i)}_{x} = \underbrace{c(k-i)}_{z} = \underbrace{c(k-j)}_{y}$ und es gilt $x + y = z$.

<u>Definition:</u>
Für $a, d \in \mathbb{N}$ ist $a, a+d, a+2d, \dots, a+(l-1)d$ eine *arithmetische Progression* der Länge l.

<u>Satz:</u> (Van der Waerden, 1927)
Färbt man N mit k-Farben, so gibt es monochromatische arithmetische Progressionen beliebiger endlicher Länge.

Beweis: zu finden z.B. bei „Chintchin: 3 Perlen der Zahlentheorie“
Äquivalent: Zu $k, l \in \mathbb{N}$ gibt es $N := N(k, l) \in \mathbb{N}$ mit:
Färbt man $\{1, \ldots, N\}$ mit k Farben, so gibt es eine monochromatische arithmetische Progression der Länge l.
Definition:
Wir betrachten eine Folge $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ natürlicher Zahlen. ihre *Dichte* ist definiert als: $\inf \left\{ \frac{\text{Anzahl der } a_i < n}{n} \right\} : n \in \mathbb{N}$.
Satz: (Szemeredi)
Hat man eine Folge natürlicher Zahlen positiver Dichte, so enthält sie arithmetische Progressionen beliebiger Länge.
Vermutung: (Erdös, \$3000)
Falls $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ eine Folge natürlicher Zahlen ist mit $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \infty$, so enthält sie arithmetische Progressionen beliebiger Länge.

2.4.2 Perfekte Graphen

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph.
$cl(G) := max\{|W| : E \subseteq V : G(W) \text{ vollständig }\}$ nennt man *Cliquenzahl.*
Jede Funktion $c : V \to \{1, \ldots, k\}$ heißt eine *k-Färbung* von G. c heißt *zulässig*, falls $xy \in E(G) \Rightarrow c(x) \neq c(y)$.
G heißt *k-färbbar*, falls G eine zulässige k-Färbung besitzt.
$\chi(G) := min\{k : \text{es ex. eine zulässige } k\text{-Färbung}\} = min\{k : c\ k\text{-färbbar}\}$ heißt die *chromatische Zahl*

Trivial: $\omega(G) \leq \chi(G)$
$g(G) := min\{|V(C)| : C \text{ Kreis in } G\}$ gibt die Länge des kürzesten Kreises an. ($g(G) = \infty$, falls C ein Wald).
Falls $g(G) \geq 4$, so ist $\omega(G) \leq 2$.
Man kann zeigen: Zu beliebigen natürlichen Zahlen k und l gibt es einen Graphen G mit $g(G) \geq k$ und $\chi(G) \geq l$.

Definition: G heißt *perfekt*, falls jeder induzierte Untergraph H von G die Gleichung $\omega(H) = \chi(H)$ erfüllt.

Beispiele

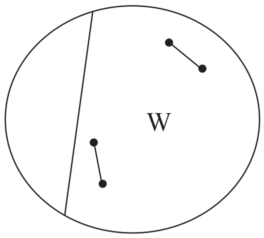
1. Intervallgraphen
Es seien $I_1, \ldots, I_n$ abgeschlossene Intervalle in R. Wir definieren einen Graphen $G = (V, E), V := \{x_1, \ldots, x_n\}, x_i x_j \in E \Leftrightarrow I_i \cap I_j \neq \emptyset$.
Graphen, die auf diese Weise entstehen, heißen *Intervallgraphen.* Induzierte Graphen von Intervallgraphen sind wieder Intervallgraphen.

Wir wollen zeigen: Intervallgraphen sind perfekt.
Es genügt zu zeigen: G Intervallgraph $\Rightarrow \chi(G) = \omega(G)$
Œ sei $I_1 = [b, a]$ ein Intervall mit kleinstem rechten Endpunkt. Nach einer Induktionsannahme ist $\chi(G - x_1) = \omega(G - x_1)$. Ist $x_i x_1 \in E(G)$, so ist $a \in I_i$.
Insgesamt enthalten höchstens $\omega(G)$ Intervalle (einschließlich I_1) den Punkt a, also ist
(*) $$d_G(x_1) \leq \omega(G) - 1$$
Eine zulässige Färbung von $G - x_1$ mit $\omega(G)$ Farben kann zu einer zulässigen Färbung von G mit $\omega(G)$ Farben fortgesetzt werden (In der Nachbarschaft von x_1 können wegen (*) höchstens $\omega(G) - 1$ Farben vorkommen. Färben x_1 mit einer anderen Farbe).
Übung: Zeige: G Intervallgraph $\Rightarrow \bar{G} := (V(G), \binom{V}{2} \backslash E(G))$ ist perfekt.

2. Vergleichbarkeitsgraphen:
Halbordnung $P = (V, \leq)$, Graph $G := (V, E)$
$xy \subseteq E :\Leftrightarrow x \leq y$ oder $y \leq x$.
Dann ist G perfekt. Genauso zu zeigen: $\chi(G) = \omega(G)$
$\omega(G)$ ist die Länge der längsten Kette in G.
Wir definieren eine Färbung c wie folgt:
$c(x)$ sei die maximale Länge einer Kette $x = x_1 < x_2 < \ldots < x_c$
Dann ist für alle $y : 1 \leq c(x) \leq \omega(G)$
Angenommen: $xy \in E(G)$, Œ $x < y \Rightarrow c(x) \geq c(y) + 1$
Auch $\bar{G}$ ist perfekt.
$\omega(\bar{G}) := max\{|W| : W \subseteq V, W$ Antikette in $P\}$
$\chi(\bar{G}) := min\{k :$ Es ex. Zerlegung von P in k Ketten$\}$

Satz über perfekte Graphen

Ziel:	G perfekt	$\Leftrightarrow$	$\overline{G}$ perfekt (L. Lovász)
bekannt:	G perfekt	$\Leftrightarrow$	$\chi(H) = \omega(H)$ für alle induzierten Untergraphen H von G



Beispiel:

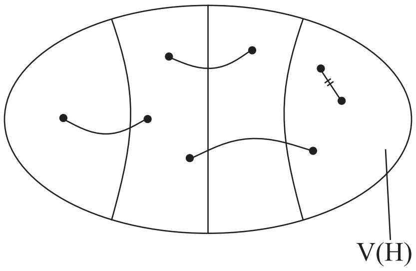
1. Intervallgraphen und Komplemente

2. Vergleichbarkeitsgraphenund Komplemente

Lemma:
G ist perfekt $\Leftrightarrow$ jeder induzierte Untergraph H muß eine unabhängige Menge enthalten, die alle Cliquen $C \subseteq H$ mit $|V(C)| = \omega(H)$ schneidet.

Beweis:

„$\Rightarrow$“ Wähle eine zulässige Färbung von H mit $\omega(H)$ Farben. Dann ist jede Farbklasse eine unabhängige Menge, wie wir sie suchen.



„$\Leftarrow$“ Es bleibt zu zeigen: G ist perfekt.Es sei H ein beliebiger induzierter Untergraph von G, $H = H_1$. Wir wählen eine unabhängige Menge $V_1 \subseteq V(H_1)$, die alle Cliquen max. Kardinalität von H schneidet, und färben die Punkte von V_1 mit Farbe 1.
Es ist $\omega(H - V_1) = \omega(H) - 1$. Dann setzen wir $H_2 := H - V_1$ und wählen analog V_2, die Menge der Punkte mit Farbe 2, u.s.w.
Es entsteht eine zulässige Färbung von H mit $\omega(H)$ Farben.

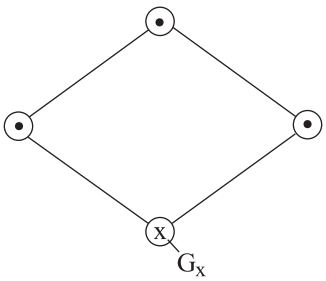
□

Satz: (Substitutionssatz)

Es seien $G = (V, E)$ und $G_x(x \in V)$ perfekte Graphen mit paarweise disjunkten Knotenmengen. Wir erzeugen einen Graphen G' wie folgt:

$$V(G' = \dot{\bigcup_{x \in V}} V(G_x)$$

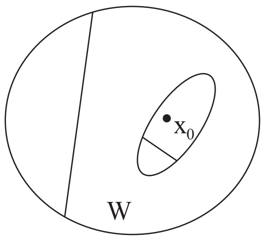
$uv \in E(G') \quad \Leftrightarrow$ entweder $\{u, v\} \subseteq V(G_x)$ für ein geeignetes x und $uv \in E(G_x)$ oder $u \in V(G_x)$, $v \in V(G_y)$ $(x \neq y)$ und $xy \in E(G)$.



[substituiere einen Punkt durch einen Graphen G_x]

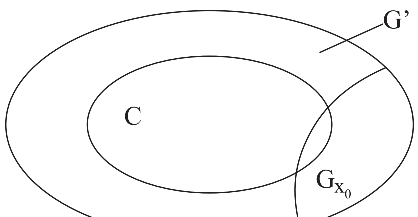
noch zu zeigen: Dann ist auch G' perfekt.

Beweis:
Wir können die Graphen G_x einen nach dem anderen substituieren und zeigen nun, daß die Perfektheit bei jedem solchen Schritt erhalten bleibt. Es werde also etwa G_{x_0} für einen Punkt x_0 des perfekten Graphen G substituiert.
Wir benutzen nun das vorherige Lemma, d.h. wir zeigen, daß G' eine unabhängige Menge enthält, die alle Cliquen max. Kardinalität von G' schneidet. (Induzierte Untergraphen von G' entstehen wie G' durch Substitution eines perfekten Graphen in einen perfekten Graphen.)
Nun färben wir G mit $\chi(G) = \omega(G)$ Farben und es sei W die Farbklasse, die x_0 enthält.
Außerdem sei $U \subseteq V(G_{x_0})$ eine unabhängige Menge, die alle größten Cliquen von G_{x_0} schneidet.



Offenbar ist $(W \backslash \{x_0\}) \cup U$ unabhängig in G'.

Es sei nun C eine Clique maximaler Kardinalität in G'.
$V(C) \cap V(G_{x_0} = \emptyset \;\Rightarrow\; C$ ist Clique max. Größe in G, also $V(C) \cap V(G_{x_0}) \neq \emptyset$.
Ist $V(C) \cap V(G_{x_0} \neq \emptyset$, so enthält C eine Clique max. Größe in G_{x_0},



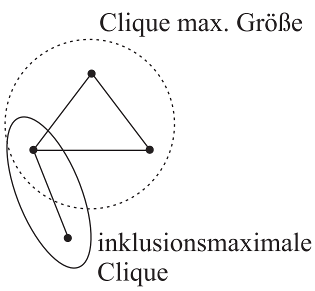
denn in diesem Fall ist $C - (V(C) \cap V(G_{x_0})) + C'$ eine Clique in G' für jede Clique C' in G_{x_0}.
Es muß also bereits $U \cap V(G) \neq \emptyset$ sein!

Definitionen:

Hypergraqph H	:	Paar (V, E), V endliche Menge, E eine Multimenge von Teilmengen von V, alle $\neq \emptyset$
Teilhypergraph H' von H	:	Paar (V, E') mit $E' \subseteq E$
Matchingzahl $\nu(H)$	:	Maximalzahl paarweise disjunkter Kanten in E
Vertex-Coverzahl $\tau(H)$	:	Minimale Kardinalität einer Menge $\underbrace{W}_{\text{Vertex-Cover}} \subseteq V$, so daß $e \cap W \neq \emptyset$ für alle $e \in E$
Grad von $x \in V$	:	$d(x) = d_H(x) := \|\{e \in E : x \in e\}\|, \Delta(H) = \max_{x \in U} d_H(x)$
Chromatische Zahl $\chi(H)$	:	Minimalzahl von Farben, die man braucht, um V zu färben, so daß jedes $e \in E$ mit $\|e\| \geq 2$ mindestens 2 verschiedene Farben enthält.
Chromatischer Index $\chi'(H)$	:	Minimalzahl von Farben, die man braucht, um E zu färben, so daß je 2 inzidente Kanten ($e, e' \in E$ mit $e \cap e' \neq \emptyset$) verschiedene Farben bekommen. $\chi'(H) \geq \Delta(H)$

Der Kantengraph $L(H)$ von H ist folgendermaßen definiert:
$V(L(H)) := E(H)$ $e, e' \in E(L(H)) \Leftrightarrow e \cap e' = \emptyset$
Es ist $\chi'(H) = \chi(L(H))$.

Zu jedem Graphen G sei der Cliquengraph $Cl(G)$ wie folgt definiert:
$V(Cl(G)) =$ Menge der inklusionsmaximalen[15] Cliquen von G.



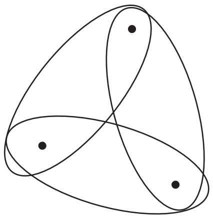
Zu jedem Punkt $x \in V(G)$ sei C_x die Menge der $C \in V(Cl(G))$ mit $x \in V(C)$.
$[E(Cl(G)) = \{e_x | x \in V(G)\}]$

Bemerkung: Für jeden Graphen G ist $L(Cl(G)) \simeq G$

Beweis:
Es ist $V(L(Cl(G))) = E(Cl(G)) = \{e_x | x \in V(G)\} \overset{x \leftrightarrow e_x}{\simeq} V(G)$ $e_x e_y \in E(L(Cl(G))) \Leftrightarrow e_x \cap e_y \neq \emptyset \Leftrightarrow$ es existiert eine maximale Clique, die x und y enthält $\Leftrightarrow xy \in E(G)$.

[15] „inklusionsmaximal“bedeutet: die Clique kann nicht durch weitere Hinzunahme von Punkten erweitert werden

Definitionen:
Ein Hypergraph H heißt *normal* $\Leftrightarrow \chi'(H') = \Delta(H')$ für alle Teilhypergraphen H' von H.
Er heißt τ-*normal*, falls $\nu(H') = \tau(H)'$
H hat die *Helly-Eigenschaft*, falls gilt: $E \subseteq E, \cap E' = \emptyset \;\Rightarrow$ es existieren $e, e' \in E'$ mit $e \cap e' = \emptyset$.



Satz:
Normale, τ-normale und Cliquenhypergraphen haben die Helly-Eigenschaft.

Beweis:

(i) Es sei H τ-normal und $E' \subseteq E$ mit $\cap E' = \emptyset$
$\Rightarrow \tau(H') \geq 2 \; (H' = (V, E')) \;\Rightarrow \nu(H') \geq 2 \;\Rightarrow\; \exists\; E'$ mit $e \cap e' = \emptyset$.

(ii) Es sei H normal und $E' \subseteq E$ mit $e \cap e' = \emptyset \;\; \forall\; e, e' \in E' \;\; e \neq e'$.

Wir färben die Kanten E' von $H' := (V(M), E')$ mit $\Delta(H')$ Farben.

Wegen $e \cap e' = \emptyset \;\; \forall\; e, e'$ bekommen die Kanten aus E' verschiedene Farben.

$\Rightarrow \;\Delta(H') = |E'| \;\Rightarrow\; \cap E' = \emptyset$.

(iii) Es sei G ein Graph und $x_1, \ldots, x_r \in V(G)$ mit $e_{x_i} \cap e_{x_j} \neq \emptyset$ für $1 \leq i, j \leq r$.

$x_i, x_j \in E(G) \;\; \forall\; i \neq j$

$\Rightarrow \{x_1, \ldots, x_r\}$ induziert eine Clique in G. Diese ist ebenfalls enthalten in einer maximalen Clique C.

$\Rightarrow C \in \bigcap\limits_{i=1}^{r} e_{x_i}$

Satz:

(1) $\chi(L(H)) = \chi'(H)$

(2) $\omega(\overline{L(H)} = \nu(H)$

Besitzt H die Helly-Eigenschaft, so gilt ferner:

(3) $\chi(\overline{L(H)}) = \tau(H)$

(4) $\omega(L(H)) = \Delta(H)$

Beweis:
(1) und (2) sind trivial.

(3) $\chi(\overline{L(H)})$ ist die minimale Anzahl von Cliquen, die man braucht, um alle Punkte von $L(H)$ zu überdecken.
Die Punkte von $L(H)$ sind die Kanten von H.
$E' \subseteq R(H)$ ist eine Clique in $L(H)$ $\Leftrightarrow$ $e \cap e' \neq \emptyset\ \forall\, e, e' \in E'$ $\overset{\text{Helly}}{\Leftrightarrow}$ $\cap E' \neq \emptyset$
$\Rightarrow$ $\chi(\overline{L(H)})$ ist die minimale Anzahl von Punkten (aus $V(H)$), die man braucht, um alle Kanten von H zu schneiden.

(4) $\omega(L(H))$ ist die max. Anzahl von Kanten in einer Menge $E' \subseteq E(H)$ mit $e \cup e' \neq \emptyset\ \forall\, e, e' \in E'$
Da jedes solche E' (wegen Helly) $\cap E' \neq \emptyset$ erfüllt, gilt: $|E'| \leq \Delta(H)$, also $\omega(L(H)) = \Delta(H)$.

Satz:
Es sei G ein Graph, H ein Hypergraph mit der Helly-Eigenschaft. Dann gilt:

(i) H ist normal $\Leftrightarrow$ $L(H)$ ist perfekt

(ii) G perfekt $\Leftrightarrow$ $CL(G)$ ist normal

(iii) H ist τ-normal $\Leftrightarrow$ $\overline{L(H)}$ ist perfekt

(iv) $\overline{G}$ ist perfekt $\Leftrightarrow$ $Cl(G)$ ist τ-normal

Beweis:

(i) Ein Teilhypergraph H' von H erfüllt $\chi'(H') = \Delta(H')$ $\Leftrightarrow$ der induzierte Untergraph $L(H')$ von $L(H)$ erfüllt die Gleichung $\chi(L(H')) = \omega(L(H'))$. [vgl.(1),(4)]

(ii) G perfekt $\Leftrightarrow$ $L(Cl(G))$ perfekt $\Leftrightarrow$ $Cl(G)$ normal

(iii) H τ-normal $\Leftrightarrow$ jeder Teilhypergraph H' erfüllt $\nu(H') = \tau(H')$ $\Leftrightarrow$ jeder entprechende induzierte Untergraph $\overline{L(H')}$ von $\overline{L(H)}$ erfüllt:
$\nu(H') \overset{(2)}{=} \omega(\overline{L(H')}) = \chi(\overline{L(H')} \overset{(3)}{=} \tau(H')$

(iv) $\overline{G}$ perfekt $\Leftrightarrow$ $\overline{L(Cl(G))}$ perfekt $\overset{(i),(ii)}{\Leftrightarrow}$ $Cl(G)$ τ-normal

Lemma:
Vervielfacht man Kanten eines normalen Hypergraphen, so ist der so konstruierte Hypergraph ebenfalls normal.

Beweis:
$\widetilde{H}$ entstehe aus H durch Vervielfachung von Kanten ($e \in E$ wird ersetzt durch $e_1, \ldots, e_{\nu(e)}$).
Dann entsteht $\overline{L(H)}$ aus $L(H)$ durch Substitution des vollständigen Graphen auf $\{e_1, \ldots, e_{\nu(e)}\}$ für e.
Die Behauptung folgt aus dem Substitutionssatz.

□

Beweis des Satzes von Lovász (Perfect Graph Theorem)

$$[G \text{ perfekt} \Leftrightarrow \overline{G} \text{ perfekt}]$$

Wir zeigen:

($*$) Ist ein Hypergraph normal, so ist er τ-normal.
Dann folgt aus dem vorherigen Satz:
G perfekt $\Rightarrow$ $Cl(G)$ normal $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $Cl(G)\tau$-normal $\Rightarrow$ $\overline{G}$ perfekt[16].
Also genügt uns zu zeigen: H normal $\Rightarrow$ $\nu(H) = \tau(H)$ (entspr. Behauptung für $H' \subseteq H$ analog)

<u>Beweis:</u> Durch Induktion über $k := \nu(H)$

Induktionsanfang:
$k = 0: \quad \nu(H) = \tau(H) = 0 \quad \surd$

Induktionsschluß:

(i) angenommen, es existiert ein $x \in V = V(H)$ mit $\nu \underbrace{(H - x)}_{\substack{=(V\backslash\{x\},\\ \{e\in E(H):x\notin e\}}} < \nu(H) = k$

Dann wählen wir ein Vertex-Cover $W \subseteq V\backslash\{x\}$ mit $|W| = k - 1$, so daß $e \cap W \neq \emptyset \;\; \forall\, e \in E(H - x)$ (Ind.Ann).
$W \cup \{x\}$ ist dann ein Vertex-Cover für H mit k Elementen.

$\square$

(ii) $\nu(H - x) = k \;\; \forall\, x \in V$
Zu jedem x wählen wir ein k-elementiges Matching E_x in $H - x$.
$\widetilde{E} := \bigcup\limits_{x \in V} E_x$ (Vereinigung von Multimengen)
$\widetilde{H} := (V, \widetilde{E})$ entsteht aus einem Teilhypergraphen von H durch Vervielfachung von Kanten, ist also normal (Lemma!), d.h. $\chi'(\widetilde{H} = \Delta(\widetilde{H})$
$\widetilde{H}$ hat $k \cdot |V|$ Kanten und $\nu(\widetilde{H}) = k$
$\Rightarrow \;\; \chi'(\widetilde{H}) \geq \frac{|\widetilde{E}|}{k} = \frac{k\cdot|V|}{k} = |V| \;\; \Rightarrow \;\; \Delta(\widetilde{H}) \geq |V|$
Andererseits ist ein $x \in V$ in höchstens einer Kante von E_y $(y \neq x)$ enthalten, aber nicht in E_x.
$\Rightarrow$ der Grad $d_{\widetilde{H}}(x) \leq |V| - 1 \;\; \forall\, x \in V$
$\Rightarrow$ Widerspruch zu $\Delta(\widetilde{H}) \geq |V|$

$\square$

[16] Es reicht, eine Implikation zu zeigen, da $G = \overline{\overline{G}}$

Kapitel 3

Promotionsaufgabe

Wer den folgenden Satz zu beweisen vermag, möge sich bitte umgehend mit Prof.Dr. Triesch in Verbindung setzen. Er braucht die Vordiplomsklausur dann nicht mehr mitzuschreiben, sondern kann sich bei ihm direkt zur Promotion anmelden. ;-)

3.1 Starke perfekte Graphen Vermutung (Berge 1961)

G ist perfekt $\Leftrightarrow$ G enthält keine induzierten ungeraden Kreise oder deren Komplement.

THE
END

Index