Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen
Institut für Geometrie und Praktische Mathematik

**Numerisches Rechnen — WS 2012/2013**

Prof. Dr. M. Grepl — J. Berger, P. Esser, L. Zhang

# Klausur Numerisches Rechnen (14.02.2013) (Musterlösung)

- Hilfsmittel: nur dokumentenechtes Schreibgerät (blau oder schwarz); genau ein Taschenrechner, der auf der Liste der erlaubten Taschenrechner steht; zwei beidseitig handbeschriebene Din-A4-Blätter
- kein eigenes Papier benutzen und nicht mit Blei-, Rot- oder Grünstift schreiben
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten
- Deckblätter ausfüllen und unterschreiben
- Aufgabenblätter kontrollieren: insgesamt sechs Aufgaben
- Studenten- und Lichtbildausweis zur Kontrolle bereitlegen
- keine vorzeitige Abgabe während der letzten 15 Minuten

Zum Bestehen der Klausur sind 40 der insgesamt 80 erreichbaren Punkte erforderlich. Die Klausurergebnisse werden voraussichtlich ab Freitag, den 22. Februar 2013, auf der Webseite zur Veranstaltung bekanntgegeben. Die Klausureinsicht findet am Montag, den 25. Februar 2013, von 14:00 – 16:00 Uhr im Raum 149 Hauptgebäude statt. Danach sind keine Einsprüche gegen die Korrektur mehr möglich. Die Klausur kann nach einer Aufbewahrungsfrist von 5 Jahren innerhalb von 3 Wochen am Institut für Geometrie und Praktische Mathematik abgeholt werden.

Matrikelnummer: ________________ Taschenrechner: ________________

Name: ________________ Vorname: ________________

Hiermit erkläre ich, dass ich keine anderen als die erlaubten Hilfsmittel benutze. Ferner nehme ich zur Kenntnis, dass bei Täuschungsversuchen, auch solchen zugunsten anderer, die Klausur als *nicht bestanden* bewertet wird.

Datum: ________________ Unterschrift: ________________

## Korrekturvermerke

| A 1 | A 2 | A 3 | A 4 | A 5 | A 6 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

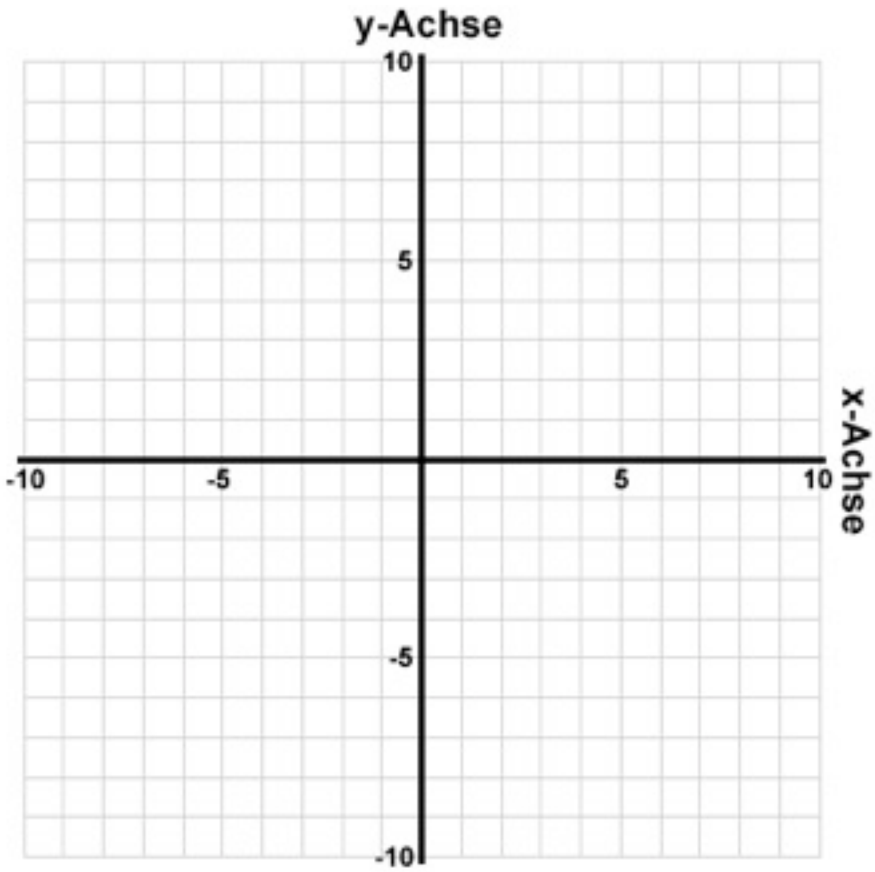
Numerik 1. Klausur RWTH Aachen WS 2012/ 2013
Prof. Grepl

**Aufgabe 1:** (23 Punkte)

a) Ist die Abbildung f: R(^2) -> R mit f((x1, x2)^T) I2x1I + I3x2I eine Norm?
b) 3 Eigenschaften von Maschinenzahlen
c) vollbesetze 3x3 die bei Gauß ohne Pivot versagt
d) Nenne zwei Verfahren zur Darstellung einer Interpolationsploynom in geschlossener Form und die Unterschiede der Verfahren
e) Was ist der Sinn/ Vorteil bei der Verwendung von iterativen Verfahren
f) symetrisch positiv definit, n x n welche Verfahren?

**Aufgabe 2:** (7 Punkte)

Folgende Matrix ist gegen 2x2 mit (3 4 -2.5 -2.5). Zeichne die a1 und a2 in ein Koordinatensystem ein und führe einen Schritt der Householderspiegelung aus. Zeichne die Spiegelungsachse ein und Beschrifte alles. Führe die Spiegelung am kostengünstigsten durch.



**Aufgabe 3**
Gegeben seien die Messwerte

| $t_i$ | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|
| $f_i$ | 0.2 | 0.7 | 0.6 |

die zu dem Bildungsgesetz

$$f(t) = e^{-\lambda(t-\alpha)^2}$$

gehören.

a) Stellen Sie das zugehörige nichtlineare Ausgleichsproblem zur Bestimmung der unbekannten Parameter $\lambda$ und $\alpha$ auf (Messwerte schon einsetzen!).

b) Für das Gauß-Newton-Verfahren seien die Startwerte $\alpha_0 = 3$, $\lambda_0 = 0.5$ gegeben. Wie lautet das lineare Ausgleichsproblem für den ersten Schritt? Setzen Sie die Mess-werte und Startwerte ein (Der erste Schitt muss nicht durchgeführt werden).

c) Lösen Sie stattdessen das lineare Ausgleichsproblem $||Ax - b||_2 \to \min$ für

$$A = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.7 \\ 0.6 & 0.6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad und \quad b = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 1.4 \end{pmatrix}$$

mittels Givens-Rotationen. Geben Sie den Wert des Residuums explizit an.

d) Betrachten Sie nun eine zu $b$ gestörte rechte Seite $\tilde{b}$ mit zugehöriger Lösung $\tilde{x}$, d.h. $\tilde{x}$ ist Minimum von $||A\tilde{x} - \tilde{b}||_2$ ($A$ und $b$ aus Teil c). Wie groß darf die relative Abweichung $||\tilde{b} - b||_2/||b||_2$ höchstens sein, damit der relative Fehler $||\tilde{x} - x||_2/||x||_2$ nicht größer als 0.05 ist? (Hinweis: $\kappa_2(A) \approx 7$).

**2+3+8+2=15 Punkte**

**Musterlösung**

a) Mit $x = (\lambda, a)$ lautet das nichtlineare Ausgleichsproblem

$$\|F(x)\|_2 = \|F(\lambda, a)\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} e^{-\lambda(1-a)^2} - 0.2 \\ e^{-\lambda(2-a)^2} - 0.7 \\ e^{-\lambda(4-a)^2} - 0.6 \end{pmatrix} \right\|_2 \to \min$$

b) Eine Zeile der Jakobischen zu $F$ lautet

$$\text{grad}_{[\lambda,a]}(f) = \begin{pmatrix} -(t-a)^2 \cdot e^{-\lambda\cdot(t-a)^2} & 2 \cdot \lambda \cdot (t-a) \cdot e^{-\lambda\cdot(t-a)^2} \end{pmatrix}$$

Da außerdem nach a) $F$ bekannt und somit

$$F(0.5, 3) =_3 \begin{pmatrix} -0.0647 \\ -0.0935 \\ 0.00653 \end{pmatrix}$$

ist, fehlt für den ersten Schritt ($\|F'(x_0) \cdot \Delta x_0 - (-F(x_0))\|_2 \to \min$) nur noch $F'(x_0)$:

$$F'(0.5, 3) =_3 \begin{pmatrix} -0.541 & -0.271 \\ -0.607 & -0.607 \\ -0.606 & 0.607 \end{pmatrix}$$

c)

$$\left( \, A \mid b \, \right) = \left( \begin{array}{cc|c} 0.8 & 0.7 & 0.5 \\ 0.6 & 0.6 & 1 \\ 1 & 2 & 1.4 \end{array} \right)$$

Spalte 1, Zeile 2 : $\quad r = \sqrt{0.8^2 + 0.6^2} = 1, \quad c = 0.8, \quad s = 0.6$

$$\left( \, A \mid b \, \right) \to \left( \, A \mid b \, \right)_1 = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0.92 & 1 \\ 0 & 0.06 & 0.5 \\ 1 & 2 & 1.4 \end{array} \right)$$

Spalte 1, Zeile 3: $\quad r = \sqrt{2}, \quad c = s = 1/\sqrt{2} = 0.7071$:

$$\left( \, A \mid b \, \right)_1 \to \left( \, A \mid b \, \right)_2 = \left( \begin{array}{cc|c} 1.4142 & 2.0648 & 1.697 \\ 0 & 0.06 & 0.5 \\ 0 & 0.7637 & 0.2828 \end{array} \right)$$

Spalte 2, Zeile 3: $\quad r = \sqrt{0.06^2 + 0.7637^2} = 0.7660, \quad c = 0.07833, \quad s = 0.9969$

$$\left( \, A \mid b \, \right)_2 \to \left( \, A \mid b \, \right)_3 = \left( \begin{array}{cc|c} 1.4142 & 2.0648 & 1.697 \\ 0 & 0.7660 & 0.3211 \\ 0 & 0 & -0.4763 \end{array} \right)$$

Durch Rückwärtseinssetzen erhalten wir $x = (0.5879, 0.4192)^T$ und das Residuum ist 0.4763.

d) Es gilt:

$$\frac{||\tilde{x} - x^*||_2}{||x^*||_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos(\Theta)} \frac{||\tilde{b} - b||_2}{||b||_2} \quad mit \quad \cos(\Theta) = \frac{||Ax^*||_2}{||b||_2} = \frac{\left|\left| \begin{pmatrix} 0.7638 \\ 0.6043 \\ 1.4264 \end{pmatrix} \right|\right|_2}{||b||_2} = \frac{1.7272}{1.7916}$$

$$\frac{||\tilde{x} - x^*||_2}{||x^*||_2} \leq \frac{\kappa_2(A)}{\cos(\Theta)} \frac{||\tilde{b} - b||_2}{||b||_2} \overset{!}{\leq} 0.05$$

$$\Rightarrow \frac{||\tilde{b} - b||_2}{||b||_2} \overset{!}{\leq} 0.05 \frac{\cos(\Theta)}{\kappa_2(A)} = 0.007$$

**Aufgabe 4**
Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & -0.8 \\ 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ -0.4 & 0.0 & 0.2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} -0.4 \\ 6.6 \\ -0.2 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die LR–Zerlegung von $A$ mit Spaltenpivotisierung, d.h. $PA = LR$, wobei $P$ eine geeignete Permutationsmatrix ist. Geben sie $P$, $L$ und $R$ explizit an.

b) Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ mit Hilfe der unter a) berechneten LR–Zerlegung.

c) Betrachten Sie nun das gestörte Gleichungssystem $\tilde{A}x = b$, wobei $\tilde{A}$ eine Störung von $A$ ist. Wie groß darf der relative Fehler in $A$ höchstens sein, damit der relative Fehler in $x$ (gemessen in der $||.||_1$-Norm) nicht größer als 3% ist? **Hinweis:** Für die Kondition von $A$ bzgl. der 1-Norm gilt $\kappa_1(A) \approx 15.56$.

**8+3+2=13 Punkte**

**Musterlösung**

a) Wir speichern die Permutation in einem Vektor, den wir an $A$ anhängen.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0.6 & 0.8 & -0.8 & 1 \\ 1.2 & 2.4 & 0.6 & 2 \\ -0.4 & 0.0 & 0.2 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|cc|c} 1.2 & 2.4 & 0.6 & 2 \\ \hline 0.5 & -0.4 & -1.1 & 1 \\ -1/3 & 0.8 & 0.4 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c|c|c} 1.2 & 2.4 & 0.6 & 2 \\ \hline -1/3 & 0.8 & 0.4 & 3 \\ \cline{2-2} 0.5 & -0.5 & -0.9 & 1 \end{array}\right)$$

Und somit

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0.5 & -0.5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} 1.2 & 2.4 & 0.6 \\ 0 & 0.8 & 0.4 \\ 0 & 0 & -0.9 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad P = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Wir benutzen $P$ für die Permutation von $b$ und erhalten:
Vorwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6.6 \\ -1/3 & 1 & 0 & -0.2 \\ 0.5 & -0.5 & 1 & -0.4 \end{array}\right) \Big\downarrow \rightarrow y = \begin{pmatrix} 6.6 \\ 2 \\ -2.7 \end{pmatrix}$$

Rückwärtseinsetzen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1.2 & 2.4 & 0.6 & 6.6 \\ 0 & 0.8 & 0.4 & 2 \\ 0 & 0 & -0.9 & -2.7 \end{array}\right) \Big\uparrow \rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

c) Aus der *Fehlerformel*

$$r_x \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \cdot r_A} \cdot r_A \overset{!}{\leq} \varepsilon$$

erhalten wir

$$r_A \leq \frac{\varepsilon}{(1 + \varepsilon) \cdot \kappa(A)} = \frac{0.03}{1.03 \cdot 15.56} = 0.001872 \approx 0.2\%$$

**Aufgabe 5**
Gegeben sei die 2D-Fixpunktgleichung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{y}{4} + \frac{(x-y)^2}{8} \\ \frac{x}{3} + \frac{1}{\pi}\cos\left(\pi\frac{x+y}{4}\right) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix} =: F(x,y).$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach, dass $F(x,y)$ in dem Bereich $E := [0,1] \times [0,1]$ einen eindeutigen Fixpunkt besitzt. Verwenden Sie die $\|\cdot\|_\infty$-Norm.

b) Führen Sie ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.2, 0.3)$ einen Fixpunktiterationsschritt durch.

c) Wie viele Iterationsschritte sind ausgehend vom Startwert $(x_0, y_0) := (0.2, 0.3)$ höchstens erforderlich, um den Fixpunkt in der $\|\cdot\|_\infty$-Norm bis auf einen Fehler von $\varepsilon := 10^{-3}$ anzunähern?

**5+1+3=9 Punkte**

**Musterlösung**

a) (i) $E$ ist abgeschlossen.

(ii) Selbstabbildung: Wegen $(x,y) \in [0,1]^2$ gilt $0 \le (x-y)^2 \le 1$ und $0 \le \cos\left(\pi\frac{x+y}{4}\right) \le 1$ und damit

$$0 \le F_1(x,y) = \frac{y}{4} + \frac{(x-y)^2}{8} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0.375$$
$$0 \le F_2(x,y) = \frac{x}{3} + \frac{1}{\pi}\cos\left(\pi\frac{x+y}{4}\right) \le \frac{1}{3} + \frac{1}{\pi} \approx 0.652 \le 0.66$$

Insgesamt gilt also $F(E) \subset \widetilde{E} := [0, 0.375] \times [0, 0.66] \subset E \Rightarrow F$ ist selbstabbildend auf $\widetilde{E} \subset E$.

(iii) Kontraktivität: $E$ ist konvex. Als Jacobi-Matrix ergibt sich

$$F'(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{4} & \frac{1}{4} - \frac{x-y}{4} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\sin\left(\pi\frac{x+y}{4}\right) & -\frac{1}{4}\sin\left(\pi\frac{x+y}{4}\right) \end{pmatrix}.$$

Wegen $(x,y) \in E = [0,1]^2$ gilt $|\frac{x-y}{4}| \le \frac{1}{4}$ sowie $|\frac{1}{4} - \frac{x-y}{4}| \le \frac{1}{2}$ und $\sin\left(\pi\,\frac{x+y}{4}\right) \ge 0$, so dass wir durch elementweise Betragsabschätzung (zulässig in der $\|\cdot\|_1$- und $\|\cdot\|_\infty$-Norm, nicht jedoch in der $\|\cdot\|_2$-Norm) erhalten:

$$\|F'(x,y)\|_\infty \le \left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \right\|_\infty = \max\left\{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right\} = \max\left\{\frac{3}{4}, \frac{7}{12}\right\} = \frac{3}{4} =: L < 1,$$

d.h. $F$ ist kontraktiv auf $E$.

Somit sind die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

*Bemerkung*: In $\widetilde{E} = [0, 0.375] \times [0, 0.66]$ gilt $|\frac{x-y}{4}| \leq \frac{0.66}{4} = 0.165$ sowie $|\frac{1}{4} - \frac{x-y}{4}| \leq \frac{1+0.66}{4} = 0.415$ und $\left|-\frac{1}{4}\sin\left(\pi\,\frac{x+y}{4}\right)\right| \leq \frac{1}{4}\sin\left(\pi\,\frac{0.375+0.66}{4}\right) = 0.1816$, und man erhält $\max\limits_{x,y\in\widetilde{E}} \|F'(x,y)\|_\infty \leq \max\left\{0.165+0.415\,,\ \frac{1}{3}+0.1816\right\} = \max\{0.58\,,\ 0.5149\} = 0.58 =: \widetilde{L} < 1$, d. h. durch die kluge Wahl von $\widetilde{E}$ statt $E$ erhält man eine erheblich bessere Kontraktionskonstante.

b)

$$\text{Startwert:} \qquad x^0 := \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.3 \end{pmatrix}$$

1.Schritt:

$$x^1 := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.3}{4} + \frac{0.1^2}{8} \\ \frac{0.2}{3} + \frac{1}{\pi}\cos\left(\pi\,\frac{0.2+0.3}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.07625 \\ 0.36075 \end{pmatrix}, \qquad x^1 - x^0 = \begin{pmatrix} -0.12375 \\ 0.06075 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt gemäß a-priori-Abschätzung

$$n \geq \frac{\ln \frac{\varepsilon(1-L)}{\|x^1 - x^0\|}}{\ln L} = \frac{\ln \frac{10^{-3}/4}{0.1238}}{\ln \frac{3}{4}} = 21.57.$$

Es sind also höchstens $n = 22$ Schritte erforderlich, um eine Genauigkeit von $\varepsilon := 10^{-3}$ zu erreichen.

*Bemerkung*: Mit $\widetilde{L}$ folgt $n \geq 10.44$, d. h. in Wahrheit reichen sogar schon $n = 11$ Schritte.

**Aufgabe 6**
Für das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} e^{\cos x} dx$$

sollen numerisch Näherungen bestimmt werden.

a) Wie viele Unterteilungen ($n$) des Intervalls $[-1, 1]$ werden mit der
   (i) summierten Mittelpunktregel,
   (ii) summierten Trapezregel,

   höchstens benötigt, um eine Genauigkeit von $\varepsilon = 10^{-3}$ zu erreichen? Schätzen Sie dazu die entsprechende Ableitung ab, ohne Extrema zu benutzen.

b) Berechnen Sie für die summierten Simpsonregel die Näherung zum obigen Integral mit $n = 2$ und schätzen Sie den Fehler ab.
   **Hinweis:** Für $f(x) = e^{\cos x}$ gilt $\max_{\xi\in\mathbb{R}}|f^{(4)}(\xi)| = 4 \cdot e$

**6+5=11 Punkte**

**Musterlösung**

a) Die Ableitungen sind

$$f(x) = e^{\cos x} \to f'(x) = -\sin(x)e^{\cos x} \to f''(x) = (\sin^2 x - \cos x)e^{\cos x}$$

Damit kann man die zweite Ableitung abschätzen mit

$$|f''(x)| \leq 2\,e \qquad \left(\text{besser: } |f''(x)| \leq \underbrace{(\sin^2(1) + 1)}_{<1.71}\, e\right)$$

   (i) Für den Fehler der summierten Mittelpunktsregel (auf $[-1, 1]$) gilt:

$$f_M \leq \frac{1}{24} h_M^2 (1 - (-1)) \max_{x\in[-1,1]} |f''(x)| \leq \frac{1}{24} h_M^2 4\,e \overset{!}{\leq} 10^{-3} \to h_M \leq 0.0469817$$

   Und somit

$$n_M \geq \frac{1 - (-1)}{0.0469817} = 42.6.. \to n_M = 43$$

   (ii) Für den Fehler der summierten Trapezpunktsregel (auf $[-1, 1]$) gilt:

$$f_T \leq \frac{1}{12} h_T^2 (1 - (-1)) \max_{x\in[-1,1]} |f''(x)| \leq \frac{1}{12} h_T^2 4\,e \overset{!}{\leq} 10^{-3} \to h_T \leq 0.0332211$$

   Und somit

$$n_T \geq \frac{1 - (-1)}{0.0332211} = 60.2.. \to n_T = 61$$

b)

$$n = 2 \quad \text{und} \quad h_S = 1$$

$$\begin{aligned}
I_S &= \frac{h_S}{6}(e^{\cos(-1)} + 4e^{\cos(-0.5)} + 2e^{\cos(0)} + 4e^{\cos(0.5)} + e^{\cos(1)}) \\
&= \frac{1}{6}(1.7165257 + 4 \cdot 2.405078545 + 2 \cdot e + 4 \cdot 2.405078545 + 1.7165257) \\
&= \frac{1}{3}(1.7165257 + 4 \cdot 2.405078545 + e) \\
&= 4.68504057 \approx 4.685
\end{aligned}$$

Für den Fehler der summierten Simpsonregel (auf $[-1, 1]$) gilt:

$$f_S \leq \frac{1}{2880} h_S^4 (1 - (-1)) \max_{x \in [-1,1]} |f^{(4)}(x)| \leq \frac{1}{2880} 8\, e \leq 7.55078 \cdot 10^{-3}$$