Lösungswege für

Differentialgleichungen und Numerik

bei Professor Esser

Sommersemester 2000

RWTH-Aachen

verfaßt von

Sandip Sar-Dessai

Dieses Dokument wurde erstellt mit LYX Version 1.1.4fix3 und enthält Lösungswege zu den verschiedenen Aufgabentypen, die in der Vorlesung Differentialgleichungen und Numerik bei Professor Esser im Sommersemester 2000 vorgestellt wurden.

Die hier präsentierten Beispielaufgaben sind die Übungsaufgaben aus dem Sommersemester 2000. Für die Richtigkeit der Ergebnisse kann ich natürlich keine Gewährleistung geben, das gleiche gilt für die angegebenen Verfahren. Falls Du jedoch Fehler finden solltest, so sag mir bitte Bescheid, damit ich sie in der nächsten Version korrigieren kann.

Die aktuelle - weitestgehend fehlerbereinigte - Version dieses Dokuments läßt sich jederzeit von meiner Homepage runterladen.

Für Kritik, Verbesserungsvorschläge und insbesondere Korrekturen bin ich jederzeit offen.

Vorlesungsseite (SS 2000) mit Übungen, Klausuren, Musterlösungen:

`http://www.igpm.rwth-aachen.de/~shadrin/diffnum00/u00.html`

Sandip Sar-Dessai

Download und Kontakt
Homepage: http://www.sandip.de
E-Mail: mails@sandip.de

1. Auflage, 6. April 2001

Inhaltsverzeichnis

1 Differentialgleichungen **1**

1.1 Differentialgleichungen erster Ordung . . . 1

1.1.1 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen . . . 1

1.1.2 Homogene Differentialgleichungen . . . 2

1.1.3 Differentialgleichungen der Form $y' = f(ax + by + c)$ . . . 3

1.1.4 Differentialgleichungen der Form $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$ . . . 3

1.1.5 Lineare Differentialgleichungen . . . 4

1.1.6 Bernoulli-Differentialgleichungen . . . 4

1.2 Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung . . . 5

1.2.1 Fundamentalsystem und Wronski-Matrix zu $y' = Ay$ . . . 5

1.2.2 Homogene und inhomogene Dgl-Systeme . . . 6

1.3 Differentialgleichungen höherer Ordnungen . . . 7

1.3.1 Fundamentalsystem und Wronski-Matrix . . . 7

1.3.2 Inhomogene Differentialgleichungen . . . 8

2 Numerik **11**

2.1 Numerische Lösungsverfahren . . . 11

2.1.1 Reduktion auf ein System erster Ordnung . . . 11

2.1.2 Runge-Kutta-Verfahren . . . 11

2.1.3 Trapezregel . . . 12

2.1.4 Euler-Cauchy-Verfahren . . . 12

2.2 Differenzengleichungen n-ter Ordnung . . . 13

2.3 Newton-Verfahren . . . 14

2.3.1 Ungedämpftes Newton-Verfahren . . . 14

2.3.2 Gedämpftes Newton-Verfahren . . . 14

2.3.3 Newton-Verfahren für Gleichungssysteme . . . 14

2.4 Polynominterpolation . . . 15

2.4.1 Lagrange-Polynominterpolation . . . 15

2.4.2 Newton-Polynominterpolation 16
2.4.3 Interpolationsfehler 17
2.4.4 Datenapproximation (Normalgleichungen) 17
2.4.5 Datenapproximation (QR-Zerlegung) 18
2.5 Lösungsverfahren für Gleichungssystemen 18
2.5.1 Die LR-Zerlegung 18
2.5.2 Cholesky-Zerlegung 19
2.5.3 Einzelschrittverfahren 20
2.5.4 Gesamtschrittverfahren 21

3 Klausuren Sommersemester 2000 **23**
3.1 Scheinklausur 23
3.2 Vordiplomsklausur 24

Kapitel 1

Differentialgleichungen

1.1 Differentialgleichungen erster Ordung

1.1.1 Differentialgleichungen mit getrennten Variablen

Aufgabentyp: $y' = f(x)g(y)$. Bestimme allgemeine Lösung (bzw. Lösung des AWP).

1. Berechnung trivialer Lösungen $C \in \mathbb{R}$ mit $g(C) = 0$.
$$g(C) = 0 \Rightarrow y \equiv C \text{ ist Lösung}$$
2. Trennung der Variablen:
$$y'(x) = f(x)g(y) \Rightarrow \int \frac{1}{g(y)}\,dy = \int f(x)\,dx + C \Rightarrow \ldots \Rightarrow y(x) = y(x, C),\ C \in \mathbb{R}$$
Hinweis: Man kann in einer Lösung mehrere $C_i \in \mathbb{R}$ verwenden: steht in der Gleichung bspw. aC_1 für ein $a \in \mathbb{R}$, so kann man dies auch durch C_2 ersetzen, vgl. Beispiel 2.
3. AWP: Berechnung der Konstante C durch Einsetzen der Anfangswerte (x_0, y_0) in die Funktion $y(x)$ und Umformen nach C. Ist $y_0 = C$ mit $g(C) = 0$, so ist $y \equiv C$ ebenfalls Lösung.
4. Maximaler Existenzbereich ist größtes Intervall um x_0 ohne Unstetigkeitsstellen.

Beispiel 1: $y' = -2xy^2$, also $f(x) = 2x$, $g(y) = -y^2$

1. Triviale Lösungen: $g(y) = 0 \Leftrightarrow -y^2 = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ ist triviale Lösung.
2. Trennung der Variablen
$$y' = -2xy^2 \Rightarrow \int -\frac{1}{y^2}\,dy = \int 2x\,dx \Rightarrow \frac{1}{y} = x^2 + C \Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2 + C},\ C \in \mathbb{R}$$
3. Anfangswertprobleme (und Existenzbereiche):
   (a) $y(2) = 0$. Triviale Lösung ist $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. Da $0 = \frac{1}{4+C}$ keine Lösung hat, gibt es keine weiteren Lösungen.
   (b) $y(2) = \frac{1}{3}$. Aus $\frac{1}{3} = \frac{1}{4+C}$ folgt, daß $C = -1$. Damit ist $y = \frac{1}{x^2-1}$, $x \in (-1; 1)$ Lösung.

(c) $y(2) = -\frac{1}{5}$. Analog folgt $C = -9$, also Lösung $y = \frac{1}{x^2-9}$, $x \in (-3; 3)$.

(d) $y(2) = \frac{1}{5}$. Analog folgt $C = 1$, also Lösung $y = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Beispiel 2: $y' = y^{\frac{2}{3}}$, also $f(x) = 1$, $g(y) = y^{\frac{2}{3}}$

1. Triviale Lösungen: $g(y) = 0 \Leftrightarrow y^{\frac{2}{3}} = 0 \Rightarrow y \equiv 0$ ist triviale Lösung.

2. Trennung der Variablen:

$$y' = y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow \int \frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}\, dy = \int dx \Rightarrow 3y^{\frac{1}{3}} = x + C_1 \Leftrightarrow y = \left(\frac{x+C}{3}\right)^3, C, C_1 \in \mathbb{R}$$

3. Anfangswertprobleme (und Existenzbereiche):

   (a) $y(1) = 0$: Triviale Lösung ist $y \equiv 0$, $x \in \mathbb{R}$. Einsetzen von $(0, 1)$ ergibt $C = -1$, also ist auch $y = \left(\frac{x-1}{3}\right)^3$, $x \in \mathbb{R}$ Lösung.

   (b) $y(1) = 1$: Einsetzen ergibt $C = 2$, also ist $y = \left(\frac{x+2}{3}\right)^3$, $x \in \mathbb{R}$ Lösung.

1.1.2 Homogene Differentialgleichungen

Aufgabentyp: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Bestimme allgemeine Lösung (bzw. Lösung des AWP).

1. Substitution:
$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}(f(u) - u)$$

2. Lösung von u' analog zu 1.1.1 (Pkte 1 und 2).

3. Resubstitution: $y = ux$

4. Anfangswertprobleme und Existenzbereiche analog zu 1.1.1 (Pkte 3 und 4)

Beispiel 1: $y' = \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y} = \frac{1}{2}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{-1}$, also $f(u) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2u}$

1. Substitution: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}\left(\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2u}\right) - u\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1-u^2}{2u}\right)$

2. Triviale Lösungen $u \equiv \pm 1$, Nach Trennung der Variablen: $u = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{xC}}$, $c \in \mathbb{R}$

3. Resubstitution: $y = ux \Rightarrow y \equiv x \vee y \equiv -x \vee y = \pm x\sqrt{1 - \frac{1}{xC}}$

4. AWP $y(\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$: $\frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{2}{C}} \Rightarrow C = \frac{1}{4}$, also $y = x\sqrt{1 - \frac{4}{x}}$, $x \in \setminus \{4\}$

1.1.3 Differentialgleichungen der Form $y' = f(ax + by + c)$

Aufgabentyp: $y' = f(ax + by + c)$. Bestimme allgemeine Lösung (bzw. Lösung des AWP).

1. Substitution:
$$u = ax + by + c \Rightarrow u'(x) = a + bf(u)$$
2. Lösung von u' analog zu 1.1.1 (Pkte 1 und 2).
3. Resubstitution $y = \frac{u-ax-c}{b}$
4. Anfangswertprobleme und Existenzbereiche analog zu 1.1.1 (Pkte 3 und 4)

Beispiel 1: $y' = (x - y)^2$, also $a = 1, b = -1, c = 0, f(u) = u^2$

1. Substitution: $u = x - y \Rightarrow u' = 1 + -(u^2) = 1 - u^2$
2. Triviale Lösungen $u \equiv \pm 1$, nach Trennung der Variablen: $u = \tanh(x + C)$
3. Resubstitution $(y = x - u)$: $y = x + 1 \vee y = x - 1 \vee y = x - \tanh(x + C)$
4. AWP $y(0) = 0$: Einsetzen ergibt $C = 0$, also $y = x - \tanh(x + C)$, $x \in \mathbb{R}$ ist Lösung.

1.1.4 Differentialgleichungen der Form $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$

Aufgabentyp: $y' = f\left(\frac{ax+by+c}{dx+ey+f}\right)$. Bestimme allgemeine Lösung (bzw. Lösung des AWP).

1. Beachte Einschränkung der mögl. Lösungen durch den Nenner!
2. Falls $ae - bd = 0$, liegt ein anderer Typ vor, ansonsten weiter.
3. Berechne LGS $ax + by + c = 0$, $dx + ey + f = 0$. Sei (x_0, y_0) Lösung.
4. Setze $x = t + x_0$, $y = u + y_0$. Dann ist $u' = f\left(\frac{(a(t+x_0)+b(u+y_0)+c)\frac{1}{t}}{(d(t+x_0)+e(u+y_0)+f)\frac{1}{t}}\right)$.
5. Lösung der Dgl. nach 1.1.2.
6. Resubstitution: $t = x - x_0$, $u = y - y_0$
7. Anfangswertprobleme und Existenzbereiche analog zu 1.1.1 (Pkte 3 und 4)

Beispiel 1: $y' = -\frac{y-1}{y+x}$, also $a = 0, b = 1, c = -1, d = 1, e = 1, f = 0, f(u) = -u$

1. Einschränkung: $y + x = 0 \Leftrightarrow y = -x$ kann nicht Lösung sein.
2. Lösung des LGS $y - 1 = 0$, $y + x = 0$ ergibt $y_0 = 1$, $x_0 = -1$.
3. Substitution $x = t - 1$, $y = u + 1$ ergibt $u' = -\frac{(u)\frac{1}{t}}{(u+t)\frac{1}{t}} = -\frac{\frac{u}{t}}{\frac{u}{t}+1}$.
4. Lösung von u' ist $u = 0 \vee u = -2t \vee u = -t \pm \sqrt{t^2 + C}$.
5. Resubstituion $t = x + 1$, $u = y - 1$ ergibt $y \equiv 1 \vee y = -2x - 1 \vee y = -x \pm \sqrt{(x + 1)^2 + C}$
6. AWP $y(0) = 2$: Einsetzen ergibt $C = 3$, also $y = -x \pm \sqrt{(x + 1)^2 + 3}$, $x \in \mathbb{R}$ ist Lösung

1.1.5 Lineare Differentialgleichungen

Aufgabentyp: $y' = f(x)y + g(x)$. Bestimme allgemeine Lösung (bzw. Lösung des AWP).

1. Berechnung der homogenen Lösung:
$$y'(x) = f(x)y \;\Rightarrow\; y_h = P(x)C$$
2. Berechnung der partiellen Lösung (Variation der Konstanten):
$$C'(x)P(x) = g(x) \;\Rightarrow\; y_p = Q(x) + C$$
3. Allgemeine Lösung:
$$y(x) = [Q(x) + C]\, P(x)$$
4. Anfangswertprobleme und Existenzbereiche analog zu 1.1.1 (Pkte 3 und 4)

Beispiel 1: $y' = -y \tan x + \cos x$, also $f(x) = -\tan x$, $g(x) = \cos x$

1. Homogene Lösung: $y' = -y \tan x \;\Rightarrow\; -\int \frac{1}{y}\, dy = \int \tan x \, dx \;\Rightarrow\; y = \cos x \cdot C$, $C \in \mathbb{R}$
2. Partielle Lösung ($P(x) = \cos x$): $C'(x) \cdot \cos x = \cos x \;\Rightarrow\; C(x) = \int 1 \, dx \; = x + C$, $C \in \mathbb{R}$
3. Allgemeine Lösung ($P(x) = \cos x$, $Q(x) = x$): $y = (x + C) \cdot \cos x$, $x \in \mathbb{R}$
4. AWP $y(0) = 0$: Einsetzen ergibt $C = 0$, also $y(x) = x \cos x$, $x \in \mathbb{R}$

Beispiel 2: $y' = -y + x$, also $f(x) = -1$, $g(x) = x$

1. Homogene Lösung: $y' = -y \;\Rightarrow\; y = e^{-x} \cdot C$
2. Partielle Lösung ($P(x) = e^{-x}$): $C'(x)e^{-x} = x \;\Rightarrow\; C(x) = \int e^x x \, dx = e^x(x-1) + C$
3. Allg. Lösung ($P(x) = e^{-x}$, $Q(x) = e^x(x-1)$): $y(x) = (e^x(x-1) + C)e^{-x} = (x-1) + Ce^{-x}$
4. AWP $y(0) = -1$: Einsetzen ergibt $C = 0$, also $y(x) = (x-1)$, $x \in \mathbb{R}$

1.1.6 Bernoulli-Differentialgleichungen

Aufgabentyp: $y' = f(x)y + g(x)y^\alpha$, $\alpha \neq 1$. Bestimme allgemeine Lösung (bzw. Lösung des AWP).

1. Substitution $u = y^{1-\alpha} \;\Rightarrow\; u'(x) = (1-\alpha)f(x)u + (1-\alpha)g(x)$
2. Lösung der linearen Dgl. nach 1.1.5.
3. Resubstitution: $y = u^{\frac{1}{1-\alpha}}$
4. Weitere Lösungen:
   - Falls $\alpha > 0$, so ist auch $y \equiv 0$ Lösung
   - Falls α gerade, ist mit y auch $y^\star = -y$ Lösung
   - Falls α ungerade, so ist sind auch negative $u^{\frac{1}{1-\alpha}}$ als Lösung erlaubt
5. Anfangswertprobleme und Existenzbereiche analog zu 1.1.1 (Pkte 3 und 4)

Beispiel 1: $y' = \frac{y}{2x} + \frac{x}{2y}$, also $f(x) = \frac{1}{2x}$, $g(x) = \frac{x}{2}$, $\alpha = -1$

1. Substitution: $1 - \alpha = 2$, $u = y^2 \Rightarrow u'(x) = 2\frac{1}{2x}u + 2\frac{x}{2} = \frac{1}{x}u + x$
2. Lösung der linearen Dgl. ist $u = (x + C) \cdot x = x^2 + Cx$, $C \in \mathbb{R}$
3. Resubstitution: $y = \sqrt{u} \Rightarrow y = \pm\sqrt{x^2 + Cx}$
4. AWP $y(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$: Einsetzen ergibt $C = 8$, also $y(x) = \sqrt{x^2 + 8x}$, $x \in [0; \infty)$ ist Lösung

Beispiel 2: $y' = \frac{y}{x} + y^{2000}$, also $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = 1$, $\alpha = 2000$

1. Substitution: $1 - \alpha = -1999$, $u = y^{-1999} \Rightarrow u'(x) = -1999\frac{1}{x}u - 1999$
2. Lösung der linearen Dgl. ist $u = (C - 1999x)\frac{1}{2000}$
3. Resubstitution: $y =^{-1999} \sqrt{u} \Rightarrow y =^{-1999} \sqrt{(C - 1999x)\frac{1}{2000}}$
4. AWP $y(1) = 1$: Einsetzen ergibt $C = 1$, also $y =^{-1999} \sqrt{(1 - 1999x)\frac{1}{2000}}$ ist Lösung.

1.2 Lineare Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

1.2.1 Fundamentalsystem und Wronski-Matrix zu $y' = Ay$

Aufgabentyp: Sei $y' = Ay$. Bestimme Fundamentalsystem und Wronski-Matrix.

1. Bestimmen des charakteristischen Polynoms von A, Ausrechnen der Eigenwerte (EW).
2. Berechnen aller Hauptvektoren (Eigenvektoren erster Stufe) aus den Eigenwerten (wähle hierfür jeweils einen beliebigen Vektor aus $Kern(A - \lambda E)$, E ist dabei die Einheitsmatrix)
3. ggf. Berechnen von Eigenvektoren (EV) höherer Stufen zu den Hauptvektoren, deren Nullstellen die Vielfachheit k haben mit $k > 1$, und zwar als Vektoren aus den Kernen $Kern(A - \lambda E)^2$, ..., $Kern(A - \lambda E)^k$.
4. Für alle EV $\overrightarrow{v_i} =: \overrightarrow{v_k}$ der Stufe k (höhere Stufen $\overrightarrow{v_1}, ..., \overrightarrow{v_{k-1}}$) mit Nullstelle λ gibt es $y_i(t)$:
$$y_i(t) = e^{\lambda t} \cdot \left[\sum_{p=1}^{k-1} \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}(A - \lambda E)^p \cdot \overrightarrow{v_p} \right]$$
5. Ein Fundamentalsystem ist dann $FS = \{y_1(t), ..., y_n(t)\}$
6. Die Wronski-Matrix ist $W(t) = (\, y_1(t) \;...\; y_n(t)\,)$

Beispiel 1: Finde Fundamentalsystem und Wronski-Matrix zu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Das char. Polynom ist $\chi = \det(A - \lambda E) = (1 - \lambda)^2(-1 - \lambda)$, also EW $\lambda_{12} = 1$, $\lambda_3 = -1$.
2. Für $\lambda_1 = 1$ ergibt sich $Kern(A - \lambda_1 E) = \langle (0, 2, 1)^T \rangle$, also ist $(0, 2, 1)^T$ Hauptvektor
Für $\lambda_2 = 1$ ergibt sich $Kern(A - \lambda_2 E)^2 = \langle (1, 0, 0)^T \rangle$, also ist $(1, 0, 0)^T$ EV (2. Stufe)
Für $\lambda_3 = -1$ ergibt sich $Kern(A - \lambda_3 E) = \langle (2, -2, 1)^T \rangle$, also ist $(2, -2, 1)^T$ Hauptvektor

3. Es ergeben sich folgende y_k:
   Für $(1,0,0)^T$, 1. Stufe: $y_1(t) = e^t \cdot (0,2,1)^T$
   Für $(0,2,1)^T$, 2. Stufe: $y_2(t) = e^t \cdot \big((1,0,0)^T + t(0,2,1)^T\big) = e^t \cdot (1,2t,t)^T$
   Für $(2,-2,1)^T$, 1. Stufe: $y_3(t) = e^t \cdot (2,-2,1)^T$

4. Fundamentalsystem: $FS = \big\{(0,2e^t,e^t)^T,\ (e^t,2te^t,te^t)^T,\ (2e^{-t},-2e^{-t},e^{-t})^T\big\}$

5. Wronski-Matrix: $W(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 2e^{-t} \\ 2e^t & 2te^t & -2e^{-t} \\ e^t & te^t & e^{-t} \end{pmatrix}$

1.2.2 Homogene und inhomogene Dgl-Systeme

Aufgabentyp: $y'(t) = Ay(t) + F(t)$. Bestimme Lösung des AWP $y(t_0) = y_0$.

1. Wronski-Matrix zu $y' = Ay$ nach 1.2.1 berechnen

2. Allgemeine Lösung zu $y' = Ay$ (nur falls $y_0 \neq 0$, sonst $y_a \equiv 0$)
   (a) Berechne $\overrightarrow{c_0}$ als Lösung von $\overrightarrow{y_0} = W(t_0) \cdot \overrightarrow{c_0}$
   (b) Allg. Lösung ist dann $y_a(t) = W(t) \cdot \overrightarrow{c_0}$

3. Spezielle Lösung zu $y' = Ay + F(t)$ (nur wenn $y_0 = 0$ und $F(t) \neq 0$, sonst $y_s \equiv 0$)
   (a) Berechne $C'(x)$ als Lösung von $W(x) \cdot C'(x) = F(x)$
   (b) Berechne $C(x) = \int_{t_0}^{t} C'(x)\,dx$
   (c) Spezielle Lösung ist dann $y_s(t) = W(t) \cdot C(t)$

4. Die Lösung des Dgl-System für das AWP lautet dann

$$y(t) = y_a(t) + y_s(t) = W(t) \cdot (C(t) + \overrightarrow{c_0})$$

Beispiel 1: $y' = Ay$, $y(0) = (-1,0,-1)^T$ (wobei A wie in Beispiel zu 1.2.1)

1. Wronski-Matrix wie in Beispiel zu 1.2.1.

2. Berechnung von $\overrightarrow{c_0}$ für $t_0 = 0$, $y_0 = (-1,0,-1)^T$ mittels LGS ergibt $\overrightarrow{c_0} = (-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2})$, nach Ausmultiplizieren mit $W(t)$ ergibt sich $y_a(t) = -e^t \cdot \big(e^{-2t},\ 1 - e^{-2t},\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{2t}\big)^T$.

3. Lösung ist also $y(t) = y_a(t)$.

Beispiel 2: $y' = Ay + (0,4e^t,0)$, $y(0) = 0$

1. Wronski-Matrix wie in Beispiel zu 1.2.1.

2. Lösung von $W(t) \cdot C'(t) = F(t)$ mit $F(t) = (0,4e^t,0)$ ergibt $C'(t) = \big(1 - 2t,\ 2,\ -e^{2t}\big)^T$.

3. Hieraus ergibt sich $C(t) = \int_0^t C'(x)\,dx = \big(t - t^2,\ 2t,\ -\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}\big)^T$.

4. Die spezielle Lösung (für y' die Lösung) ist

$$y(t) = y_s(t) = C(t) \cdot W(t) = \begin{pmatrix} 0 & e^t & 2e^{-t} \\ 2e^t & 2te^t & -2e^{-t} \\ e^t & te^t & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t - t^2 \\ 2t \\ -\frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3: $y' = Ay + (0, 4e^t, 0)$, $y(0) = (-1, 0, -1)$

1. Die ersten Schritte entsprechen den vorangegangenen Aufgaben, lediglich die allgemeine (Bsp1) und spezielle (Bsp2) Lösung müssen addiert werden:

$$y(t) = y_a(t) + y_s(t) = W(t) \cdot (C(t) + \overrightarrow{c_0}) = e^t \begin{pmatrix} 0 & e^t & 2e^{-t} \\ 2e^t & 2te^t & -2e^{-t} \\ e^t & te^t & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t - t^2 - \frac{1}{2} \\ 2t \\ -\frac{1}{2}e^{2t} - 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 4: $y' = Ay + F$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $F(t) = \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix}$, $y(0) = \begin{pmatrix} t \\ 2t+1 \end{pmatrix}$

1. Char. Polynom ist $\chi = \det(A - \lambda E) = \lambda^2 - 1$, also Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.
2. Eigenvektoren: Aus den Kernen von $A \pm E$ wählt man bspw. $\overrightarrow{v_1} = (1,1)^T$, $\overrightarrow{v_2} = (1,2)^T$.
3. Man erhält $y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ e^t \end{pmatrix}$, $y_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}$, also Wronski-Matrix $W(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}$.
4. Für die homogene Lösung berechnet man $\overrightarrow{c_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $y_a(t) = W(t) \cdot \overrightarrow{c_0} = \begin{pmatrix} e^t - e^{-t} \\ e^t - 2e^{-t} \end{pmatrix}$.
5. Spezielle Lösung: Man erhält $C(t) = \int_0^t \begin{pmatrix} -e^{-x} \\ e^x(x+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} - 1 \\ te^t \end{pmatrix}$, $y_s(t) = W(t) \cdot C(t)$.
6. Die allgemeine Lösung lautet dann $y(t) = y_a(t) + y_s(t) = \begin{pmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} - 2 \\ te^t + 1 \end{pmatrix}$.

1.3 Differentialgleichungen höherer Ordnungen

1.3.1 Fundamentalsystem und Wronski-Matrix

Aufgabentyp: $L(y) = y^{(n)} + y^{(n-1)}a_{n-1} + ... + a_1 y' + a_0 = 0$. Bestimme FS und Wronski-Matrix.

1. Bestimmen der zugehörigen char. Gleichung p_λ (λ^k statt $y^{(k)}$) und derer Nullstellen.
2. Ein Fundamentalsystem ist dann $S = \{y_1(t), ..., y_n(t)\}$, wobei $y_i(t)$ wie folgt bestimmt wird:
   - bei k-fachen Nullstellen füge $t^i e^{\lambda t}$ hinzu, also $S = \left\{e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, ..., t^k e^{\lambda t}\right\} \cup S_{Rest}$
   - bei komplexer Nullstelle $\lambda = a \pm bi$ erweitere wie folgt: $S = \{e^{at}\cos bt, e^{at}\sin bt\} \cup S_{Rest}$
3. Die Wronski-Matrix wird daraus berechnet als $W(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & ... & y_n(t) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & ... & y_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$.

Beispiel 1: Fundamentalsystem zu $y''' - y'' - 6y' = 0$

1. $p_\lambda = \lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda$ liefert Nullstellen $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$
2. Fundamentalsystem: $FS = \left\{1, e^{3t}, e^{-2t}\right\}$

Beispiel 2: Fundamentalsystem zu $y''' - 3y'' + 3y' - y$

1. $p_\lambda = \lambda^3 - e\lambda^2 + 3\lambda - 1$ liefert Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$
2. Fundamentalsystem: $FS = \{e^t, te^t, t^2e^t\}$

Beispiel 3: Fundamentalsystem zu $y'' - 2y' + 2y = 0$

1. $p_\lambda = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ liefert Nullstelle $\lambda = 1 \pm i$
2. Fundamentalsystem: $FS = \{e^t \cos t, e^t \sin t\}$

1.3.2 Inhomogene Differentialgleichungen

Aufgabentyp: $L(y) = f(t)$. Bestimme Lösung des AWP $y(t_0) = y_0$, ..., $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

1. Partikuläre Lösung von $L(y) = 0$ (nur falls $t_0 \neq 0$, ansonsten $y_a = 0$): Ist das Fundamentalsystem (siehe 1.3.1) $S = \{y_1(t), ..., y_n(t)\}$, so ist $y_a(t) = c_1y_1(t) + ... + c_ny_n(t)$, $c_i \in \mathbb{C}$.
2. Die spezielle Lösung wird nur berechnet, falls $f(t) \neq 0$. Ist $f(t) = 0$, ist $y_s = 0$. Es gibt zwei Lösungsvarianten, wobei die zweite eine spezielle Form von $f(t)$ erfordert:
   (a) $f(t) \neq 0$ beliebig: Mit der Wronski-Matrix $W(t)$ (Berechnung siehe 1.3.1), $F(t) = (0, ..., 0, f(t))^T \in \mathbb{C}^n$ sowie t_0 wird die spezielle Lösung wie in Abschnitt 1.2.2 (Pkt 3) berechnet.
   (b) $f(t) = e^{\lambda t} \cdot r(t)$ mit $r(t)$ Polynom: Lsg ist $y_s(t) = e^{\lambda t} \cdot q(t)$, $q(t) = b_kt^k + ... + b_0$, wobei:
      - q hat gleichen Grad wie r, bei mehrfachen Nullstellen um die Vielfachheit dieser Nullstellen höher (also bspw. $grad(q) = grad(r) + 2$ für eine Nullstelle Vielfachheit 2 hat, vgl. auch Beispiel 2).
      - Bestimmen der Koeffizienten durch Ableiten der allgemeinen Form und Einsetzen in die Differentialgleichung (vgl. Beispiel 2)
3. Die Lösung des AWP ist $y(t) = y_a(t) + y_s(t)$, wobei die ggf. vorhandenen Koeffizienten $c_i \in \mathbb{C}$ nach Berechnung von $y(t_0), ..., y^{(n-1)}(t_0)$ über das LGS $y(t_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ (wobei die y_i das AWP geben) ermittelt werden können.

Beispiel 1: $y'' - 2y' + y = -\frac{e^t}{t^2}$, $y(1) = y'(1) = 0$

1. $\lambda^2 - 2\lambda + 1$ liefert 2fache Nullstelle $\lambda_{12} = 1$, also Fundamentalsystem $FS = \{e^t, te^t\}$.
2. Mit $(e^t)' = e^t$ und $(te^t)' = (t+1)e^t$ ist die Wronski-Matrix $W(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix}$.
3. Spezielle Lösung: Mit $W(t)$ und $F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{e^t}{t^2} \end{pmatrix}$ wird $C(t) = \int_1^t \begin{pmatrix} \frac{1}{t} \\ -\frac{1}{t^2} \end{pmatrix} dx = \begin{pmatrix} \ln|t| \\ \frac{1}{t} - 1 \end{pmatrix}$.
4. Die Lösung ist dann: $y(t) = W(t) \cdot C(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t \\ e^t & 2e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln|t| \\ \frac{1}{t} - 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel 2: $y''' - y'' - y' + y = 4e^t$, $y(0) = 2, y'(0) = 1, y''(0) = 6$

1. Man erhält $FS = \{e^t, te^t, e^{-t}\}$ und die Wronski-Matrix: $W(t) = \begin{pmatrix} e^t & te^t & e^{-t} \\ e^t & (t+1)e^t & -e^{-t} \\ e^t & (t+2)e^t & e^{-t} \end{pmatrix}$.

2. Partikuläre Lösung: $y_a(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 e^{-t}$, $c_i \in \mathbb{R}$

3. Spezielle Lösung: Als Ansatz wird gewählt $y_s = e^t \cdot q(t) = e^t(at^2 + bt + c)$.

   - Als Ableitungen erhält man $y_s'(t) = e^t \cdot (at^2 + (2a+b)t + (b+c))$, $y_s''(t) = e^t \cdot (at^2 + (4a+b)t + (2b+c))$ und $y_s'''(t) = e^t(at^2 + (6a+b)t + (4a+3b+c))$.
   - Nach Aufgabe muß $y_s'''(t) - y_s''(t) - y_s'(t) + y_s(t) = 4e^t$ sein, somit erhält man aus $4ae^t = 4e^t$ die Koeffizienten $a = 1, b = c = 0$, und somit $q(t) = t^2$, also $y_s(t) = q(t) \cdot e^t = 4t^2e^t$.

4. Die Lösung lautet also $y(t) = y_a(t) + y_s(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + c_3 e^{-t} + t^2 e^t$ mit $c_i \in \mathbb{R}$.

5. Mit $y(0) = c_1 + c_3 = 2$, $y'(0) = c_1 + c_2 - c_3 = 1$ und $y''(0) = c_1 + 2c_2 + c_3 = 4$ erhält man die Lösung $c_1 = c_2 = c_3 = 1$, und somit die Lösung des AWP $y(t) = e^t + te^t + e^{-t} + t^2 e^t$.

Kapitel 2

Numerik

2.1 Numerische Lösungsverfahren

2.1.1 Reduktion auf ein System erster Ordnung

Aufgabentyp: $y^{(n)}+f_{n-1}(x)y^{n-1}+...+f_1(x)y = f_0(x)$, Anfangswerte $y(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Reduziere auf ein System erster Ordnung.

1. Bilde den Vektor $z(x) = \left(y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right)^T$
2. Aus den Anfangswerten wird der Anfangsvektor bestimmt: $z(x_0) := (y_1, ..., y_{n-1})$
3. Der Vektor $z(x)$ wird abgeleitet: $f(x,z) := (x, z'(x)) = \left(x,\ \left(y'(x), ..., y^{(n)}(x)\right)^T\right)$.

Beispiel 1: Reduziere $y'' - xy' + y = 3$, $y(0) = 3, y'(0) = 2$ auf ein System erster Ordnung

1. Setze $z(x) := (y_1(x), y_2(x))^T =: (z_1, z_2)^T$, aus den Anfangswerten erhält man $z(0) = (3,2)^T$.
2. Durch Umformung erkennt man $y'' = xy' - y + 3$, und somit
$$z'(x) = (y'(x),\ xy' - y + 3)^T = (z_2,\ xz_2 - z_1 + 3)^T$$
3. Letztendlich ist also $f(x,z) = (x, (z_2, xz_2 - z_1 + 3)^T)^T$ mit $f(x_0, z_0) = (0, (3,2)^T)^T$.

2.1.2 Runge-Kutta-Verfahren

Aufgabentyp: gegeben $y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + f_1(x)y = f_0(x)$, Anfangswerte $y(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Approximiere $y(x_0^\star), ..., y^{(n-1)}(x_0^\star)$ mit Schrittweite h.

1. Reduziere die Dgl auf ein System erster Ordnung $f(x,z)$, $z(x_0) = z_0$, siehe 2.1.1.
2. Approximiere $z(x_0^\star)$, beginnend mit x_0 bis $x_n = x_0^\star$, durch Iteration folgender Schritte:
   (a) $k_1 = f(x_k, y_k)$
   (b) $k_2 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1)$
   (c) $k_3 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_2)$

(d) $k_4 = f(x_k + h, y_k + hk_3)$

(e) $x_{k+1} = x_k + h$ und $y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4)$

Beispiel 1: $y'' - xy' + y = 3$, AW $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$. Approx. $y(1), y'(1)$, Schrittweite $h = 1$.

1. Reduktion: $f(x, z) = (x, (y'', xy'' - y' + 3)^T)^T$, $f(x_0, z_0) = (0, (3, 2)^T)^T$, vgl. Bsp. zu 2.1.1.
2. Es ist $k_1 = f(0, (3, 2)^T)^T = (2, 0)^T$, analog erhält man $k_2 = k_3 = k_4 = (2, 0)^T$.
3. Weiterhin erhält man $x_1 = x_0 + h = 1$ und $z_1 = (3, 2)^T + \frac{1}{6}(12, 0)^T = (5, 2)^T$.
4. Damit ist $x = 1$ erreicht, und $(y(1), y'(1)) = z_1 = (5, 2)$, also $y(1) \approx 5$ und $y'(1) \approx 2$.

2.1.3 Trapezregel

Aufgabentyp: gegeben $y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + f_1(x)y = f_0(x)$, Anfangswerte $y(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Approximiere $y(x_0^\star), ..., y^{(n-1)}(x_0^\star)$ mit Schrittweite h.

1. Reduziere die Dgl auf ein System erster Ordnung $f(x, z)$, $z(x_0) = z_0$, siehe 2.1.1.
2. Approximiere $z(x_0^\star)$, beginnend mit x_0 bis $x_n = x_0^\star$, durch Iteration folgendes Schrittes:

$$x_{k+1} = x_k + h \qquad y_{k+1} = y_k + \frac{1}{2}h\left[f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1})\right]$$

Beispiel 1: $y''' = x^2y'' + xy' - 4y + 4$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 2$. Approximiere $x = 1$ mit Schrittweite $h = 1$.

1. Reduktion ergibt $f(x, z) = (x, (y', y'', x^2y'' + xy' - 4y + 4)^T)^T$, $z_0 = (0, (1, 2, 2)^T)^T$.
2. Mit dem LGS $z_1 = (1, 1, 2)^T + (\frac{1}{2}y', \frac{1}{2}y'', \frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' - 2y + 2)^T$ ergibt sich $z_1 = (2, 2, 2)$.
3. Damit ist $x = 1$ erreicht, und $(y(1), y'(1), y''(1))^T \approx (2, 2, 2)^T$.

2.1.4 Euler-Cauchy-Verfahren

Aufgabentyp: gegeben $y^{(n)} + f_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + f_1(x)y = f_0(x)$, Anfangswerte $y(x_0) = y_1$, ..., $y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Approximiere $y(x_0^\star), ..., y^{(n-1)}(x_0^\star)$ mit Schrittweite h.

1. Reduziere die Dgl auf ein System erster Ordnung $f(x, z)$, $z(x_0) = z_0$, siehe 2.1.1.
2. Approximiere $z(x_0^\star)$ ab x_0 bis $x_n = x_0^\star$, durch Iteration einer der folgenden Schritte:
   - einfaches Euler-Cauchy-Verfahren (ECV): $y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k)$
   - rückwärtiges ECV: $y_{k+1} = y_k + hf(x_{k+1}, y_{k+1})$ (Lösung mittels LGS)
   - verbessertes ECV: $k_1 = f(x_k, y_k)$, $k_2 = f(x_k + \frac{1}{2}h, y_k + \frac{1}{2}hk_1)$, $y_{k+1} = y_k + hk_2$

   Dabei ist stets $x_{k+1} = x_k + h$.

Beispiel 1: $y''(x) = 2y(x) - xy'(x)$, $y(2) = 5, y'(2) = 4$. Approx. $y(3), y'(3)$, Schrittweite $h = 1$.

1. Reduktion der Ordnung ergibt $f(x,z) = (x,(y',2y-xy')^T)^T$, $(x_0,z_0)^T = (2,(5,4)^T)^T$
2. Eines der folgenden Verfahren:
   (a) Euler-Cauchy: $z_{k+1} = (9,6)^T$
   (b) rückwärtiges E.-C.-V.: $z_{k+1} = (5,4)^T + (y',2y-3y'')^T = (\text{LGS})... = (12,7)^T$
   (c) verbessertes E.-C.-V.: $k_1 = (4,2)^T$, $k_2 = (5,\frac{3}{2})^T$, $z_{k+1} = (10,\frac{11}{2})^T$
3. Damit ist $y(3) \approx 9$ (bzw. 12 oder 10) und $y'(3) \approx 6$ (bzw. 7 oder $\frac{11}{2}$).

2.2 Differenzengleichungen n-ter Ordnung

Aufgabentyp: Löse $\sum_{k=0}^n a_k u_{j+k} = b$ mit $j = 0,1,...$ und $u_0 = a_0$, ..., $u_{n-1} = a_{n-1}$.

1. Stelle das charakteristische Polynom auf: $p_\lambda = \sum_{k=0}^n a_k\lambda^k$.
2. Sei λ eine Nullstelle der Vielfachheit m, dann gilt:
$$FS = FS_{Rest} \cup \left\{ \left(\lambda^j\right)_{j=0}^\infty, \left(j\lambda^{j-1}\right)_{j=0}^\infty, ..., \left(\begin{pmatrix} j \\ m-1 \end{pmatrix} \lambda^{j-m+1}\right)_{j=0}^\infty \right\}$$
3. Sind (a_1), (a_2), ..., (a_n) die Folgen des FS, gilt für die allgemeine Lösung:
$$u_a = c_1(a_1) + ... + c_n(a_n)$$
4. Spezielle Lösung (nur falls $b \neq 0$; ist $b = 0$, ist $u_s = 0$):
   (a) Suche kleinstes $l_0 \geq 0$, so daß $\sum_{k=0}^n a_k\lambda^{l_0} \neq 0$ ist.
   (b) Die spezielle Lösung ist dann $u_s = b \cdot \left(\sum_{k=0}^n a_k\lambda^{l_0}\right)^{-1}$
5. Die Lösung ist dann $u_n = u_a + u_s$. Die Konstanten c_i können dabei durch Einsetzen der Startwerte in u_n mittels LGS ermittelt werden.

Beispiel 1: $u_{j+2} - 5u_{j+1} + 6u_j = 0$, $u_0 = u_1 = 1$. Bestimme die Lösung.

1. Char. Polynom ist $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$, also Nullstellen $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$.
2. Ein Fundamentalsystem ist dann $FS = \left\{(3^j)_{j=0}^\infty, (2^j)_{j=0}^\infty\right\}$.
3. Die allgemeine Lösung ist dann $u_n = c_1 3^n + c_2 2^n$.
4. Durch Einsetzen der Startwerte in u_n erhält man $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, also $u_n = -3^n + 2^{n+1}$.

Beispiel 2: Löse $u_{j+4} - 9u_{j+3} + 30u_{j+2} - 44u_{j+1} + 24u_j = 0$, $u_0 = 0, u_1 = -1, u_2 = -2, u_3 = 1$.

1. Char. Polynom ist $\lambda^4 - 9\lambda^3 + 30\lambda^2 - 44\lambda + 24$, Nullstellen $\lambda = 2$ (Vfh. 3), $\lambda = 3$
2. Ein Fundamentalsystem ist dann $FS = \left\{(2^j)_{j=0}^\infty, (j2^{j-1})_{j=0}^\infty, (\begin{pmatrix} j \\ 2 \end{pmatrix} 2^{j-2})_{j=0}^\infty, (3^j)_{j=0}^\infty\right\}$
3. Daraus erhält man: $u_n = c_1 2^n + c_2 n 2^{n-1} + c_3 \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} 2^{n-2} + c_4 3^n$. Über LGS erhält man $c_1 = -1$, $c_2 = -2$, $c_3 = 1$, $c_4 = 1$, also
$$u_n = -(n+1) \cdot 2^n + \begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix} 2^{n-2} + 3^n$$

2.3 Newton-Verfahren

2.3.1 Ungedämpftes Newton-Verfahren

Aufgabentyp: Approximiere in n Schritten eine Nullstelle von $f(x)$, ausgehend von x_0.

1. Berechne die Nullstelle durch n-faches Iterieren (ausgehend von $k = 0$) mittels

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

2. Dadurch erhält man x_n als eine Näherung der Nullstelle.

Anmerkung: Bei ungünstigem x_0 wird keine Näherung ermittelt (vgl. Beispiel).

Beispiel 1: Approximiere von 2 (2,1) aus eine Nullstelle von $f(x) = \frac{x^2-\frac{1}{2}}{x^2+\frac{1}{2}}$ (5 Schritte).

x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	$-1,9375$	$1,6346$	$-0,4726$	$-0,6843$	$-0,7068$
$2,1$	$-2,4710$	$5,0220$	$-58,2812$	$98923,5$	$-4,84E14$

2.3.2 Gedämpftes Newton-Verfahren

Aufgabentyp: Approximiere in n Schritten eine Nullstelle von $f(x)$, ausgehend von x_0.

1. Iteriere n-mal folgende Schritte, ausgehend von $k = 0$:
   (a) Setze $d_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
   (b) Wähle r minimal, so daß $\left|f(x_k + \frac{1}{2^r} d_k)\right| \leq |f(x_k)|$ ($r = 0, 1, ...$ ausprobieren)
   (c) Berechne $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{2^r} d_k$
2. Dadurch erhält man x_n als eine Näherung der Nullstelle.

Beispiel 1: Approximiere von 3 aus eine Nullstelle von $f(x) = \frac{x^2-\frac{1}{2}}{x^2+\frac{1}{2}}$ (5 Schritte).

	1. Schritt	2. Schritt	3. Schritt	4. Schritt	5. Schritt	
x_i	3	$-1,4861$	$-0,7067$	$-0,7071$	$-0,7071$	$-0,7071$
d_i	$-13,4583$	$1,55695$	$0,00053$	$-2E-7$	$-7,07E-14$	
$f(x_i)$	$0,94595$	$0,79663$	$0,334$	$0,33333$	$0,33333$	
r	2	1	0	0	0	

2.3.3 Newton-Verfahren für Gleichungssysteme

Aufgabentyp: Approximiere in m Schritten die Lösung des nichtlin. GS $\vec{f}$ (ausgehend von $\vec{a_0}$).

1. Setze $F(x_1, x_2, ..., x_n)^T = \vec{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)^T$.

2. Berechne $F'(x_1, x_2, ..., x_n)^T = \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & ... & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{df_n}{dx_1} & ... & \frac{df_n}{dx_n} \end{pmatrix}$.

3. Iteriere den folgenden m-mal (ausgehend von $k = 0$) die folgenden Schritte:

   (a) Berechne ausgehend $\overrightarrow{a_k}$ die Werte $F(\overrightarrow{a_k})$ sowie $F'(\overrightarrow{a_k})$.

   (b) Löse das LGS $\overrightarrow{\Delta a_k} = \frac{F(\overrightarrow{a_k})}{F'(\overrightarrow{a_k})} \Leftrightarrow F'(\overrightarrow{a_k}) \cdot \overrightarrow{\Delta a_k} = F(\overrightarrow{a_k})$.

   (c) Setze $\overrightarrow{a_{k+1}} = \overrightarrow{a_k} + \overrightarrow{\Delta a_k}$

Anmerkungen:

- Man kann versuchen, ausgehend von einem Startwert x eine Formel für den nächsten Wert zu finden, und dadurch die Lösung per Grenzwertberechnung zu approximieren. Hierbei ist es oft ratsam, zunächst einige "normale" Schritte durchzuführen, um eine Systematik zu erkennen. Manchmal ist die Approximation gefordert.
- Das Verfahren kann durch Austauschen der Schritte (3b) und (3c) in ein gedämpftes Verfahren umgewandelt werden, vgl. 2.3.2.

Beispiel 1: Approx. die Lsg. des GS $\frac{8}{3}x^3 + \frac{1}{2}y^2 - x = \frac{1}{4}, 2x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ von $(0, -1)$ aus (2 Schritte).

1. $F(x, y)^T = \begin{pmatrix} \frac{8}{3}x^3 - x + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4} \\ 2x^2 + y^2 - \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $F'(x, y)^T = \begin{pmatrix} 8x^2 - 1 & y \\ 4x & 2y \end{pmatrix}$

2. 2-malige Iteration (ausgehend von $(x_0, y_0) = (0, -1)$):

   (a) $F\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $F'\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \Delta x_0 \\ \Delta y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$

   (b) $F\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{16} \\ \frac{1}{32} \end{pmatrix}$, $F'\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{24} \end{pmatrix}$

   Es ergibt sich also $(x_2, y_2) = (0, -\frac{17}{24})$.

2.4 Polynominterpolation

2.4.1 Lagrange-Polynominterpolation

Aufgabentyp: Bilde das Interpolationspolynom (IP) auf Basis der Stützstellen $(x_i; y_i)$, $0 \leq i \leq n$.

1. Bilde Lagrange-Grundpolynome für alle Stützstellen x_i:

$$l_i := \frac{\Pi_{a=0;a\neq i}^{n}(x - x_a)}{\Pi_{a=0;a\neq i}^{n}(x_i - x_a)}$$

2. Die Lagrange-Darstellung des Interpolationspolynom n-ten Grades ist dann:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot l_i = f(x_0)l_0 + ... + f(x_n)l_n$$

Beispiel 1: Berechne das IP $p(x)$ dritten Grades zu $(0;-3)$, $(1,-3)$, $(2,-1)$, $(3,9)$.

1. Lagrange-Grundpolynome:

$$\begin{aligned} l_0 &= \tfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)} = -\tfrac{1}{6}(x^3-6x^2+11x-6) \\ l_1 &= \tfrac{x(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)} = \tfrac{1}{2}(x^3-5x^2+6x) \end{aligned}$$

   Analog erhält man auch $l_2 = -\frac{1}{2}(x^3-4x^2+3x)$ und $l_3 = \frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x)$.

2. Das Lagrange-Polynom dritten Grades ist dann $L_3 = -3l_0 - 3l_1 - l_2 + 9l_3 = x^3 - 2x^2 + x - 3$

2.4.2 Newton-Polynominterpolation

Aufgabentyp: Bilde das Interpolationspolynom (IP) auf Basis der Stützstellen $(x_i;y_i)$, $0 \le i \le n$.

1. Stelle Tabelle der dividierenden Differenzen auf:

$$\begin{array}{ll} x_0 & f(x_0) \\ x_1 & f(x_1) \end{array}\Bigg\} \quad \begin{array}{c} \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \\ \ldots \end{array}\Bigg\} \quad \ldots$$
$$\begin{array}{ll} \vdots & \vdots \\ x_n & f(x_n) \end{array}$$

2. Sei die oberste Reihe der Differenzentabelle die Folge $a_n = \left(f(x_0), \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}, \ldots\right)$. Dann ist das Newton-Interpolationspolynom n-ten Grades:

$$p_n(x) = a_1 + a_2(x-x_0) + a_3(x-x_0)(x-x_1) + \ldots + a_n(x-x_0)\cdot\ldots\cdot(x-x_{n-1})$$

Beispiel 1: Berechne das IP $p(x)$ dritten Grades zu $(0;-3)$, $(1,-3)$, $(2,-1)$, $(3,9)$.

1. Tabelle der dividierenden Differenzen:

$$\begin{array}{llllll} 0 & -3 & & & \\ & & \frac{-3+3}{1-0}=0 & & \\ 1 & -3 & & \frac{2-0}{2-0}=1 & \\ & & \frac{-1+3}{2-1}=2 & & \frac{4-1}{3-0}=1 \\ 2 & -1 & & \frac{10-2}{3-1}=4 & \\ & & \frac{9+1}{3-2}=10 & & \\ 3 & 9 & & & \end{array}$$

2. Newton-Polynom 3. Grades: $p(x) = -3 + 0x + 1(x)(x-1) + 1(x)(x-1)(x-2) = x^3 - 2x^2 + x - 3$

Beispiel 2: Berechne das IP $q(x)$ dritten Grades zu $(-1;1)$, $(1,-3)$, $(2,-1)$, $(3,9)$.

1. Tabelle der dividierenden Differenzen:

$$\begin{array}{lllll} -1 & 1 & & & \\ & & -2 & & \\ 1 & -3 & & \frac{4}{3} & \\ & & 2 & & \frac{2}{3} \\ 2 & -1 & & 4 & \\ & & 10 & & \\ 3 & 9 & & & \end{array}$$

2. Newton-Polynom 3. Grades: $q(x) = 1 - 2(x+1) + \frac{4}{3}(x+1)(x-1) + \frac{2}{3}(x+1)(x-1)(x-2)$

Beispiel 3: Berechne das IP $r(x)$ vierten Grades zu $(-1;1)$, $(0,-3)$, $(1,-3)$, $(2,-1)$, $(3,9)$.

1. Tabelle der dividierenden Differenzen:

-1	1				
		-4			
0	-3		2		
		0		$\frac{1}{3}$	
1	-3		1		$\frac{1}{3}$
		2		1	
2	-1		4		
		10			
3	9				

2. Newton-Polynom 4. Grades:

$$r(x) = 1-4(x+1)+2x(x+1)-\frac{1}{3}x(x+1)(x-1)+\frac{1}{3}x(x+1)(x-1)(x-2) = \frac{1}{3}x^4-x^3+\frac{5}{3}x^2+\frac{1}{3}x-3$$

2.4.3 Interpolationsfehler

Aufgabentyp: Bestimme den maximalen bzw. minimalen Interpolationsfehler (IF) von $f(x)$ im Punkt x_0 auf Basis der Stützstellen $(x_i; y_i)$, $1 \leq i \leq n$.

1. Der Fehler ist: $|f(x_0) - p_n(x_0)| = \frac{|f^{(n)}(\zeta)|}{n!} \cdot w(x_0)$ mit $w(x) = |(x-x_1)(x-x_2) \cdot \ldots \cdot (x-x_n)|$
   - Bei linearer Abschätzung ist $n = 2$, bei quadratischer Abschätzung ist $n = 3$
   - $\zeta \in [x_1; x_n]$ ist so gewählt, daß $f^{(n)}(\zeta)$ maximal bzw. minimal wird (je nach Aufgabe)
   - Wird der IF in einem Intervall $[a;b]$ ermittelt, so wird in der Formel statt das x_0 so gewählt, daß der IF maximal bzw. minimal ist.

Beispiel 1: Zeige, daß der IF von $f(x) = \int_0^x \ln(2-\sin t)dt$ bei Berechnung von $f(0,85)$ mit den Stützstellen $0,8$ und $0,9$ (linear) $> \frac{1}{3200}$ sowie mit $0,8$, $0,9$ und $1,0$ (quadratisch) $> \frac{1}{3200}$ ist.

1. Ableitungen: $f'(x) = \ln(2-\sin x)$, $f''(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 2}$, $f'''(x) = \frac{2\sin x - 2}{(2-\sin x)^2}$
2. Linearer Interpolationsfehler ist größer als $\frac{1}{3200}$:

$$|f(0,85) - p(0,85)| = \frac{1}{2!}\,|f''(\zeta)|\,|(0,85-0,8)(0,85-0,9)| > \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{20}\frac{1}{20} = \frac{1}{3200}$$

3. Quadratischer Interpolationsfehler ist kleiner als $\frac{1}{3200}$:

$$|f(0,85) - p(0,85)| = \frac{1}{3!}\,|f'''(\zeta)|\,|(0,85-0,8)(0,85-0,9)(0,85-1)| \leq \frac{1}{6}1\frac{1}{20}\frac{1}{20}\frac{3}{20} = \frac{1}{16000}$$

2.4.4 Datenapproximation (Normalgleichungen)

Aufgabentyp: Bestimme a_i optimal (bzgl. kl. Fehlerquadrate) bei Meßwerten (x_i, y_i) für $f(x)$.

1. Berechne $g(\overrightarrow{a}) = f(x_i) - y_i$ für alle Meßwerte $(x_i; y_i)$.
2. Erstelle aus diesen Funktionen A und $\overrightarrow{c}$, wobei $A \cdot \overrightarrow{a} = \overrightarrow{c}$ gelten muß.
3. Löse das System $A^T A \overrightarrow{x} = A^T \overrightarrow{c}$. Der Vektor $\overrightarrow{x}$ enthält die Werte für $\overrightarrow{a}$, so daß die Fehlerquadratsumme $\sum_{i=0}^{n}(p(x_i) - y_i)^2$ minimal wird.

Beispiel 1: Zu den Meßwerten $(-3;1),(0;5+\sqrt{2}),(1;7)$ für f wähle a,b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate, wobei f einem Bildungsgesetz der Form $f(t)=at+b\cos(\frac{\pi}{4}t)+5$ genügt.

1. Durch Einsetzen von x_i und y_i erhält man: $-3a+b\cos(-\frac{3}{4}\pi)=-4$, $b=\sqrt{2}$, $a+b\cos\frac{\pi}{4}=2$.
2. Man erhält: $\begin{pmatrix} -3 & \cos(-\frac{3}{4}\pi) \\ 0 & 1 \\ 1 & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{c}=\begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix}$.
3. Aus $A^TA\overrightarrow{x}=A^T\overrightarrow{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 10 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} 14 \\ 4\sqrt{2} \end{pmatrix}$ berechnet man $\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$.
4. Also wird die Fehlerquadratsumme minimal für $a=1$ und $b=\sqrt{2}$, $f(t)=t+\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}t)+5$.

2.4.5 Datenapproximation (QR-Zerlegung)

Aufgabentyp: Bestimme a_i optimal (bzgl. kl. Fehlerquadrate) bei Meßwerten (x_i,y_i) für $f(x)$.

1. Erstelle aus den Gleichungen das überbestimmte System $A\overrightarrow{a}=\overrightarrow{c}$.
2. Mit der Zerlegung $A=QR$ berechnet man $R\overrightarrow{x}=Q^T\overrightarrow{c}$ und erhält in $\overrightarrow{x}$ die (im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) optimalen Werte für $\overrightarrow{a}$.

Beispiel 1: Zu den Meßwerten $(-1;1),(0;1),(1;-1)$ für f wähle a,b optimal im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate mit Hilfe der QR-Zerlegung $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, wobei f einem Bildungsgesetz der Form $f(t)=at+b(1+t-t^2)$ gehorcht.

1. Für $A(a,b)^T=\overrightarrow{c}$ erhält man die $A=QR$ wie in der Aufgabe sowie $\overrightarrow{c}=(1,1,-1)^T$.
2. Berechnung von $R\overrightarrow{x}=Q^T\overrightarrow{c}$ ergibt $(-2,1)^T$, also ist die optimale Lösung $a=-2$, $b=1$ und somit $f(t)=1-t-t^2$

2.5 Lösungsverfahren für Gleichungssystemen

Siehe hierzu auch das Newton-Verfahren für Gleichungssysteme (2.3.3)

2.5.1 Die LR-Zerlegung

Aufgabentyp: Löse das LGS $Ax=b$ mit Hilfe der LR-Zerlegung.

1. Bringe die Matrix A durch elementare Zeilenumformungen (außer Zeilenmultiplikationen) auf obere Dreiecksform. Die resultierende Matrix ist R.
2. Teile jedes Element a_{ij} unterhalb der Diagonalen a_{kk} mit dem darüber stehenden Diagonalenelement, also $a'_{ij}=\frac{a_{ij}}{a_{jj}}$. Ersetze danach die Diagonalenelemente durch Einsen und alle Elemente darüber durch Nullen. Die resultierende Matrix ist L.
3. Es gilt $Ax=LRx=b$, Lösung in zwei Schritten: $Ly=b$ und $Rx=y$.

4. Ist die LR-Zerlegung durchführbar, dann ist $\det A = \det R = \Pi r_{ii}$; ergibt sich hier $\det R = 0$, hat $Ax = b$ entweder keine oder unendlich viele Lösungen, ist $\det R \neq 0$, hat $Ax = b$ genau eine Lösung.

Anmerkung: Meist führt man die Berechnung von L und R gleichzeitig durch, indem man (analog zum Gauß-Verfahren) zunächst die weiter unten liegenden Elemente eliminiert (die resultierende Matrix wird nur für die weiter rechts liegenden Elemente eingetragen), und danach anstatt der nun entstandenen Nullen im unteren Teil die R-Ergebnisse hinschreibt. Die L- und R-Bereiche trennt man durch eine gestrichelte Linie ab. Dies wird im unteren Beispiel gezeigt, jedoch wird anstatt der Trennlinie jedes L-Element mit einem Stern gekennzeichnet.

Beispiel 1: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 17 & 3 \\ 4 & 31 & 5+\alpha \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5+\beta \end{pmatrix}$. Gib die Lösungsanzahl für das LGS $Ax = b$ (in Abhängigkeit von α, β) und ggf. die Lösungen an.

1. Umformung: $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 17 & 3 \\ 4 & 31 & 5+\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2^\star & 7 & 1 \\ 2^\star & 21 & 3+\alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 2^\star & 7 & 1 \\ 2^\star & 3^\star & \alpha \end{pmatrix}$, also ist $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$
2. Fallunterscheidung nach α und β:
   - Keine Lösung für $\alpha = 0, \beta \neq 0$
   - Unendlich viele Lösungen für $\alpha = 0, \beta = 0$; Lösungsmenge: $x_1 = \frac{1}{2}(1 - c - \frac{5-5c}{7})$, $x_2 = \frac{1-c}{7}$, $x_3 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$
   - Eine Lösung für $\alpha \neq 0$, Berechnung der Lösung mit LR-Methode:
     (a) $Ly = b$ ergibt $y_1 = 1$, $y_2 = 3 - 2y_1 = 1$, $y_3 = 5 + \beta - 3 - 2 = \beta$
     (b) $Rx = y$ ergibt $x_3 = \frac{\beta}{\alpha}$, $x_2 = \frac{1-\frac{\beta}{\alpha}}{7}$, $x_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha} - \frac{1-\frac{\beta}{\alpha}}{7}\right)$

2.5.2 Cholesky-Zerlegung

Aufgabentyp: Löse das LGS $Ax = b$ mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung.

1. Existiert eine LR-Zerlegung (vgl. 2.5.1, insb. Pkt 2), so ist $A = LDL^T$. Dabei ist $D = diag(R)$, also eine Matrix mit der gleichen Diagonale wie R und sonst nur Nullen.
2. Definitheit (nur bei symmetrischen Matrizen): Betrachte $\det D = \Pi d_{ii}$.
   - A ist positiv (semi-positiv) definit $\Leftrightarrow d_{ii} > 0$ ($d_{ii} \geq 0$) $\forall i$
   - A ist negativ (semi-negativ) definit $\Leftrightarrow d_{ii} < 0$ ($d_{ii} \leq 0$) $\forall i$
   - A ist indefinit $\Leftrightarrow d_{ii}d_{jj} < 0$ für ein i, j
3. Lösung eines LGS in drei Schritten: $Ly = b$, $Dz = y$, $L^T x = z$.
4. Ist $\det D \neq 0$, so heißt A regulär, ist $\det D = 0$, so heißt A singulär.

Beispiel 1: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 6 \\ 4 & a+9 & a^2+a-4 & -a+11 \\ -2 & a^2+a-4 & a^3+a^2+4 & -(a^2+a+10) \\ 6 & -a+11 & -(a^2+a+10) & a+31 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \\ 20 \\ -44 \end{pmatrix}$. Ist A definit? Bestimme die Lösung von $Ax = b$ für $a = 1$.

1. Es gilt: $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & a & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $D = diag(2, a+1, 2, 4)$, $L^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & a & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. An D kann man ablesen: L pos. definit, falls $a > -1$, L neg. definit, falls $a < -1$.

3. Schrittweises Lösen von $LDL^Tx = Ax = b$ für $a = 1$:

   (a) $Ly = b$ ergibt $y_1 = -8$, $y_2 = 8$, $y_3 = 4$, $y_4 = -4$

   (b) $Dz = y$ ergibt $z_1 = -4$, $z_2 = 4$, $z_3 = 2$, $z_4 = -1$

   (c) $L^Tx = z$ ergibt $x_1 = -7$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1$

2.5.3 Einzelschrittverfahren

Aufgabentyp: Nähere die Lsg. des LGS $Ax = b$ (von $x^0 = (x_1^0, ..., x_1^n)^T$ aus) in m Schritten an.

1. Iteriere folgenden Schritt n-mal, ausgehend von $j = 0$:

   (a) Für alle Komponenten x_i^j, $i = 1, 2, ..., n$ berechne x_i^{j+1} wie folgt:

$$x_i^{i+1} = -\frac{1}{a_{ii}}\left(\sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k^{j+1} + \sum_{k=i+1}^{n} a_{ik}x_k^j - b_i\right)$$

   Schematisch ergibt sich dadurch für eine $3x4$-Matrix $(A|b)$:

$$\begin{matrix} x_1^{j+1} = \\ x_2^{j+1} = \\ x_3^{j+1} = \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} Vorfaktor: -\frac{1}{a_{11}} & +a_{12}x_2^j & +a_{13}x_3^j & -b_1 \\ +a_{21}x_1^{j+1} & Vorfaktor: -\frac{1}{a_{22}} & +a_{23}x_3^j & -b_2 \\ +a_{31}x_1^{j+1} & +a_{32}x_2^{j+1} & Vorfaktor: -\frac{1}{a_{33}} & -b_3 \end{array}\right)$$

   (Es gilt dann: $x^{j+1} = x^j - (D+L)^{-1}(Ax^j - b)$, mit D, L wie in 2.5.2)

Beispiel 1: Nähere die Lsg x von $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ in 2 Schritten von $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

1. $x_1^1 = -\frac{1}{4}\left(2x_1^0 + 1x_3^0 - 5\right) = \frac{1}{2}$,
   $x_2^1 = -\frac{1}{5}\left(2x_1^1 + 2x_3^0 - 4\right) = \frac{1}{5}$,
   $x_3^1 = -\frac{1}{6}\left(1x_1^1 + 2x_2^1 - 7\right) = \frac{61}{60}$

2. $x_1^2 = -\frac{1}{4}\left(\frac{2}{5} + \frac{61}{10} - 5\right) = \frac{1103}{1220} \approx 0,9041$
   $x_2^2 = -\frac{1}{5}\left(\frac{1103}{610} + \frac{120}{61} - 4\right) = \frac{137}{3050} \approx 0,0449$
   $x_3^2 = -\frac{1}{6}\left(\frac{1103}{1220} + \frac{137}{1525} - 7\right) = \frac{11174285}{11163000} \approx 1,0010$

3. Eine näherungsweise Lösung des LGS ist also $x = (0,9041,\ 0,0449,\ 1,0010)^T$

2.5.4 Gesamtschrittverfahren

Aufgabentyp: Nähere die Lösung des LGS $Ax = b$, ausgehend von $x^0 = (x_1^0, ..., x_1^n)^T$, in m Schritten an.

1. Iteriere folgenden Schritt n-mal, ausgehend von $j = 0$:

   (a) Für alle Komponenten x_i^j, $i = 1, 2, ..., n$ berechne x_i^{j+1} wie folgt:

$$x_i^{i+1} = -\frac{1}{a_{ii}} \left(\sum_{k=1,\, k \neq i}^{n} a_{ik} x_k^j - b_i \right)$$

   Schematisch ergibt sich dadurch für eine $3x4$-Matrix $(A|b)$:

$$\begin{array}{l} x_1^{j+1} = \\ x_2^{j+1} = \\ x_3^{j+1} = \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} Vorfaktor: -\frac{1}{a_{11}} & +a_{12}x_2^j & +a_{13}x_3^j & -b_1 \\ +a_{21}x_1^j & Vorfaktor: -\frac{1}{a_{22}} & +a_{23}x_3^j & -b_2 \\ +a_{31}x_1^j & +a_{32}x_2^j & Vorfaktor: -\frac{1}{a_{33}} & -b_3 \end{array} \right)$$

   (Es gilt dann: $x^{j+1} = x^j - D^{-1}(Ax^j - b)$, mit D, L wie in 2.5.2)

Beispiel 1: Nähere die Lsg von $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ in zwei Schritten von $x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ an.

1. $x_1^1 = -\frac{1}{4}(2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 - 5) = \frac{1}{2}$,
   $x_2^1 = -\frac{1}{5}(2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 4) = 0$,
   $x_3^1 = -\frac{1}{6}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 7) = \frac{2}{3}$
2. $x_1^2 = -\frac{1}{4}\left(2 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{2}{3} - 5\right) = \frac{13}{12} \approx 1,08$
   $x_2^2 = -\frac{1}{5}\left(2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{2}{3} - 4\right) = \frac{1}{3} \approx 0,33$
   $x_3^2 = -\frac{1}{6}\left(1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 0 - 7\right) = \frac{13}{12} \approx 1,08$
3. Eine näherungsweise Lösung des LGS ist also $x = (0,08,\ 0,33,\ 1,08)^T$

Kapitel 3

Klausuren Sommersemester 2000

3.1 Scheinklausur

Aufgabe 1 (5 Punkte) Führen Sie einen Schritt des Newton-Verfahrens mit dem Startwert $(x^0, y^0) = (e, e)$ aus, um eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $x + y \ln x = \frac{3}{2}e$, $y + x \ln y = \frac{5}{2}e$ zu approximieren.

Aufgabe 2 (8 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Aufgabe 3 (7 Punkte) Lösen Sie $y'(x) = \frac{2y}{x} + \frac{x}{y}$ für $y, x > 0$ und $y(1) = 1$. Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Gegeben ist die Gleichung $y''+y = x^2$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$. Berechnen Sie mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren und der Schrittweite $h = 2$ eine Approximation von $y(2)$, $y'(2)$. [Runge-Kutta-Schritte sind angegeben, siehe 2a]

Aufgabe 5 (3+1+3 Punkte) Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Bestimmen Sie die LDL^T-Zerlegung der Matrix A.
2. Stellen Sie fest, ob A positiv definit oder negativ definit oder indefinit ist (mit Begründung)
3. Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$.

Aufgabe 6 (2+5 Punkte) Seien $p \in P_2$ und $q \in P_3$ diejenigen Polynome, die die Werte von $f(x) = \sqrt{x}$ auf $x_i \in \{1, 4, 9\}$ bzw. auf $x_i \in \{0, 1, 4, 9\}$ interpolieren.

1. Zeigen Sie, ohne das Polynom p zu bestimmen, daß für den Interpolationsfehler in $x = 5$ gilt: $|f(5) - p(5)| \leq 1$.
2. Geben Sie p und q in der Newton-Form an. (Weitere Vereinfachungen sind nicht nötig.)

3.2 Vordiplomsklausur

Aufgabe 1 (7 Punkte) Führen Sie einen Schritt des gedämpften Newton-Verfahrens mit dem Startwert $(x_0, y_0) = (0, \frac{1}{2})$ durch, um eine Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems $x(2y + 1) + 2 = 0$, $x^2 + y^2 - \frac{5}{4} = 0$ zu approximieren. Für den Abbruchtest $\|F(x^1, y^1)\| < \|F(x^0, y^0)\|$ benutzen Sie die Euklidische Norm.

Aufgabe 2 (7 Punkte) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y''(x) - 2y'(x) + 2y(x) = xe^x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

Aufgabe 3 (8 Punkte) Lösen Sie $y' = \frac{4}{x}y + 4x^3\sqrt{y}$, $x > 0$, $y \geq 0$, $y(1) = \frac{9}{16}$. Geben Sie auch das maximale Existenzintervall an.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte) Gegeben ist die Gleichung $y'' = xy' - y - 1$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 2$. Berechnen Sie

1. mit der Trapezregel [Schritt angegeben, siehe 2]
2. mit dem verbesserten Euler-Cauchy-Verfahren [Schritte angegeben, siehe 2]

und der Schrittweite $h = 1$ jeweils eine Approximation von $y(2)$, $y'(2)$.

Aufgabe 5 (3+1+1 Punkte) Gegeben sei $A_a = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 6 \\ 4 & a+8 & a^2+4 & a+12 \\ 2 & a^2+4 & a^3+a+2 & a^2+2a+6 \\ 6 & a+12 & a^2+2a+6 & 5a+19 \end{pmatrix}$.

1. Führen Sie die LDL^T-Zerlegung der Matrix A_a durch.
2. Finden Sie den Wert der Determinante von A_a.
3. Für welche a ist die Matrix A_a positiv definit?

Aufgabe 6 (3+2+2 Punkte) Seien $p \in P_2$ und $q \in P_3$ diejenigen Polynome, die die Funktion $f(x) = x^3$ in $x_i \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, +\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$ bzw. in $x_i \in \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, +\frac{\sqrt{3}}{2}, a\right\}$ interpolieren, wobei a verschieden von $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ und 0 ist.

1. Zeigen Sie, ohne das Polynom p zu bestimmen, daß für den Interpolationsfehler auf $[-1, 1]$ gilt: $|f(x) - p(x)| < \frac{1}{4}$.
2. Geben Sie p in der Newton-Form an und vereinfachen Sie diese Darstellung.
3. Finden Sie (wie Sie wollen) die explizite Form des Interpolationspolynoms q.