Lehrstuhl für Informatik VII
RWTH Aachen
Prof. Dr. W. Thomas
Dipl. Math. S. Wöhrle

24.2.2005

Berechenbarkeit und Komplexität
WS 2004/05

Scheinklausur

Nachname	
Vorname	
Matrikelnr.	

Bemerkungen

- Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer auf jedes benutzte Blatt.
- Benutzen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt.
- Lassen Sie oben einen Rand von mindestens drei Zentimetern.
- Geben Sie dieses Blatt und das Blatt mit der Aufgabe 8 ab. Das andere Aufgabenblatt können Sie behalten.
- Einziges erlaubtes Hilfsmittel in ein *handbeschriebenes* Blatt (max. DIN A4) mit eigenen Notizen. Schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Matrikelnr. auch auf dieses Blatt.
- Bearbeitungszeit: 90 Minuten.
- Sie benötigen 20 Punkte, um die Klausur zu bestehen.

Nur für die Korrektur, bitte nicht beschriften!

	1	2	3	4
Punkte:	/ 6	/ 6	/ 6	/ 6
Kürzel:				
	5	6	7	8
Punkte:	/ 6	/ 6	/ 6	/ 6
Kürzel:				
$\sum$	/ 48			

Lehrstuhl für Informatik VII
RWTH Aachen
Prof. Dr. W. Thomas
Dipl. Math. S. Wöhrle

24.2.2005

Berechenbarkeit und Komplexität
WS 2004/05

Scheinklausur

Aufgabe 1 *6 Punkte*

Geben Sie detailliert und mit Erläuterung eine deterministische Turingmaschine an, welche die Funktion $f : \Sigma_{bool}^* \to \Sigma_{bool}^*$ mit

$$f(w) := \begin{cases} w & \text{falls } w \text{ eine 1 enthält} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

berechnet. Geben Sie die Konfigurationsfolgen für die Eingabewörter 00 und 010 an.

Aufgabe 2 *3+3 Punkte*

Sei P das folgende while$_3$-Programm.

```
if X3=0 then
      X1:=0; X1:=X1 + 1;
      while X2 > 0  do
         X1:=X1 · X2;
         X2:=X2 − 1
      end
   else
      loop X3 do
         X1:=X1 + X2
      end
end
```

(a) Bestimmen Sie die Funktionswerte $f_P^{(1)}(5)$, $f_P^{(2)}(5,3)$ und $f_P^{(3)}(5,3,2)$.

(b) Geben Sie die Funktionen $f_P^{(1)}$, $f_P^{(2)}$ und $f_P^{(3)}$ an.

Aufgabe 3 *6 Punkte*

Zeigen Sie: Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann entscheidbar, wenn L und $\Sigma^* \setminus L$ semientscheidbar sind.

Aufgabe 4 *6 Punkte*

Zu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seien die Funktionen $f_1, f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f_1(n) := 2^{f(n)}$ und $f_2(n) := 2^{2^{f(n)}} \cdot 2^{f(n)}$.

Sei f loop-berechenbar durch ein loop$_k$-Programm P_f. Geben Sie loop-Programme P_{f_1} und P_{f_2} an, die f_1 bzw. f_2 berechnen.

Hinweis: Sie dürfen in Ihren Programmen neben den elementaren Zuweisungen $Xi := Xi + 1$ bzw. $Xi := Xi - 1$ auch Zuweisungen der Form $Xi := 0$, $Xi := Xj$ und $Xi := Xj * Xk$ mit $* \in \{+, -, \cdot, \mathrm{div}, \mathrm{mod}\}$ benutzen.

Aufgabe 5 *2+4 Punkte*

(a) Seien $P = (Inst_P, Pos_P)$ und $Q = (Inst_Q, Pos_Q)$ Entscheidungsprobleme. Geben Sie die Definition von $P \leq Q$ an.

(b) Das Problem „Totale Konstante Funktion“ *TKF* ist das folgende Entscheidungsproblem:

Eingabe:	Eine Turingmaschine M.
Frage:	Berechnet M eine totale konstante Funktion?

Zeigen Sie $HP \leq TKF$.

Erinnerung: Das Halteproblem *HP* für Turingmaschinen ist das Problem: Gegeben eine Turingmaschine M, hält M angesetzt auf das leere Band?

Aufgabe 6 *6 Punkte*

Skizzieren Sie die Arbeitsweise einer polynomzeitbeschränkten nichtdeterministischen Turingmaschine, die die Sprache $L := \{ww \mid w \in \Sigma^*\}$ entscheidet. Geben Sie dazu geeignete Zwischenkonfigurationen an, die Ihre Turingmaschine auf dem Wort *babbbabb* annimmt. Begründen Sie anhand Ihrer Beschreibung der Turingmaschine die polynomielle Laufzeitschranke.

Aufgabe 7 *6 Punkte*

Eine *eingabebeschränkte* Turingmaschine wird bei Eingabe von $w \in \Sigma^*$ in der Konfiguration $\triangleright q_0 w \triangleleft$ gestartet; sie arbeitet nur auf den Eingabefeldern inklusive der linken und rechten Randbegrenzung. Für die Randsymbole $\triangleright$ und $\triangleleft$ stehen nur Turingzeilen der Form $p \triangleright \triangleright R q$ bzw. $p \triangleleft \triangleleft L q$ zur Verfügung. Eine *k-fach eingabebeschränkte* Turingmaschine wird analog definiert mit Anfangskonfiguration

$$\triangleright q_0 w \underbrace{\sqcup \ldots \sqcup}_{(k-1)\cdot|w|} \triangleleft \,.$$

Es steht also $k \cdot |w|$ viel Platz zur Verfügung.

Geben Sie ein Verfahren an, mit dem für beliebiges $k \geq 1$ aus einer k-fach eingabebeschränkten deterministischen Turingmaschine M eine eingabebeschränkte deterministische Turingmaschine M' konstruiert werden kann, die dieselbe Sprache wie M entscheidet. Begründen Sie kurz die Korrektheit Ihres Verfahrens.

Name:

Matr. Nr.

Geben Sie dieses Blatt mit ab!

Aufgabe 8 *6 Punkte*

Kreuzen Sie „ja" an, falls die entsprechende Aussage richtig ist, und „nein", falls sie falsch ist. Für jede richtige Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede falsche Antwort $-1/2$ Punkt. Enthaltungen werden mit 0 Punkten bewertet. Es ist möglich, dass Sie in dieser Aufgabe eine negative Punktezahl erhalten.

		ja	nein
(a)	Zu jeder Turingmaschine gibt es unendlich viele andere Turingmaschinen, die dieselbe Funktion berechnen.	☐	☐
(b)	Jede while-berechenbare Funktion ist berechenbar durch ein while-Programm, in dem „while" nur einmal vorkommt.	☐	☐
(c)	Wenn K entscheidbar ist und $K \leq L$ gilt, so ist L entscheidbar.	☐	☐
(d)	Ist f berechenbar, so ist $\mathrm{Def}(f)$ entscheidbar.	☐	☐
(e)	COLOR(2) ist NP-vollständig. (Setzen Sie $\mathrm{P} \neq \mathrm{NP}$ voraus.)	☐	☐
(f)	Jedes NP-vollständige Problem ist mit exponentiellem Zeitaufwand entscheidbar.	☐	☐