Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. R. Stens

Aachen, den 30. Januar 2015

Probeklausur zur Analysis für Informatiker

Dauer der Klausur: 120 Minuten. Gesamtpunktzahl: 100 Punkte. Bestehensgrenze: 33 Punkte.

Matrikelnummer: ______________________________

Name: ______________________________

Öffnen Sie den Klausurbogen erst nach Aufforderung!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	$\sum$
Maximalpunktzahl	5	10	10	5	11	15	10	10	7	8	9	100
erreichte Punktzahl												

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 2 (4+6 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n := \frac{2^n + 3^{n-1}}{(-4)^n + 5^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

b) Untersuchen Sie die durch $a_1 := 0$ und $a_{n+1} := \sqrt{1 + \frac{3}{4}a_n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{1-\cosh(x)}{x} & \text{, falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{, falls } x = 0 \end{cases}$$

in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ auf Stetigkeit.

b) Untersuchen Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \exp(x) & \text{, falls } x < 0, \\ x+1 & \text{, falls } x \geqslant 0 \end{cases}$$

in $x_0 = 0$ auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls $f'(0)$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot \sin(x^2)$. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades im Entwicklungspunkt $x_0 = 1$.

Aufgabe 5 (7+4 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung von

$$p(x) = \frac{3x^2 + 11x + 14}{x^3 + 2x^2 - 4x - 8}.$$

b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^2 \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x.$$

Aufgabe 6 (5+5+5 Punkte)

a) Berechnen Sie den Wert der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k-1}} + \frac{3^{k-1}}{5^{k+1}} \right)$$

b) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(2+5\cdot\cos^2(k))}$$

auf Konvergenz.

c) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} 5\cdot(\exp(3k))^2 x^k.$$

Aufgabe 7 (4+6 Punkte)

Berechnen Sie jeweils den Grenzwert, oder zeigen Sie, dass der Grenzwert nicht existiert.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(e^x - 1)}{x}$.

b) $\lim\limits_{x\downarrow 0} x^{\sin(x)}$.

Aufgabe 8 (5+5 Punkte)

a) Es seien $f, g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ Funktionen, wobei f auf $[1,\infty)$ absolut uneigentlich Riemann-integrierbar und g stetig sowie beschränkt sei. Zeigen Sie, dass dann $\int_1^\infty f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ absolut konvergiert.

b) Zeigen Sie, dass

$$\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert.

Aufgabe 9 (4+3 Punkte)

Es sei $f : (0, \infty) \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) = x^{\cos(y)}$ für alle $x \in (0, \infty)$ und $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

a) Berechnen Sie $\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ und $\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ für alle $x \in (0, \infty)$ und $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von f in Richtung $\boldsymbol{v} = (3,4)^T$ im Punkt $(1,0)^T$.

Aufgabe 10 (8 Punkte)

Es sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y) := x^3 + 3x - 12xy + 6y^2$ für alle $(x,y)^T \in \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie Lage und Art der lokalen Extremstellen von f.

Aufgabe 11 (3+3+3 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie jeweils die Aussage.

a) Sind $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend, so ist auch $f \cdot g$ monoton fallend.

b) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine reelle Folge, so divergiert mindestens eine der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ oder $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \frac{1}{k})$.

c) Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergente Folgen, so ist auch $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ divergent.