Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 15. Februar 2000

Klausur zur „Analysis für Informatiker“ (WS 99/00)

Aufgabe 1 (4 Punkte) Mittels vollständiger Induktion zeige man für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sei definiert durch

$$a_n := \left(\frac{2n+5}{2n}\right)^{5n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0+} (\tan x)^x$.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : (e,\ \infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x}{\log x - 1}$, $x \in (e,\ \infty)$.

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to e+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$.

(b) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle von f.

(c) Bestimmen Sie die Extrema von f.

(d) Geben Sie eine grobe Skizze von f an.

Aufgabe 5 (5 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung

$$2 \arctan x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi, \qquad x \geq 1.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x \sin(2x^2)}{1 + \sin(x^2)} dx$.

Aufgabe 7 (5 Punkte) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n^3}\right) \cos^n(n^2)$ auf Konvergenz.

Aufgabe 8 (5 Punkte) Zeigen Sie für $x \in (-1,\ 1)$ die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 23. Oktober 2000

1. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (9 Punkte) Beweisen Sie mit Hilfe der Körperaxiome A1–A9 für a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ die folgenden Bruchrechenregeln:

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc,$ (ii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$

(iii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$

Aufgabe 2 (∗) Es sei K ein Körper. Weisen Sie die „Nullteilerfremdheit“ von K nach, d.h. die Nichtexistenz zweier Elemente $a, b \in K \backslash \{0\}$ mit Produkt $a \cdot b = 0$.

Aufgabe 3 (∗) Folgern Sie aus den Körper– und Anordnungsaxiomen für x, y, $z \in \mathbb{R}$

(i) $x < y \iff -x > -y,$ (ii) $x < y$ und $z < 0 \implies x \cdot z > y \cdot z,$

(iii) $x > 0 \implies x + x^{-1} \geq 2,$ (iv) $x > y,\ x > 0,\ y > 0 \implies \frac{1}{x} < \frac{1}{y}.$

Aufgabe 4 (6 Punkte) Sei $K = \{0,\ 1\}$ eine zweielementige Menge. Über K seien die Verknüpfungen „ + “ und „ · “ gemäß der folgenden Tabellen definiert:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

(1) Zeigen Sie, daß K ein Körper ist (d.h., daß K mit den so definierten Operationen „ + “ und „ · “ die Körperaxiome A1–A9 erfüllt, wenn man dort $\mathbb{R}$ durch K ersetzt).

(2) Verifizieren Sie, daß auf K keine Ordnung eingeführt werden kann, welche die Ordnungs- und Monotonieaxiome erfüllt.

Aufgabe 5 (∗) Sei $K = \{a, b, c, d\}$ eine vierelementige Menge. Setzen Sie die folgenden Verknüpfungstabellen so fort, daß K mit diesen Verknüpfungen ein Körper ist (d. h., daß K mit den so definierten Operationen „ + “ und „ · “ die Körperaxiome A1–A9 erfüllt, wenn man dort $\mathbb{R}$ durch K ersetzt).

+	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			a	
d				a

·	a	b	c	d
a	a	a		
b		b		
c				
d				

Welches Element des Körpers K ist das Nullelement bzw. das Einselement? Ist die Fortsetzung eindeutig ?

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 30.10.2000, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo Aachen, 31. Oktober 2000

2. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Organisatorisches: Übungsblätter erhält man unter der Adresse
http://www.mathc.rwth-aachen.de/uebungen/AfI/
im Internet (als postscript-Files).

Aufgabe 1 (*) Es sei $M = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{N} \text{ mit } p < q \right\}$. Bestimmen Sie $\inf M$ und $\sup M$ und begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 2 (3+5 Punkte) Führen Sie für die angegebenen Mengen M folgendes Programm durch:

1) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen nach oben bzw. unten beschränkt sind.
2) Bestimmen Sie gegebenenfalls das Supremum bzw. Infimum der Mengen und untersuchen Sie, ob es sich um ein Maximum bzw. Minimum handelt.
3) Bestimmen Sie die Mengen ∂M und M'.

(1) $$M = \left\{ \frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\},$$ (2) $$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{(x+2)|x^2-1|}{x+1} > 4 \right\}.$$

Aufgabe 3 (*) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(1) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$ (2) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Aufgabe 4 (2+4 Punkte) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

(1) $$n! \geq 2^{n-1},$$ (2) $$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Aufgabe 5 (*) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung:
Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_j \geq 0$ für $j = 1, \cdots, n$ oder $-1 \leq x_j < 0$ für $j = 1, \ldots, n$, so gilt

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + x_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Aufgabe 6 (*) Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ kompakt. Zeigen Sie, daß M ein Minimum und ein Maximum hat.

Aufgabe 7 (3+3 Punkte) Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z \in \mathbb{C}$, sowie z^2.

(1) $$z = \frac{2i+6}{i-2},$$ (2) $$\frac{1-i}{2+2i} z = \frac{1-2i}{1+3i}.$$

Aufgabe 8 (∗) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

1) $\left\{ z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\} \;\middle|\; \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0 \right\}$,

2) $\{ z \in \mathbb{C} \mid 3z^2 - 10z\overline{z} + 3\overline{z}^2 + 16 = 0 \}$,

3) $\{ z \in \mathbb{C} \mid |z|^3 \geq 1, \mathrm{Im}(z^3) \geq 0 \text{ und } \mathrm{Re}(z^3) \geq 0 \}$,

4) $\left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = \frac{z+\overline{z}}{2} + 1 \right\}$.

Aufgabe 9 (3+3 Punkte) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

(a) $z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0$,

(b) $z^2 - (5+7i)z - 4 + 19i = 0$.

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 6.11.2000, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 6. November 2000

3. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (2+2 Punkte) Untersuchen Sie die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und begründen Sie Ihre Aussagen mit Hilfe der Definition.

$$(1) \quad a_n = \frac{6n-2}{3n+7}. \qquad\qquad (2) \quad a_n = \sqrt[3]{1-n^3}+n.$$

Aufgabe 2 (∗) Untersuchen Sie die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$(1) \quad a_n = \frac{2n^3-18n^2+9}{2n(3n-1)^2}. \qquad (2) \quad a_n = \frac{n^2+n}{2^n}. \qquad (3) \quad a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+5}.$$

Aufgabe 3 (5 Punkte) (Sandwich-Lemma) Seien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ Folgen reeller Zahlen mit den Eigenschaften

1) Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $a_n \le b_n \le c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge n_0$,

2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sind konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Zeigen Sie, daß dann auch $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Aufgabe 4 (∗) Bestimmen Sie mit Hilfe des Sandwich-Lemmas (siehe Aufgabe 3) den Grenzwert der Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$(1) \quad x_n = \frac{n!}{n^n}. \qquad\qquad (2) \quad x_n = \left(1+(-1)^n\frac{c}{n^2}\right)^n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5 (2+2+2+2+2+3 Punkte) Bestimmen Sie, soweit möglich, den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_n = \dfrac{5n}{1-2n}$, b) $a_n = \sqrt{n^2+1}-n$,

c) $a_n = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}$, d) $a_n = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{(n-1)n}$,

e) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+5}}\dbinom{n}{2}$, f) $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+k}$.

Aufgabe 6 (∗) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{4}a_n^2+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent ist. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 7 (2+2 Punkte) Untersuchen Sie die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$(1) \quad a_n = \left(\frac{1+3n}{3n}\right)^{6n}. \qquad\qquad (2) \quad a_n = \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^{8n-1}.$$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 13.11.2000, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

4. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Organisatorisches: Terminänderung: Die Klausur zu den Übungen „Analysis für Informatiker“ findet am Samstag, dem 17.2.2001 vom 13:30–15:30 Uhr in den Hörsälen AM, Gr, Ro, Fo1 und Fo2 statt.

Aufgabe 1 (∗) Es seien $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ und $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ Cauchy-Folgen. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, daß $\{x_n + y_n\}_{n=1}^\infty$ auch eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Es sei $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ gegeben durch

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{q^k}{k}, \quad |q| < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie per Definition, daß $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Es sei $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ eine nach unten beschränkte Folge. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$x_k := \inf\{\, a_n \mid n \geq k \,\}.$$

Zeigen Sie, daß $\underline{\lim}_{n\to\infty}(a_n) = \sup\{\, x_k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ gilt.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Zeigen Sie per Definition

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-3x}{2-x} = -2.$$

Aufgabe 5 (3+3 Punkte) Bestimmen Sie für die Funktion f den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ und berechnen Sie die Grenzwerte an den Rändern (auch $\pm\infty$) von $D(f)$.

$$(1) \quad f(x) := \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad (2) \quad f(x) := \frac{4 - x^2}{x(1 - |x-1|)}.$$

Aufgabe 6 (1+1+1+2 Punkte) Welche der folgenden Abbildungen $f : A \longrightarrow B$ sind injektiv, surjektiv oder bijektiv? Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion $f^{-1} : B \longrightarrow A$ an.

1) $A = B = \{1, 2, 3\}$; $f(1) = 3$, $f(2) = 1$, $f(3) = 2$.
2) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3\}$; $f(1) = 2$, $f(2) = 3$.
3) $A = \{1, 2, 3, \}$, $B = \{2\}$; $f(1) = f(2) = f(3) = 2$.
4) $A = B = \mathbb{R}$; $f(x) = 2x + 3$ für $x \in A$.

Aufgabe 7 (∗) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

a) f ist injektiv.
b) Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$.
c) Für alle $A, B \subset \mathbb{R}$ ist $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
d) Für alle $A, B \subset \mathbb{R}$ ist $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 20.11.2000, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 20. November 2000

5. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker"

Aufgabe 1 (4 Punkte) Es sei f definiert auf $D \subseteq \mathbb{R}$, und $x_0 \in D$ sei ein Häufungspunkt von D. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+).$$

Aufgabe 2 (∗) Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Ferner seien f und g stetig in x_0, und $f(x_0) > g(x_0)$. Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von x_0 derart, daß $f(x) > g(x)$ für jedes $x \in U \cap D$ gilt.

Aufgabe 3 (3+3+2 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit:

a) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$, b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{1 + |x|}$,

c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.

Aufgabe 4 (∗) Zeigen Sie:

a) Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in D (d. h. es ist $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Ist $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so ist auch $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge.

b) Die Aussage in a) wird falsch, wenn man die Bedingung „f gleichmäßig stetig" zu „f stetig" abschwächt.

Aufgabe 5 (∗) Seien $a,\ b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1) f ist gleichmäßig stetig.

2) Es gibt eine gleichmäßig stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F|_{(a,b)} = f$.

Aufgabe 6 (3 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, daß es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

$$|f(x)| \leq c(|x| + 1) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 7 (3 Punkte) Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = x^6 - 7x^4 + 2x^3 - x + 4$. Zeigen Sie, daß p im Intervall $(-1,\ 1)$ wenigstens zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe 8 (∗) Seien $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ stetig und $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$. Zeigen Sie: Es gibt ein $t \in [a,\ b]$, so daß $f(t) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)]$ gilt.

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 27.11.2000, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 27. November 2000

6. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Organisatorisches: Die Diskussionsgruppe **14** wurde verlegt und findet ab sofort mittwochs von 14:00–15:00 Uhr im Raum **202** (Templergraben 59) statt.

Aufgabe 1 (∗) Sei $\emptyset \neq I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a)f(b) < 0$. Zeigen Sie:

1. f besitzt in I eine Nullstelle.
2. Wir wollen eine Nullstelle von f in I mittels des Bisektions-Verfahren (approximativ) berechnen. Dazu definieren wir rekursiv eine Folge $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, von Intervallen durch $I_1 = I$ und

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right], & \text{falls } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq 0, \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2}, \ b_n\right], & \text{falls } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie nun:

   2.1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(a_n)f(b_n) \leq 0$.

   2.2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$.

   2.3. Die Folgen $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ und $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ konvergieren zum gleichen Grenzwert.

   2.4. Für den Grenzwert $c := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt $f(c) = 0$ und $|c - \frac{a_n+b_n}{2}| \leq \frac{b-a}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Bestimmen Sie mit diesem Verfahren (und einem Taschenrechner) die Nullstelle der Funktion $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\exp(x + 1/2) - 1$ bis auf einen Fehler von $\frac{1}{32}$.

Aufgabe 2 (3+2+2+2 Punkte) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. Zeigen Sie:

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0.$ 2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(\log(x))^\alpha}{x^\beta} = 0.$

3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} |x|^\alpha e^{\beta x} = 0.$ 4) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} x^\alpha |\log(x)|^\beta = 0.$

Aufgabe 3 (1+1+2 Punkte) Zeigen Sie:

1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für alle $c > 0$. 2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$ 3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$

Aufgabe 4 (5 Punkte) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0 mit der Eigenschaft $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle x, $y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1) f ist stetig auf $\mathbb{R}$.

2) Entweder ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß $f(x) = \exp(cx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 5 (2+2 Punkte) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $f : (0, \ \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt[k]{x}$. Beweisen Sie, daß f differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung

(i) mittels der Definition, (ii) mittels der Rechenregeln.

Aufgabe 6 (2+2+2+2 Punkte) Untersuchen Sie für die folgende Funktion f, auf welcher Menge $D \subset \mathbb{R}$ die Funktion definiert ist, für welche $x \in D$ die Funktion differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

(1) $\qquad f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}.$ $\qquad$ (2) $\qquad f(x) = x^{x \log x}.$

(3) $\qquad f(x) = \log(\log^2(\log^3(x))).$ $\qquad$ (4) $\qquad f(x) = \dfrac{1}{2} \log\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right).$

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 4. Dezember 2000

7. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (∗) **Definition:** Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig** in D, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, so daß gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x,\, y \in D.$$

Man nennt dann L eine **Lipschitz-Konstante für f in D.**

1) Zeigen Sie: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig in D, so ist f gleichmäßig stetig in D.
2) Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen Lipschitz-stetig in D sind und geben Sie gegebenenfalls explizit Lipschitz-Konstanten für f an:

   a) $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$. b) $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, $D = \mathbb{R}$.

   c) $f(x) = \log(x)$, $D = [x_0, \infty)$ mit $x_0 > 0$.

Aufgabe 2 (∗) Es sei f stetig in $[a,\ b]$ und differenzierbar auf $(a,\ b)$. Dann gilt:

1) $f'(x) \geq 0,\ x \in (a,\ b) \Longleftrightarrow f$ ist monoton wachsend auf $[a,\ b]$;
2) $f'(x) > 0,\ x \in (a,\ b) \Longrightarrow f$ ist streng monoton wachsend auf $[a,\ b]$;
3) $f'(x) = 0,\ x \in (a,\ b) \Longrightarrow$ es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = c$ für alle $x \in [a,\ b]$.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Die Funktionen $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Sinus hyperbolicus) und $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Cosinus hyperbolicus) sind für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Zeigen Sie:

1) sinh und cosh sind beliebig oft differenzierbar; es gilt $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$.
2) sinh ist streng monoton steigend und bijektiv.
3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
4) Die Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh} := \sinh^{-1}$ (Area Sinus hyperbolicus) von sinh ist differenzierbar. Bestimmen Sie die Ableitung arsinh'.
5) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Aufgabe 4 (∗) Zeigen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung die folgenden Ungleichungen:

(1) $x^\alpha \leq 1 - \alpha(1 - x)$ für $x \geq 0$ und $0 < \alpha < 1$.

(2) $n(b - x)x^{n-1} < b^n - x^n < n(b - x)b^{n-1}$ für $0 < x < b$ und $n \geq 2$.

Aufgabe 5 (∗) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktionen:

$$(1)\quad f(x) = x^2 e^{-x},\ \ x \in [-1,\ \infty). \qquad\qquad (2)\quad f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2+2x+3},\ \ x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 6 (∗)
Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex auf* I, wenn gilt:

$$(*)\qquad f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \text{für alle } x_1,\, x_2 \in I \text{ und alle } t \in (0,1).$$

f heißt *konkav auf* I, falls $-f$ konvex auf I ist.

1) Zeigen Sie, daß die Bedingung $(*)$ äquivalent ist zu

$$(**)\qquad \frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad \text{für alle } x_1,\, x,\, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x < x_2,$$

und veranschaulichen Sie diese Bedingungen am Graphen einer konvexen Funktion.

2) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Folgern Sie aus 1) und dem Mittelwertsatz die Äquivalenz

$$f \text{ konvex auf } I \qquad \Longleftrightarrow \qquad f' \text{ monoton wachsend.}$$

3) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie

$$f \text{ konvex auf } I \qquad \Longleftrightarrow \qquad f''(x) \ge 0 \text{ für alle } x \in I.$$

Aufgabe 7 (1+2+2+2+1 Punkte) Führen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = e^{2/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$

folgendes Programm durch

1) Definitionsbereich $D(f)$, Stetigkeitsbereich $S(f)$;
2) Grenzwerte an den Rändern, stetige Ergänzbarkeit;
3) Monotonieintervalle, lokale und globale Extrema;
4) Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle;
5) Grobe Skizze.

Aufgabe 8 (2+2+2 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$1)\quad \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arsinh}(ax)}{\log(x)}. \qquad 2)\quad \lim_{x\uparrow 1}(\log(x)\log(1-x)). \qquad 3)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\log(bx+1)} - \frac{1}{x}\right).$$

Die mit einem $(*)$ versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 11.12.2000, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens Aachen, 11. Dezember 2000
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

8. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker"

Aufgabe 1 (∗)

a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom $T_n(\log,\ x)$ in 1.

b) Zeigen Sie durch Abschätzung des Restgliedes der Taylorformel:

$$\text{Für alle } x \in [-1/2,\ 1] \text{ ist} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k = -\log(1+x).$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom $T_n(\exp,\ x)$ in 0.

b) Zeigen Sie durch Abschätzung des Restgliedes der Taylorformel:

$$\text{Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ ist} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k = e^x.$$

Aufgabe 3 (6 Punkte) Sei $\delta > 0$ und $f \in \mathcal{R}[a,b]$ mit $f(x) \geq \delta$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium, daß dann auch $\dfrac{1}{f(x)} \in \mathcal{R}[a,b]$ ist.

Aufgabe 4 (∗) Sei $a > 1$. Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^a \log(x)\,dx$ mittels Riemannscher Zwischensummen.

Hinweise: Berechnen Sie z. B. die Riemannsche Obersumme $S(T_n)$ von log auf $[1,a]$ bezüglich der Zerlegung $T_n = \{a^{j/n} \mid j = 0,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$, und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} S(T_n)$.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte) Interpretieren Sie die folgenden Summen als Riemannsche Zwischensummen und berechnen Sie:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^p}{n^{p+1}}, \quad p > 0. \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j}.$$

Aufgabe 6 (∗) Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist das n-te Legendre-Polynom P_n definiert durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie durch partielle Integration:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = 0$ für alle $m,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $m \neq n$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aufgabe 7 (2 Punkte) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{C}[0,\infty)$ mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. Zeigen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\,dt = a.$$

Aufgabe 8 (2+2+2+2 Punkte) Lösen Sie folgende Integrale mit Hilfe partieller Integration.

(1) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx, \quad x > -1.$ (2) $\displaystyle\int x\log(x)dx, \quad x > 0.$

(3) $\displaystyle\int \log^2(x)dx, \quad x > 0.$ (4) $\displaystyle\int 2x^2\cosh(2x)dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 9 (2+1+1+2 Punkte) Lösen Sie folgende Integrale durch geeignete Substitution.

(1) $\displaystyle\int \log\left(1+\frac{x}{2}\right)dx, \quad x > -2.$ (2) $\displaystyle\int \frac{4x}{(1-x^2)^2}dx, \quad x > 1.$

(3) $\displaystyle\int xe^{a+bx^2}dx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{y+1}}dy, \quad y > 0.$

9. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (4 Punkte) Seien a, $b \in \mathbb{R}$ positive Zahlen. Berechnen Sie den Flächeninhalt

$$F = 2b \int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}dx$$

der Ellipse $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 2 (∗) Bestimmen Sie den Inhalt F der Fläche, die von den Kurven $f_1(x) = \frac{2\pi}{9}x^2$, $f_2(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ und der Gerade $x = 0$ begrenzt wird.

Aufgabe 3 (2+2+3+3 Punkte) Lösen Sie folgende Integrale.

$$(1) \quad \int \cos^2(x)dx; \qquad (2) \quad \int \frac{1}{\sin(x)}dx;$$

$$(3) \quad \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx; \qquad (4) \quad \int e^{ax}\sin(bx)dx, \quad ab \neq 0.$$

Aufgabe 4 (∗) *Integration rationaler Funktionen:* Sind P, Q Polynome, so läßt sich die rationale Funktion $R = P/Q$ integrieren, indem man R in eine Summe von „einfachen“ rationalen Funktionen zerlegt.
Dazu gehen wir zunächst davon aus, daß P und Q keine gemeinsamen Nullstellen haben und daß $\operatorname{grad}(P) < \operatorname{grad}(Q)$ gilt. Bezeichnet man dann mit $x_1, \dots, x_n$ ($n \in \mathbb{N}_0$) die paarweise verschiedenen *reellen* Nullstellen von Q, so findet man (gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra) $m \in \mathbb{N}_0$ und $k_1, \dots, k_{n+m} \in \mathbb{N}$ sowie paarweise verschiedene *reelle* Zahlenpaare $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ mit $4b_j - a_j^2 > 0$, $j \in \{1, \dots, m\}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so daß Q geschrieben werden kann als

$$Q(x) = c(x-x_1)^{k_1} \cdots (x-x_n)^{k_n}(x^2+a_1x+b_1)^{k_{n+1}} \cdots (x^2+a_mx+b_m)^{k_{n+m}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dann läßt sich die rationale Funktion P/Q schreiben als

$$(*) \qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{i,j}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_{n+i}} \frac{C_{i,j}x + D_{i,j}}{(x^2+a_ix+b_i)^j}, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_n\},$$

wobei $A_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$ reelle Zahlen sind. Die so durchgeführte Zerlegung heißt *(reelle) Partialbruchzerlegung* von R.
Für die Bestimmung der Zahlen $A_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$ stellt man im allgemeinen Gleichungssysteme auf, die sich aus dem Ansatz (∗) ergeben, indem man mit Q auf beiden Seiten multipliziert und einen Koeffizientenvergleich durchführt. Es läßt sich zeigen, daß das entstehende lineare Gleichungssystem für die Zahlen $A_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$ immer eindeutig lösbar ist.
Haben P und Q gemeinsamen Nullstellen oder ist $\operatorname{grad}(P) \geq \operatorname{grad}(Q)$, so kann man durch Polynomdivision immer Polynome P_0, P_1, Q_1 finden, so daß P_1 und Q_1 keine gemeinsamen Nullstellen haben, daß $\operatorname{grad}(P_1) < \operatorname{grad}(Q_1)$ gilt und $P(x)/Q(x) = P_0(x) + P_1(x)/Q_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $Q(x) \neq 0$ ist.

In dieser Aufgabe sollen nun für die in der Partialbruchzerlegung (∗) auftretenden „einfachen“ Standardtypen Stammfunktionen bestimmt bzw. Rekursionsformeln ermittelt werden:

1) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $j \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{(x-x_0)^j}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$.

2) Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $4b > a^2$ und $j \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $g(x) = \dfrac{x + a/2}{(x^2 + ax + b)^j}$, $x \in \mathbb{R}$.

3) Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $4b > a^2$ und $j \in \mathbb{N}$. Führen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^j}$ durch eine geeignete Substitution auf das Integral $\displaystyle\int \frac{dy}{(y^2+1)^j}$ zurück.

4) Sei $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq 2$. Verifizieren Sie die Rekursionsformel

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)^j} = \frac{2j-3}{2j-2} \int \frac{dy}{(y^2+1)^{j-1}} + \frac{1}{2j-2} \frac{y}{(y^2+1)^{j-1}}.$$

Aufgabe 5 (∗) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$.
Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Aufgabe 6 (2+2 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ihre Summen.

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}. \qquad\qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{3^{n-2}}.$$

Aufgabe 7 (2+1+2+1 Punkte) Sei $k \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3+1}. \qquad\qquad (2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}.$$

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^k(2n)}. \qquad\qquad (4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Aufgabe 8 (∗) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $h_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$. Zeigen Sie, daß die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2^n}$ konvergiert und daß gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n 2^{n-1}} = -2\log(1/2).$$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 8.1.2001, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 8. Januar 2001

10. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (∗) Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq x \in \mathbb{R}$ sei $f_n(x) = \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$. Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $f_n(x)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ punktweise gegen 0 konvergiert. Ist die Konvergenz auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bzw. auf $[1, \infty)$ gleichmäßig?

Aufgabe 2 (5 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2 + n^2}$. Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $\mathbb{R}$ konvergiert. Ist die Konvergenz auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig? Ist die Grenzfunktion differenzierbar?

Aufgabe 3 (6 Punkte) Zeigen Sie für $x \in (-1, 1)$ die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Hinweis: Geometrische Summenformel und Differentiation.

Aufgabe 4 (∗) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so daß die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ in D gleichmäßig konvergiert und $f = \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ die Grenzfunktion. Aus der Vorlesung ist bekannt, daß sich unter dieser Voraussetzung die Eigenschaft, stetig zu sein von der Funktionenfolge auf die Grenzfunktion vererbt. Untersuchen Sie, ob dies auch mit *gleichmäßig stetig* bzw. *Lipschitz-stetig* an Stelle von *stetig* gilt, d. h. beweisen oder widerlegen Sie die Aussagen

1) f_n gleichmäßig stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ f gleichmäßig stetig,
2) f_n Lipschitz-stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ f Lipschitz-stetig.

Was kann in 2) über die Lipschitz-Konstante von f gesagt werden?

Aufgabe 5 (5 Punkte)

1) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

2) Zeigen Sie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$ für $x \in (-1, 1)$. Ist die Potenzreihe auf der linken Seite die Taylorreihe von arctan in 0?

Aufgabe 6 (2+2+2 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren folgende Potenzreihen ?

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} x^n.$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{(4n+5)5^n}} x^n.$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3} (x + \frac{3}{2})^n.$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 15.1.2001, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 15. Januar 2001

11. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (3 Punkte) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}$. Folgern Sie daraus erneut die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion, also $e^{x+y} = e^x e^y$.

Aufgabe 2 (5+2 Punkte) Für eine in einer Umgebung von x_0 beliebig oft differenzierbare Funktion f definieren wir die formale Taylorsche Reihe

$$T(x, x_0; f) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Bestimmen Sie für folgende Funktionen $T(x, x_0; f)$ und zeigen Sie, daß in den angegebenen Bereichen

$$f(x) = T(x, x_0; f)$$

gilt.

1) $f(x) = (1 + x)^{\alpha}, \quad x_0 = 0, \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}, \quad \alpha \ne 0, 1, 2, \cdots.$

2) $f(x) = \frac{1 - x}{1 + x}, \quad x_0 = 0, \quad -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2}.$

Aufgabe 3 (∗) Zeigen Sie:

1) Das uneigentliche Integral $\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$ $(a > 0)$ konvergiert für $p > 1$ und divergiert für $p \le 1$.

2) Das uneigentliche Integral $\int_a^b \frac{1}{(x - a)^q} dx$ konvergiert für $q < 1$ und divergiert für $q \ge 1$.

Aufgabe 4 (2+2+2+4 Punkte) Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2}.$ 2) $\int_0^{1/e} \frac{dx}{x \log^2 x}.$

3) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}.$ 4) $\int_0^{\infty} \frac{\log(x)}{1 + x^2} dx.$

Aufgabe 5 (2+2 Punkte) Welches der folgenden uneigentlichen Integrale konvergiert?

1) $\int_0^1 \sin \frac{1}{x} dx,$ 2) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1 + x^2} dx.$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 22.1.2001, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 22. Januar 2001

12. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (4 Punkte) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 2 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} a_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Untersuchen Sie die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls ihren Grenzwert.

Aufgabe 3 (5 Punkte) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0+} \Big(\cos x \Big)^{\frac{1}{x^2}}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte) Gegeben sei die Funktion $f : (-4,\ 4) \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$, $x \in (-4,\ 4)$.

(a) Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to -4+} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to 4-} f(x)$.

(b) Bestimmen Sie die Monotonieintervalle von f.

(c) Bestimmen Sie die Extrema von f.

(d) Geben Sie eine grobe Skizze von f an.

Aufgabe 5 (5 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung

$$2 \arctan \sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin(2x), \qquad |x| < \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 6 (5 Punkte) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \frac{x e^{2x^2}}{2 + 3e^{x^2}} dx$.

Aufgabe 7 (5 Punkte) Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 8 (5 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-e)^n.$$

Die mit einem (*) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 29.1.2001, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 29. Januar 2001

13. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (∗) Zeigen Sie

$$(1) \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \qquad (2) \quad \Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)\sqrt{\pi}}{2^k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Aufgabe 2 (1+2 Punkte) Zeigen Sie:

$$(1) \quad 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n = 2^n \Gamma(n+1). \qquad (2) \quad 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}.$$

Aufgabe 3 (2+2+2 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ und geben Sie eine Skizze von $D(f)$ an.

1) $f(x,y) = \log(y^2 - 2x + 1).$

2) $f(x,y) = \log(y - x) + \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$

3) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}, \quad R > r > 0.$

Aufgabe 4 (2+2 Punkte) Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

$$(1) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy+1} - 1}{xy}. \qquad (2) \quad \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{y}.$$

Aufgabe 5 (3+2 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit im Nullpunkt.

$$(1) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^8 + y^8}{(x^4 + y^4)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad (2) \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 5.2.2001, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Lehrstuhl A für Mathematik Prof. Dr. Rudolf Stens
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 5. Februar 2001

14. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (2+3+2+2 Punkte) Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ und die partiellen Ableitungen erster Ordnung nach allen auftretenden Variablen im Innern von $D(f)$. Geben Sie auch den Gradienten $grad\, f$ an.

1) $f(x,y) = x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10.$

2) $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

3) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{\sqrt{x+2y}}.$

4) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}\sqrt[3]{y^2-x}.$

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1) Zeigen Sie: f ist an der Stelle $(0,0)$ stetig.
2) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3) Berechnen Sie an der Stelle $(0,0)$ alle Richtungsableitungen $D_{\mathbf{n}}f(x,y)$.
4) Ist f an der Stelle $(0,0)$ differenzierbar?

Aufgabe 3 (2 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (x^2 - 2y^2,\ -2x + 2y^3)^T$. Berechnen Sie die Ableitung $f'(x,y)$.

Aufgabe 4 (∗) Bestimmen Sie für die Fläche $z = f(x,y)$ die Gleichung der Tangentialfläche im Punkt $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

1) $f(x,y) = 3x^2 + y^2 + 2xy - 6x + 2y + 3,\ \ (x_0,y_0) = (2,1).$
2) $f(x,y) = 2x^2 + 5y^2 - 4xy + 4x - 10y + 14,\ \ (x_0,y_0) = (1,1).$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Montag, 12.2.2001, 11 : 00 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!