Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Aachen, 15. Oktober 1999

Prof. Dr. Henning Esser

Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

1. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (∗) Beweisen Sie mit Hilfe der Körperaxiome A1–A9 für a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$ und $d \neq 0$ die folgenden Bruchrechenregeln:

(i) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc,$ (ii) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd},$

(iii) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$

Aufgabe 2 (6 Punkte) Es sei K ein Körper. Weisen Sie die „Nullteilerfremdheit“ von K nach, d.h. die Nichtexistenz zweier Elemente $a, b \in K\backslash\{0\}$ mit Produkt $a \cdot b = 0$.

Aufgabe 3 (8 Punkte) Folgern Sie aus den Körper– und Anordnungsaxiomen für x, y, $z \in \mathbb{R}$

(i) $x < y \iff -x > -y,$ (ii) $x < y$ und $z < 0 \implies x \cdot z > y \cdot z,$

(iii) $x > 0 \implies x + x^{-1} \geq 2,$ (iv) $x > y,\ x > 0,\ y > 0 \implies \frac{1}{x} < \frac{1}{y}.$

Aufgabe 4 (6 Punkte) Sei $K = \{0,\ 1\}$ eine zweielementige Menge. Über K seien die Verknüpfungen „ + “ und „ · “ gemäß der folgenden Tabellen definiert:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

(1) Zeigen Sie, daß K ein Körper ist (d.h., daß K mit den so definierten Operationen „ + “ und „ · “ die Körperaxiome A1–A9 erfüllt, wenn man dort $\mathbb{R}$ durch K ersetzt).

(2) Verifizieren Sie, daß auf K keine Ordnung eingeführt werden kann, welche die Ordnungs- und Monotonieaxiome erfüllt.

Aufgabe 5 (∗) Sei $K = \{a, b, c, d\}$ eine vierelementige Menge. Setzen Sie die folgenden Verknüpfungstabellen so fort, daß K mit diesen Verknüpfungen ein Körper ist (d. h., daß K mit den so definierten Operationen „ + “ und „ · “ die Körperaxiome A1–A9 erfüllt, wenn man dort $\mathbb{R}$ durch K ersetzt).

$+$	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			a	
d				a

$\cdot$	a	b	c	d
a	a	a		
b		b		
c				
d				

Welches Element des Körpers K ist das Nullelement bzw. das Einselement? Ist die Fortsetzung eindeutig ?

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 22.10.1999, 11 : 40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 22. Oktober 1999

2. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker"

Organisatorisches: (1) Die *Großübung* (montags: 15:45h–17:15h) wird von **EPh** nach **Gr** verlegt.
(2) Die Diskussionsgruppe **D** wurde verlegt und findet ab sofort mittwochs von 14:00h–15:00 Uhr im Hörsaal **SG 12** statt.
(3) Übungsblätter erhält man unter der Adresse
http://www.mathc.rwth-aachen.de/uebungen/AfI/
im Internet (als postscript-Files).

Aufgabe 1 (∗) Zeigen Sie:

(a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $-1 < x < y$ gilt $\dfrac{x}{1+x} < \dfrac{y}{1+y}$.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\dfrac{x+y}{1+|x+y|} \leq \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte) Man bestimme die Lösungen folgender Ungleichungen ($x \in \mathbb{R}$):

$$(1)\quad x^2 - 6x + 8 > 0, \qquad (2)\quad |x-2| + |x-3| > 1.$$

Aufgabe 3 (∗) Zeigen Sie, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1)\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n, \qquad (2)\quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

Aufgabe 4 (2+4+3+3 Punkte) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$(1)\quad n! \geq 2^{n-1}, \qquad (2)\quad \sum_{j=1}^{n} (j+1)\binom{n}{j} = 2^{n-1}(n+2) - 1,$$

$$(3)\quad \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \qquad (4)\quad \sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} j^2 = n(2n-1).$$

Aufgabe 5 (∗) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $n! \leq \left(\frac{n}{2}\right)^n$? Beweisen Sie mit vollständiger Induktion Ihre Behauptung.

Aufgabe 6 (∗) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Bernoullischen Ungleichung:
Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_j \geq 0$ für $j = 1, \cdots, n$ oder $-1 \leq x_j < 0$ für $j = 1, \ldots, n$, so gilt

$$\prod_{j=1}^{n} (1 + x_j) \geq 1 + \sum_{j=1}^{n} x_j.$$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 29.10.1999, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 29. Oktober 1999

3. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Organisatorisches:

(1) Sondertermin: Am 2.11.99 (Dienstag) findet die *Großübung* von 15:45h–17:15h im Hörsaal **Ro** statt.
(2) Die *Großübung* findet (ab 08.11.99) montags von 15:30h–17:00h im Hörsaal **Gr** statt.

Aufgabe 1 (3+3 Punkte) Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen nach oben bzw. unten beschränkt sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls das Supremum bzw. Infimum der Mengen und untersuchen Sie, ob es sich um ein Maximum bzw. Minimum handelt.

(a) $$\left\{ \frac{1}{m} + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\},$$ (b) $$\left\{ \frac{m^2+n^2}{2mn} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{Q},\ 1 < m < n \right\}.$$

Aufgabe 2 (∗) Es sei $M = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{N} \text{ mit } p < q \right\}$. Bestimmen Sie $\inf M$ und $\sup M$ und begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 3 (3+3 Punkte) Seien A, B nichtleere, nach oben beschränkte Mengen positiver reellen Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Für $AB := \{ab \mid a \in A,\, b \in B\}$ gilt $\sup(AB) = \sup(A) \cdot \sup(B)$.

(b) Ist $\inf(A) > 0$ und $A^{-1} := \{a^{-1} \mid a \in A\}$, so gilt $\sup(A^{-1}) = \inf(A)^{-1}$.

Aufgabe 4 (∗) Für $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sei $A + B = \{\, a + b \mid a \in A \text{ und } b \in B\}$. Zeigen Sie, daß $A + B$ offen ist, falls A offen ist.

Aufgabe 5 (2+2+2+2 Punkte) Seien A, $B \subset \mathbb{R}$ Mengen reeller Zahlen und $\mathcal{A}$ eine Familie von Mengen reeller Zahlen (d. h. für $M \in \mathcal{A}$ ist $M \subset \mathbb{R}$). Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(1) $A \cup \complement A = \mathbb{R}$,

(2) $B \cup \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \right) = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} (B \cup A)$,

(3) $\complement \left(\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A \right) = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} (\complement A)$,

(4) $A \subset B \iff \complement B \subset \complement A$.

Aufgabe 6 (∗) Sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$ kompakt. Zeigen Sie, daß M ein Minimum und ein Maximum hat.

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 5.11.1999, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 5. November 1999

4. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (∗) Sei $A \subset \mathbb{R}$, ∂A die Menge der Randpunkte von A und A' die Menge der Häufungspunkte von A. Zeigen Sie:

$$(1) \quad A' \subset \overset{\circ}{A} \cup \partial A, \qquad\qquad (2) \quad A = \overline{A} \iff \partial A \subset A.$$

Aufgabe 2 (1+4 Punkte) Bestimmen Sie die Mengen ∂M und M', wobei

$$(1) \quad M = \left\{ m + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N} \right\}, \qquad\qquad (2) \quad M = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \frac{(x+2)|x^2-1|}{x+1} > 4 \right\}.$$

Aufgabe 3 (3+3 Punkte) Berechnen Sie Realteil, Imaginärteil und Betrag von $z \in \mathbb{C}$, sowie z^2.

$$(1) \quad z = \frac{i+3}{2i-4}, \qquad\qquad (2) \quad \frac{1-i}{1-2i} z = \frac{2+2i}{1+3i}.$$

Aufgabe 4 (2+2+3+2 Punkte) Skizzieren Sie die folgenden Mengen in der komplexen Ebene:

$$1) \quad \left\{ z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\} \;\middle|\; \operatorname{Re}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = 0 \right\}, \qquad\qquad 2) \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 3z^2 - 10z\overline{z} + 3\overline{z}^2 + 16 = 0 \right\},$$

$$3) \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z|^3 \geq 1, \operatorname{Im}(z^3) \geq 0 \text{ und } \operatorname{Re}(z^3) \geq 0 \right\}, \qquad\qquad 4) \quad \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| = \frac{z+\overline{z}}{2} + 1 \right\}.$$

Aufgabe 5 (∗) Es sei $c \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Im}(c) \geq 0$ $(\operatorname{Im}(c) < 0)$ gegeben. Zeigen Sie, daß

$$z := \sqrt{\frac{1}{2}\Big(|c| + \operatorname{Re}(c)\Big)} \;\underset{(-)}{+}\; i\sqrt{\frac{1}{2}\Big(|c| - \operatorname{Re}(c)\Big)}$$

eine Quadratwurzel von c ist, d.h. $z^2 = c$.

Aufgabe 6 (∗) Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen:

$$(a) \quad z^2 - (4+i)z + 5 + 5i = 0, \qquad\qquad (b) \quad z^2 - (5+7i)z - 4 + 19i = 0.$$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 12.11.1999, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Aachen, 12. November 1999
Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

5. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker"

Aufgabe 1 (∗) Untersuchen Sie die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und begründen Sie Ihre Aussagen mit Hilfe der Definition.

$$(1) \quad a_n = \frac{6n-2}{3n+7}. \qquad (2) \quad a_n = \sqrt[3]{1-n^3}+n.$$

Aufgabe 2 (1+2+2 Punkte) Untersuchen Sie die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$(1) \quad a_n = \frac{2n^3-18n^2+9}{2n(3n-1)^2}. \qquad (2) \quad a_n = \frac{n^2+n}{2^n}. \qquad (3) \quad a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2n^2+5}.$$

Aufgabe 3 (∗) (Sandwich-Lemma) Seien $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ Folgen reeller Zahlen mit den Eigenschaften

1) Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß $a_n \leq b_n \leq c_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$,
2) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sind konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Zeigen Sie, daß dann auch $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergiert mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Aufgabe 4 (1+4 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe von Sandwich-Lemma (siehe Aufgabe 3) den Grenzwert der Folge $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

$$(1) \quad x_n = \frac{n!}{n^n}. \qquad (2) \quad x_n = \left(1+(-1)^n\frac{c}{n^2}\right)^n, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{4}a_n^2+1} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, daß die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergent ist. Bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Aufgabe 6 (2+2 Punkte) Untersuchen Sie die Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert:

$$(1) \quad a_n = \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{6n}. \qquad (2) \quad a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{8n-1}.$$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 19.11.1999, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 19. November 1999

6. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (∗) Es seien $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy-Folgen. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition, daß $\{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$ auch eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte) Es sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ gegeben durch

$$x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie per Definition, daß $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Es sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine nach oben beschränkte Folge. Für $k \in \mathbb{N}$ sei

$$y_k := \sup\{\, x_n \mid n \geq k \,\}.$$

Zeigen Sie, daß $\limsup\limits_{n\to\infty}(x_n) = \inf\{\, y_k \mid k \in \mathbb{N} \,\}$ gilt.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Zeigen Sie per Definition

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-3x}{2-x} = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 5 (3+3 Punkte) Bestimmen Sie für die Funktion f den maximalen Definitionsbereich $D(f)$ und berechnen Sie die Grenzwerte an den Rändern (auch $\pm\infty$) von $D(f)$.

$$(1)\quad f(x) := \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad n \in \mathbb{N}. \qquad\qquad (2)\quad f(x) := \frac{1}{x+1} - \frac{3}{x^3+1}.$$

Aufgabe 6 (∗) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen äquivalent sind:

a) f ist injektiv.

b) Es gibt eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g \circ f = id_{\mathbb{R}}$.

c) Für alle $A, B \subset \mathbb{R}$ ist $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

d) Für alle $A, B \subset \mathbb{R}$ ist $f(A \setminus B) = f(A) \setminus f(B)$.

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 26.11.1999, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 26. November 1999

7. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (∗) Es sei f definiert auf $D \subseteq \mathbb{R}$, und $x_0 \in D$ sei ein Häufungspunkt von D. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist stetig in } x_0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_0-) = f(x_0) = f(x_0+).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Ferner seien f und g stetig in x_0, und $f(x_0) > g(x_0)$. Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von x_0 derart, daß $f(x) > g(x)$ für jedes $x \in U \cap D$ gilt.

Aufgabe 3 (3+2+3 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit:

a) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$.

b) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \dfrac{x^2}{1 + |x|}$.

Aufgabe 4 (2+2 Punkte) Zeigen Sie:

a) Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}$ und $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in D (d. h. es ist $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$). Ist $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig, so ist auch $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge.

b) Die Aussage in a) wird falsch, wenn man die Bedingung „f gleichmäßig stetig“ zu „f stetig“ abschwächt.

Aufgabe 5 (3 Punkte) Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1) f ist gleichmäßig stetig.

2) Es gibt eine gleichmäßig stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F\,|_{(a,b)} = f$.

Aufgabe 6 (∗) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, daß es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, so daß gilt:

$$|f(x)| \leq c(|x| + 1) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 3.12.1999, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Aachen, 3. Dezember 1999
Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

8. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker"

Aufgabe 1 (2 Punkte) Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = x^6 - 7x^4 + 2x^3 - x + 4$. Zeigen Sie, daß p im Intervall $(-1,\ 1)$ wenigstens zwei Nullstellen besitzt.

Aufgabe 2 (1+5+2 Punkte) Sei $\emptyset \neq I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a)f(b) < 0$. Zeigen Sie:

1. f besitzt in I eine Nullstelle.

2. Wir wollen eine Nullstelle von f in I mittels des Bisektions-Verfahren (approximativ) berechnen. Dazu definieren wir rekursiv eine Folge $I_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbb{N}$, von Intervallen durch $I_1 = I$ und

$$I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right], & \text{falls } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leq 0, \\ \left[\frac{a_n+b_n}{2},\ b_n\right], & \text{falls } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0. \end{cases}$$

   Zeigen Sie nun:

   2.1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f(a_n)f(b_n) \leq 0$.

   2.2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^{n-1}}$.

   2.3. Die Folgen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergieren zum gleichen Grenzwert.

   2.4. Für den Grenzwert $c := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt $f(c) = 0$ und $|c - \frac{a_n+b_n}{2}| \leq \frac{b-a}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3. Bestimmen Sie mit diesem Verfahren (und einem Taschenrechner) die Nullstelle der Funktion $f : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x\exp(x + 1/2) - 1$ bis auf einen Fehler von $\frac{1}{32}$.

Aufgabe 3 (3+1 Punkte) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > 0$ und $\beta > 0$. Zeigen Sie:

1) $$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}} = 0.$$ 2) $$\lim_{x\to\infty} \frac{(\log(x))^\alpha}{x^\beta} = 0.$$

Aufgabe 4 (1+1+2 Punkte) Zeigen Sie:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für alle $c > 0$. 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.

Aufgabe 5 (∗) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig in 0 mit der Eigenschaft $f(x + y) = f(x)f(y)$ für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie:

1) f ist stetig auf $\mathbb{R}$.

2) Entweder ist $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder es gibt eine Konstante $c \in \mathbb{R}$, so daß $f(x) = \exp(cx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 10.12.1999, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Aachen, 10. Dezember 1999
Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

9. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Aufgabe 1 (∗) Die Funktionen $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Sinus hyperbolicus) und $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (Cosinus hyperbolicus) sind für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$\sinh(x) := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Zeigen Sie:

1) sinh und cosh sind beliebig oft differenzierbar; es gilt $\sinh' = \cosh$ und $\cosh' = \sinh$.
2) sinh ist streng monoton steigend und bijektiv.
3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$.
4) Die Umkehrfunktion arsinh:= $\sinh^{-1}$ (Area Sinus hyperbolicus) von sinh ist differenzierbar. Bestimmen Sie die Ableitung arsinh$'$.
5) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\operatorname{arsinh}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Aufgabe 2 (2+2 Punkte) Sei $k \in \mathbb{N}$ und $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sqrt[k]{x}$. Beweisen Sie, daß f differenzierbar ist, und berechnen Sie die Ableitung

(i) mittels der Definition, (ii) mittels der Rechenregeln.

Aufgabe 3 (4+4+3+3 Punkte) Untersuchen Sie für die folgende Funktion f, auf welcher Menge $D \subset \mathbb{R}$ die Funktion definiert ist, für welche $x \in D$ die Funktion differenzierbar ist und bestimmen Sie die Ableitung.

(1) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt[3]{x + \sqrt[4]{x}}}$. (2) $f(x) = x^{x \log x}$.

(3) $f(x) = \log(\log^2(\log^3(x)))$. (4) $f(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$.

Aufgabe 4 (∗)
Definition: Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig in** D, wenn es eine Konstante $L > 0$ gibt, so daß gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \quad \text{für alle } x, y \in D.$$

Man nennt dann L eine **Lipschitz-Konstante für** f **in** D.

1) Zeigen Sie: Ist $f : D \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig in D, so ist f gleichmäßig stetig in D.
2) Untersuchen Sie, welche der folgenden Funktionen Lipschitz-stetig in D sind und geben Sie gegebenenfalls explizit Lipschitz-Konstanten für f an:

   a) $f(x) = \sqrt{x}$, $D = [0, \infty)$. b) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$, $D = \mathbb{R}$.

   c) $f(x) = \log(x)$, $D = [x_0, \infty)$ mit $x_0 > 0$.

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 20.12.1999, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Aachen, 17. Dezember 1999
Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

10. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker"

Aufgabe 1 (2+4 Punkte) Zeigen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung die folgenden Ungleichungen:

(1) $x^\alpha \le 1 - \alpha(1-x)$ für $x \ge 0$ und $0 < \alpha < 1$.

(2) $n(b-x)x^{n-1} < b^n - x^n < n(b-x)b^{n-1}$ für $0 < x < b$ und $n \ge 2$.

Aufgabe 2 (3+3 Punkte) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktionen:

$$(1) \quad f(x) = x^2 e^{-x}, \ x \in [-1, \ \infty). \qquad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 2x + 3}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 3 (∗)
Definition: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. $f : I \to \mathbb{R}$ heißt *konvex auf* I, wenn gilt:

$$(*) \qquad f(tx_1 + (1-t)x_2) \le tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in I \text{ und alle } t \in (0,1).$$

f heißt *konkav auf* I, falls $-f$ konvex auf I ist.

1) Zeigen Sie, daß die Bedingung $(*)$ äquivalent ist zu

$$(**) \qquad \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \le \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \qquad \text{für alle } x_1, x, x_2 \in I \text{ mit } x_1 < x < x_2,$$

und veranschaulichen Sie diese Bedingungen am Graphen einer konvexen Funktion.

2) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Folgern Sie aus 1) und dem Mittelwertsatz die Äquivalenz

$$f \text{ konvex auf } I \qquad \Longleftrightarrow \qquad f' \text{ monoton wachsend.}$$

3) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ zweimal differenzierbar. Zeigen Sie

$$f \text{ konvex auf } I \qquad \Longleftrightarrow \qquad f''(x) \ge 0 \text{ für alle } x \in I.$$

Aufgabe 4 (1+2+2+2+1 Punkte) Führen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x^2-1}, & x > 1 \\ \frac{1}{2}e^{1-x^2}, & x \le 1 \end{cases}$$

folgendes Programm durch

1) Definitionsbereich $D(f)$, Stetigkeitsbereich $S(f)$;
2) Grenzwerte an den Rändern, stetige Ergänzbarkeit;
3) Monotonieintervalle, lokale und globale Extrema;
4) Konvexitäts- und Konkavitätsintervalle;
5) Grobe Skizze.

Aufgabe 5 (2+2+2 Punkte) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \neq 0$. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$1) \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arsinh}(ax)}{\log(x)}. \qquad 2) \quad \lim_{x\uparrow 1} (\log(x)\log(1-x)). \qquad 3) \quad \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\log(bx+1)} - \frac{1}{x} \right).$$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 7.1.2000, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 7. Januar 2000

11. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker"

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom $T_n(\log, x)$ in 1.

b) Zeigen Sie durch Abschätzung des Restgliedes der Taylorformel:

$$\text{Für alle } x \in [-1/2,\ 1] \text{ ist} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k = -\log(1+x).$$

Aufgabe 2 (∗) Sei $\delta > 0$ und $f \in \mathcal{R}[a,b]$ mit $f(x) \geq \delta$ für alle $x \in [a,b]$. Zeigen Sie mit dem Riemannschen Integrabilitätskriterium, daß dann auch $\dfrac{1}{f(x)} \in \mathcal{R}[a,b]$ ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Sei $a > 1$. Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_1^a \log(x)\,dx$ mittels Riemannscher Zwischensummen.

Hinweise: Berechnen Sie z. B. die Riemannsche Obersumme $S(T_n)$ von log auf $[1,a]$ bezüglich der Zerlegung $T_n = \{a^{j/n} \mid j = 0,\dots,n\}$, $n \in \mathbb{N}$, und bestimmen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} S(T_n)$.

Aufgabe 4 (3+3 Punkte) Interpretieren Sie die folgenden Summen als Riemannsche Zwischensummen und berechnen Sie:

$$\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^p}{n^{p+1}}, \quad p > 0. \qquad\qquad \text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n+j}.$$

Aufgabe 5 (6 Punkte) Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist das n-te Legendre-Polynom P_n definiert durch

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (x^2-1)^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie durch partielle Integration:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = 0$ für alle $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $m \neq n$.

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (P_n(x))^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 14.1.2000, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Aachen, 14. Januar 2000
Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

12. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Organisatorisches: Die **Anmeldung zur Klausur „Analysis für Informatiker“** (am Dienstag, 15.2.2000, 13:30–15:30 Uhr) findet statt

in den Diskussionsstunden am Dienstag, 1.2.2000, 15:45–16:45 Uhr, Raum 004.

Studierende, die **nur** an der Nachholklausur (im April 2000) teilnehmen möchten, müssen sich **nicht** zur ersten Klausur anmelden. Für die Teilnahme an der Nachholklausur ist eine gesonderte Anmeldung erforderlich. Die Anmeldung zur Nachholklausur findet bei der Rückgabe der ersten Klausur statt.

Studierende, die nicht im WS 99/00, aber in einem der letzten beiden WS die Qualifikation für die Klausur (50% der Übungsspunkte) erreicht haben, müssen sich zur Teilnahme an der Klausur bzw. der Nachholklausur bei PD Dr. Y.-B. Guo anmelden.

Aufgabe 1 (2 Punkte) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{C}[0,\infty)$ mit $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$. Zeigen Sie

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt = a.$$

Aufgabe 2 (2+2+2+2 Punkte) Lösen Sie folgende Integrale mit Hilfe partieller Integration.

(1) $\displaystyle\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}dx, \quad x > -1.$ (2) $\displaystyle\int x\log(x)dx, \quad x > 0.$

(3) $\displaystyle\int \log^2(x)dx, \quad x > 0.$ (4) $\displaystyle\int 2x^2\cosh(2x)dx, \quad x \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 3 (2+1+1+2 Punkte) Lösen Sie folgende Integrale durch geeignete Substitution.

(1) $\displaystyle\int \log\left(1+\frac{x}{2}\right)dx, \quad x > -2.$ (2) $\displaystyle\int \frac{4x}{(1-x^2)^2}dx, \quad x > 1.$

(3) $\displaystyle\int xe^{a+bx^2}dx, \quad x \in \mathbb{R}, \quad b \neq 0.$ (4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{y+1}}dy, \quad y > 0.$

Aufgabe 4 ($*$) Seien a, $b \in \mathbb{R}$ positive Zahlen. Berechnen Sie den Flächeninhalt

$$F = 2b\int_{-a}^{a} \sqrt{1-(x/a)^2}dx$$

der Ellipse $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x/a)^2 + (y/b)^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$.

Aufgabe 5* (*P*unkte)Integration rationaler Funktionen: Sind P, Q Polynome, so läßt sich die rationale Funktion $R = P/Q$ integrieren, indem man R in eine Summe von „einfachen“ rationalen Funktionen zerlegt.
Dazu gehen wir zunächst davon aus, daß P und Q keine gemeinsamen Nullstellen haben und daß $\mathrm{grad}(P) < \mathrm{grad}(Q)$ gilt. Bezeichnet man dann mit $x_1, \dots, x_n$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ die paarweise verschiedenen *reellen* Nullstellen von Q, so findet man (gemäß dem Fundamentalsatz der Algebra) $m \in \mathbb{N}_0$ und $k_1, \dots, k_{n+m} \in \mathbb{N}$ sowie paarweise verschiedene *reelle* Zahlenpaare $(a_1, b_1), \dots, (a_m, b_m)$ mit $4b_j - a_j^2 > 0$, $j \in \{1, \dots, m\}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so daß Q geschrieben werden kann als

$$Q(x) = c(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_n)^{k_n}(x^2+a_1x+b_1)^{k_{n+1}}\cdots(x^2+a_mx+b_m)^{k_{n+m}}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Dann läßt sich die rationale Funktion P/Q schreiben als

$$(*)\qquad \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_i} \frac{A_{i,j}}{(x-x_i)^j} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k_{n+i}} \frac{C_{i,j}x + D_{i,j}}{(x^2+a_ix+b_i)^j}, \qquad x \in \mathbb{R}\setminus\{x_1,\dots,x_n\},$$

wobei $A_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$ reelle Zahlen sind. Die so durchgeführte Zerlegung heißt *(reelle) Partialbruchzerlegung* von R.
Für die Bestimmung der Zahlen $A_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$ stellt man im allgemeinen Gleichungssysteme auf, die sich aus dem Ansatz $(*)$ ergeben, indem man mit Q auf beiden Seiten multipliziert und einen Koeffizientenvergleich durchführt. Es läßt sich zeigen, daß das entstehende lineare Gleichungssystem für die Zahlen $A_{i,j}$, $C_{i,j}$, $D_{i,j}$ immer eindeutig lösbar ist.
Haben P und Q gemeinsamen Nullstellen oder ist $\operatorname{grad}(P) \geq \operatorname{grad}(Q)$, so kann man durch Polynomdivision immer Polynome P_0, P_1, Q_1 finden, so daß P_1 und Q_1 keine gemeinsamen Nullstellen haben, daß $\operatorname{grad}(P_1) < \operatorname{grad}(Q_1)$ gilt und $P(x)/Q(x) = P_0(x) + P_1(x)/Q_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $Q(x) \neq 0$ ist.

In dieser Aufgabe sollen nun für die in der Partialbruchzerlegung $(*)$ auftretenden „einfachen" Standardtypen Stammfunktionen bestimmt bzw. Rekursionsformeln ermittelt werden:

1) Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $j \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = \dfrac{1}{(x-x_0)^j}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$.

2) Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $4b > a^2$ und $j \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $g(x) = \dfrac{x + a/2}{(x^2+ax+b)^j}$, $x \in \mathbb{R}$.

3) Seien a, $b \in \mathbb{R}$ mit $4b > a^2$ und $j \in \mathbb{N}$. Führen Sie das Integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+ax+b)^j}$ durch eine geeignete Substitution auf das Integral $\displaystyle\int \frac{dy}{(y^2+1)^j}$ zurück.

4) Sei $j \in \mathbb{N}$ mit $j \geq 2$. Verifizieren Sie die Rekursionsformel

$$\int \frac{dy}{(y^2+1)^j} = \frac{2j-3}{2j-2}\int \frac{dy}{(y^2+1)^{j-1}} + \frac{1}{2j-2}\,\frac{y}{(y^2+1)^{j-1}}.$$

Aufgabe 6 (4 Punkte) Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-1}$.
Hinweis: Partialbruchzerlegung.

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 21. Januar 2000

13. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker"

Aufgabe 1 (2+2 Punkte) Lösen Sie folgende Integrale.

(1) $$\int e^{ax}\sin(bx)dx, \quad ab \neq 0.$$ (2) $$\int \frac{t+2}{t^2+t+1}dt.$$

Aufgabe 2 (∗) Bestimmen Sie den Inhalt F der Fläche, die von den Kurven $f_1(x) = \frac{2\pi}{9}x^2$, $f_2(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$ und der Gerade $x = 0$ begrenzt wird.

Aufgabe 3 (2+2 Punkte) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie ihre Summen.

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}.$$ (2) $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4}{3^{n-2}}.$$

Aufgabe 4 (2+1+2+1 Punkte) Sei $k \in \mathbb{N}$. Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2 + n}{n^3+1}.$$ (2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}.$$

(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log^k(2n)}.$$ (4) $$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}.$$

Aufgabe 5 (∗) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $h_n = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j}$. Zeigen Sie, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2^n}$ konvergiert und daß gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^{n-1}} = -2\log(1/2).$$

Aufgabe 6 (6 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \neq x \in \mathbb{R}$ sei $f_n(x) = \sin\left(\frac{1}{nx}\right)$. Zeigen Sie, daß die Funktionenfolge $f_n(x)$ auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ punktweise gegen 0 konvergiert. Ist die Konvergenz auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ bzw. auf $[1, \infty)$ gleichmäßig?

Aufgabe 7 (∗) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$. Zeigen Sie, daß die Funktionenreihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf $\mathbb{R}$ konvergiert. Ist die Konvergenz auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig? Ist die Grenzfunktion differenzierbar?

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 28.1.2000, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Aachen, 28. Januar 2000
Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

14. Übung zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Organisatorisches: Die 1. Klausur „Analysis für Informatiker“ findet am Dienstag, 15.2.2000, 13:30–15:30 Uhr statt. Hierzu ist eine Anmeldung erforderlich.

- Studierende, die im WS 99/00 die Qualifikation für die Klausur (50% der Übungsspunkte) erreicht haben, melden sich in den Diskussionsstunden am Mittwoch, 2.2.2000, direkt bei dem Gruppenleiter an.
- Studierende, die nicht im WS 99/00, aber in einem der letzten beiden WS die Qualifikation für die Klausur (50% der Übungsspunkte) erreicht haben, müssen sich in der Diskussionsstunde am Dienstag, 1.2.2000, 15:45–16:45 Uhr, Raum 004, bei PD Dr. Y.-B. Guo anmelden.

Aufgabe 1 (6 Punkte) Zeigen Sie für $x \in (-1, 1)$ die Gleichung

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n = \frac{1+x}{(1-x)^3}.$$

Hinweis: Geometrische Summenformel und Differentiation.

Aufgabe 2 (∗) Sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, so daß die Funktionenfolge $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ in D gleichmäßig konvergiert und $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ die Grenzfunktion. Aus der Vorlesung ist bekannt, daß sich unter dieser Voraussetzung die Eigenschaft, stetig zu sein von der Funktionenfolge auf die Grenzfunktion vererbt. Untersuchen Sie, ob dies auch mit *gleichmäßig stetig* bzw. *Lipschitz-stetig* an Stelle von *stetig* gilt, d. h. beweisen oder widerlegen Sie die Aussagen

1) f_n gleichmäßig stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ f gleichmäßig stetig,
2) f_n Lipschitz-stetig für alle $n \in \mathbb{N}$ $\Longrightarrow$ f Lipschitz-stetig.

Was kann in 2) über die Lipschitz-Konstante von f gesagt werden?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

1) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

2) Zeigen Sie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x)$ für $x \in (-1, 1)$. Ist die Potenzreihe auf der linken Seite die Taylorreihe von arctan in 0?

Aufgabe 4 (2+2+2 Punkte) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren folgende Potenzreihen ?

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} x^n.$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{\sqrt{(4n+5)5^n}} x^n.$ (3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2}{3} (x + \frac{3}{2})^n.$

Aufgabe 5 (∗) Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit im Nullpunkt.

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$ (2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Die mit einem (∗) versehenen Aufgaben sind Zusatzaufgaben. **Abgabe der Pflichtaufgaben bis Freitag, 4.2.2000, 11:40 Uhr (in den Kasten vor Raum 102, Hauptgebäude).** Übungen bitte mit Namen, Matrikelnummern und Diskussionsgruppe versehen!

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Aachen, 15. Oktober 1999
Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Informationen zur Vorlesung „Analysis für Informatiker“ WS 99/00

1. Zielgruppe

Die Vorlesung „Analysis für Informatiker“

Dienstag: 14:00h – 15:30h Gr, Freitag: 11:45h – 13:15h Gr

wendet sich an Studierende der Informatik, die nach der DPO'89 oder der DPO'97 studieren. Für Student(inn)en, die nach einer älteren Diplomprüfungsordnung studieren, müssen sich Übungsscheine und Prüfungen auf die dort genannten Vorlesungen beziehen.

2. Ablauf der Übungen

Der Übungsbetrieb besteht aus einer wöchentlichen Großübung (für alle Studierenden gemeinsam), Diskussionsstunden (in Gruppen) und einer Klausur am Ende des Semesters. Wöchentlich werden zudem Aufgaben herausgegeben, die (teilweise) zu bearbeiten sind.

2.1 Die Übungsaufgaben

Jeweils freitags werden nach der Vorlesung Übungsaufgaben ausgegeben. Die Aufgaben bestehen aus Pflicht- und Zusatzaufgaben (in veränderlicher Zusammensetzung). Die Pflichtaufgaben sind innerhalb einer Woche schriftlich zu bearbeiten und am jeweils nächsten Freitag bis 11:40 Uhr in den Kasten vor Raum 102 des Hauptgebäudes einzuwerfen.
Je **vier** Student(inn)en sollen die Pflichtaufgaben gemeinsam bearbeiten und abgeben. Sinnvoll ist, wenn Sie selbst **Vierergruppen** bilden und sich gemeinsam zu den Diskussionsstunden (siehe 2.3) anmelden.
Für die erfolgreiche Bearbeitung der Pflichtaufgaben werden Punkte vergeben. Sie müssen 50% dieser Pflichtpunkte aus den Übungsaufgaben erreichen, um am Ende die Klausur mitschreiben zu können (für Studenten, die schon einmal an den Übungen teilgenommen haben, besteht eine Ausnahmeregelung (siehe 2.4)).

2.2 Die Großübung

Es werden pro Woche zwei Großübungsstunden

Montag: 15:45h – 17:15h EPh

angeboten. Diese werden von PD Dr. Y.-B. Guo betreut. Die erste Großübung findet am **25.10.1999** statt. In der Großübung wird eine Lösung der Übungsaufgaben aus der vorherigen Woche vorgerechnet.

2.3 Die Diskussionsstunden

Die Diskussionsstunden finden **mittwochs von 14:00–15:00 Uhr** statt. In den Diskussionsstunden werden die korrigierten Lösungen der Übungsaufgaben aus der vorherigen Woche zurückgegeben und besprochen. Außerdem wird auf Fragen zu den aktuellen Übungsaufgaben eingegangen. Die Diskussionsstunden beginnen am **20.10.1999**. Lösungen, die drei Wochen nach dem Abgabetermin

in den Diskussionsstunden nicht abgeholt worden sind, werden dem Altpapier zugeführt. Dann verfällt die Möglichkeit der Reklamation der Korrektur.
Für die Teilnahme an den Diskussionsstunden ist eine Anmeldung erforderlich. Die Anmeldung findet direkt im Anschluß an die erste Vorlesung statt. Die Einteilung in die Diskussionsgruppen hängt am Dienstag, dem 19.10, ab 13:00 Uhr im Schaukasten von Prof. Esser im Hauptgebäude gegenüber von den Räumen 143 bis 146 aus.

2.4 Die Klausur

Die Klausur zu den Übungen „Analysis für Informatiker“ findet am Dienstag, dem 15.2.2000 von 13:30–15:30 Uhr in den Hörsälen Fo1 und Fo2 statt. Teilnahmeberechtigt an dieser Klausur ist, wer mindestens 50% der Pflichtpunkte aus den Übungen erreicht hat.
Für die Teilnahme an der Klausur ist eine Anmeldung (im Februar 2000) erforderlich. Genaueres wird rechtzeitig bekanntgegeben.
Studierende, die schon im WS 97/98 oder im WS 98/99 an den Übungen teilgenommen und damals die Mindestpunktzahl erreicht haben, können in diesem Semester (auch ohne Mindestpunktzahl) wieder an der Klausur teilnehmen. Bitte setzen Sie sich in Zweifelsfällen rechtzeitig mit dem betreuenden Assistenten in Verbindung!
Ferner wird im April 2000 eine Nachholklausur angeboten. Teilnahmeberechtigt an der Nachholklausur ist, wer mindestens 50% der Pflichtpunkte aus den Übungen erreicht hat und die erste Klausur nicht mitgeschrieben oder nicht bestanden hat. Auch für die Nachholklausur ist eine Anmeldung erforderlich.

3. Das Ziel der Übungen: der Leistungsnachweis

Über die erfolgreiche Teilnahme an den Übungen wird ein Leistungsnachweis (Schein) ausgestellt. Dieser Leistungsnachweis ist bei der Anmeldung zur ersten Prüfung im Gebiet Mathematik I (also einem der Fächer *Differentialgleichungen und Numerik* oder *Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*) vorzulegen.

Einen Leistungsnachweis erhält, wer die Klausur oder die Nachholklausur besteht.

Die Ergebnisse der Klausuren werden direkt an das Prüfungsamt weitergeleitet. Bescheinigungen werden daher in der Regel nicht ausgestellt.

4. Aktuelle Informationen zum Übungsbetrieb

Die aktuellen Informationen zum Übungsbetrieb erhält man im Aushangkasten von Prof. Esser. Restbestände des aktuellen Übungsblatts werden auf dem Abgabekasten ausgelegt. Übungsblätter und diese Informationen zur Vorlesung erhält man unter der Adresse

http://www.mathC.rwth-aachen.de/Übung/AfI

auch im Internet (als dvi- und postscript-Files).

5. Sprechstunde des Assistenten

Mit Fragen und Anregungen zum Übungsbetrieb können Sie sich direkt an PD Dr. Y.-B. Guo (Sprechstunde: dienstags von 9:00–10:00 Uhr sowie nach Vereinbarung im Raum 222 des Hauptgebäudes, Tel.: (80)6952 oder (80)6953, E-mail: guo@mathc.rwth-aachen.de) wenden.

6. Diskussion zur Vorlesung

Außerhalb des eigentlichen Übungsbetriebs bietet Prof. Dr. H. Esser dienstags von 15:45–16:45 Uhr im Raum 004 (im Gebäude der Erziehungswissenschaften) eine *Diskussion zur Vorlesung* an. Dort können insbesondere Fragen zum Stoff der Vorlesung besprochen werden.

Institut für Geometrie und Praktische Mathematik Prof. Dr. Henning Esser
Lehrstuhl C für Mathematik PD Dr. Yubao Guo

Aachen, 7. Februar 2000

Informationen zu den Klausuren „Analysis für Informatiker", WS 99/00

1. Allgemeine Informationen

1.1 **Teilnahmevoraussetzungen:** 50% der Übungspunkte im WS 97/98, WS 98/99 oder WS 99/00 und Anmeldung (wie unten beschrieben).

1.2 **Hilfsmittel:** Es sind keine Hilfsmittel zugelassen!

1.3 **Mitzubringen** sind Studentenausweis, Lichtbildausweis, dokumentenechtes Schreibgerät und (unbeschriebenes) Papier in ausreichender Menge.

1.3 **Scheine** werden in der Regel nicht ausgestellt (die Ergebnisse werden dem ZPA direkt gemeldet).

2. Informationen zur ersten Klausur

2.1 **Zeit und Ort:** Dienstag, 15.2.2000, 13:30–15:30 Uhr in den Hörsälen **Fo 1** und **Fo 2**.

2.2 **Anmeldung:** Studierende, die im WS 99/00 die Qualifikation für die Klausur (50% der Übungsspunkte) erreicht haben, melden sich in den Diskussionsstunden am Mittwoch, 2.2.2000, oder 9.2.2000 direkt bei dem Gruppenleiter an.

Studierende, die nicht im WS 99/00, aber in einem der letzten beiden WS die Qualifikation für die Klausur (50% der Übungsspunkte) erreicht haben, müssen sich in der Diskussionsstunde am Dienstag, 1.2.2000, 15:45–16:45 Uhr, Raum **004**, oder per E-mail (guo@mathc.rwth-aachen.de) bis Freitag, 11.2.2000 bei PD Dr. Y.-B. Guo anmelden.

2.3 **Hörsaaleinteilung** erfolgt nach Matrikelnummern und wird am Freitag, 11.2.2000, im Aushangkasten von Prof. Esser bekanntgegeben.

2.4 **Ergebnisse:** Freitag, 18.2.2000, 11:00 Uhr im Aushangkasten von Prof. Esser.

2.5 **Rückgabe:** Freitag, 18.2.2000, 14:00–16:00 Uhr im Hörsaal **I** (Hauptgebäude).

2.6 **Diskussionsstunden:** zusätzlich zu den regulären Diskussionsstunden in der letzten Vorlesungswoche am Donnerstag, 10.2.2000, 14:15–15:45 Uhr im Hörsaal **Ro** und am Freitag, 11.2.2000, 11:45–13:15 Uhr im Hörsaal **Gr**.

3. Informationen zur Nachholklausur

3.1 **Zeit und Ort:** Dienstag, 28.3.2000, 13:30–15:30 Uhr im Hörsaal **Fo 1**.

3.2 **Anmeldung:** bei der Rückgabe der ersten Klausur (Die Teilnahme an der ersten Klausur ist **nicht** erforderlich!)

3.3 **Ergebnisse** und **Rückgabe** werden noch bekannt gegeben!

3.4 **Diskussionsstunden:** Donnerstag, 23.3.2000, 10:00–11:30 Uhr im Hörsaal **I** und Freitag, 24.3.2000, 15:00–16:30 Uhr im Hörsaal **I**.