Analysis für Informatiker

Kurzfassung der Vorlesungsinhalte

erstellt von Sandip Sar-Dessai

1 Abschätzungen

Dreiecksungleichung: $|x| - |y| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

Bernoullische Ungleichung: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

Dualbasis-Potenzierung: $2^n > n^2$ für alle $n \geq 5$

Fakultät: $k! \geq 2^{k-1}$

Logarithmus: $1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1$ sowie $2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \leq \log x \leq 2\left(\sqrt{x} - 1\right)$

Integrale: $\left|\int f\right| \leq \int |f|$

Reihen: $\left|\sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k\right| \leq \sum\limits_{k=n}^{n+p} a_k$

Norm: $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

2 Gleichungen

Summe ungerader Zahlen: $\sum\limits_{k=1}^{n} (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$

Binomische Formel: $(x + y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) x^k y^{n-k}$

geometrische Summenformel: $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1.-x}$

harmonische Summenformel: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ divergent

Eulersche Zahl: $e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Logarithmus: $\log x = \lim_{n\to\infty} 2^n \left(x^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} 2^n \left(1 - \frac{1}{x^{\frac{1}{2^n}}}\right)$

3 Mengen und Zahlen

Definitionen

Innerer Punkt x von A: $\exists\varepsilon : B_\varepsilon(x) \subset A$; Menge aller inneren Punkte: $int\, A$, A°

Offene Menge A: Es gilt $A = A^\circ$

Häufungspunkt x von A: $(B_\varepsilon(x) \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$; Menge: A'

Abgeschlossene Hülle: $\overline{A} = A \cup A'$. Es gilt: A abgeschlossen $\Leftrightarrow A = \overline{A}$

A Kompaktum $\Leftrightarrow A$ ist beschränkt und abgeschlossen

Konjugiert komplexe Zahl $\overline{z}$: $z = a + bi \Rightarrow \overline{z} = a - bi$

Binomialkoeffizient: $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$, $\left(\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right) = 1$

Sätze

Bolzano-Weierstraß für Mengen: Jede unendliche und beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Rechenregeln

Komplexe Zahlen: (1) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ (2) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ (3) $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2}(z. - \overline{z})$

Formel von Moivre ($z = a+bi, \varphi = \arctan \frac{b}{a}$): $z = |z| \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$

4 Folgen

Definitionen

Häufungspunkt a einer Folge a_n: $|a - a_n| < \varepsilon$

Konvergenz: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a - a_n| < \varepsilon \, \forall \, n \geq n_0 : \lim_{n \to \infty} a_n = a$

Sätze

Bolzano-Weierstraß für Folgen: Jede beschränkte Folge besitzt mindestens einen Häufungspunkt.

Konvergenzkriterium von Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \, \forall n, m \geq N(\varepsilon)$

Satz: Nach oben/unten beschränkte monoton wachsende/fallende Folgen/Fkt. sind konvergent

Rechenregeln

Grenzwertsätze ($\lim a_n = a, \lim b_n = b$): (1) $\lim a_n \pm \lim b_n = a \pm b$ (2) $\lim a_n \cdot \lim b_n = ab$ (3) $\lim \alpha a_n = \alpha a$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) (4) $\frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{a}{b}$ ($b_n \neq 0 \, \forall n,\, b \neq 0$) (5) $\lim |a_n| = |a|$

Grenzwerte: (1) $x^{\frac{1}{n}} \to 1$ (2) $x^n \to \infty$ (3) ${}^n\sqrt{x} \to 1$

5 Funktionen

Definitionen

Konvergenz (Fkt.): $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon, x_o) : |x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0) \wedge |f(x) - L| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \lim_{x \to \infty} f(x) = L$

Stetigkeit: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon, x_0) \, \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Gleichmäßige Stetigkeit: $|\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon, D) \, \forall x \in D : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Hebbare Unstetigkeitsstelle x_0: $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x)$, $f(x_0) \notin D$, dann: stetige Ergänzung: $f(x_0) := \lim_{x \uparrow x_0} f(x)$

Potenzfunktion: $a^x = e^{x \cdot \log a}$

Sätze

Satz (glm. stetige Funktionen): Auf f stetige und kompakte Funktionen sind gleichmäßig stetig

Satz: Zusammengesetzte Funktionen $f \circ g$ sind stetig, falls f und g stetig sind.

Monotonie der Umkehrfunktion: Seien f, g stetige monotone Funktionen auf $[a; b]$ (sei $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$), dann ist f^{-1} stetig und gleich monoton auf $[\alpha; \beta]$.

Zwischenwertsatz: Sei f stetig auf $[a; b]$, $f(a) < f(b)$. Dann:

$$\forall \zeta \, (f(a) < \zeta < f(b)) \; \exists x_0 \in (a; b) : \; f(x_0) = \zeta$$

Stirling-Formel: $\lim_{n \to \infty} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1$

Rechengesetze

Stetige Funktionen: (1) Polynomfunktionen (2) log auf $(0; \infty)$ (3) Wurzelfkt. $\sqrt{x}$ (4) Betrag $|x|$

Grenzwertsätze ($\lim f = a, \lim g = b$): (1) $\lim f \pm \lim g = a \pm b$ (2) $\lim f \cdot \lim g = ab$ (3) $\lim \alpha f = \alpha a$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) (4) $\frac{\lim f}{\lim g} = \frac{a}{b}$ ($g(x) \neq 0 \, \forall x$, $b \neq 0$) (5) $\lim |f| = |a|$

Umkehrfunktionen: (1) $x^{\frac{1}{n}}$ ist Umkehrfkt. von x^n (2) $\log x$ ist Umkehrfunktion von e^x

6 Differenziation

Definitionen

Differenzenquotient: $\frac{\Delta_h f(x_0)}{h} := \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$. Existiert der Grenzwert, ist f diffbar, der DQ heißt Ableitung.

Lipschitz-Stetigkeit: f heißt L-s. wenn ein $L > 0$ exisitert, so daß $|f(x) - f(y)| \leq L \, |x - y|$

Sätze

Satz: Aus der Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit.

Satz: Ist f Lipschitz-stetig, so ist f gleichmäßig stetig.

Existenz der Ableitung: $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \varepsilon(h)h$ mit $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$

Notwendige Bedingung einer Extremstelle: Ist x_0 lokales Extremum von f, gilt $f'(x_0) = 0$.

Hinreichende Bedingung einer Extremstelle: x_0 ist Maximum/Minimum, wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ bzw. $f''(x_0) > 0$. Ist $f''(x_0) = 0$, so ist x_0 Sattelstelle.

Konvexität/Konkavität: $f(x)$ $(x \in I)$ heißt konvex/konkav auf I, wenn $f''(x) \geq 0$ bzw. $f''(x) \leq 0$.

Satz von Rolle: Ist f stetig und diffbar auf (a, b) und $f(a) = f(b)$, dann $\exists x_0 : \; f'(x_0) = 0$

Mittelwertsatz: Seien f, g stetig auf $[a, b]$ und diffbar auf (a, b). Dann $\exists x_0, x_1 \in [a, b]$:

$$(f(b) - f(a)) \, g'(x_0) = (g(b) - g(a)) \, f'(x_1)$$

Satz: Ist f stetig in $[a; b]$ und $|f'(x)| \leq M$ $(x \in (a, b))$, dann gilt: $|f(x) - f(y)| \leq M \, |x - y|$ $(x, y \in [a; b])$

Satz: (1) $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ monoton wachsend auf $[a;b]$., $f'(x) > 0$ (2) $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ streng monoton wachsend auf $[a;b]$ (3) $f'(x) = 0 \Rightarrow f$ const (4) $f'(x) \leq 0, < 0$ analog

Taylorpolynom: $n \in \mathbb{N}$, f in a n-mal diffbar. Das Taylorpolynom n-ten Grades von f in a ist:

$$T_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

.

Taylorformel: $n \in \mathbb{N}$, $f \in C^n[a;b]$. Dann $\exists \eta \in (a,x)$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) + \frac{f^{(n+1)}(\eta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Rechenregeln

Regel von L'Hospital: Seien f, g diffbar. Ist $\lim_{n \to \star} f, \lim_{n \to \star} g \in \{-\infty; +\infty; 0\}$, dann gilt:

$$\lim_{n \to \star} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n \to \star} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ableitungsregeln: (1) $(\alpha f)' = \alpha f'$ (2) Summenregel $(f+g)' = f' + g'$ (3) Produktregel $(f \cdot g)' = f'g + g'f$ (4) Quotientenregel $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (5) Kehrwertregel $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f}{f^2}$ (6) Kettenregel $(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$

Ableitungen: (1) $(x^n)' = nx^{n-1}$ (2) $(\sqrt{x})' = -\frac{1}{2\sqrt{x}}$ (3) $\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{1}{x^{n+1}}$ (4) $(a^x)' = \log a \cdot a^x$ (5) $(\log x)' = \frac{1}{x}$ (6) $(e^x)' = e^x$

7 Integration

Definitionen

Riemannsche Ober-/Unter-/Zwischensumme: Sei f auf $[a;b]$ beschränkt, $M_i = \sup_{x \in [x_i; x_{i+1}]} f(x)$, $m_i = \inf_{x \in [x_i; x_{i+1}]} f(x)$, η_i Zwischenpunkte, h_i Maschenbreite. Dann ist $S(T) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i h_i$ Ober-, $s(T) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i h_i$ Unter- und $\Re(T, \{n_i\}) = \sum_{i=0}^{n-1} (M_i - m_i) h_i$ Zwischensumme.

Riemann-integrierbar: f heißt Riemann-integrierbar, wenn der Grenzwert der Zwischensummen (unabhängig von der Zwischenpunktwahl) existiert.

Stammfunktion: G heißt Stammfunktion von f wenn $G' = f$.

Sätze

Satz: f beschränkt auf $[a;b]$. Äquivalent sind: (1) $f \in \Re[a;b]$ (2) Integrabilitätskriterium: $\forall \varepsilon > 0 \, \exists$Zerlegung$\, T : 0 \leq S(T) - s(T) \leq \varepsilon$ (3) $\lim S(T) = \lim s(T)$

Satz: Ist f auf $[a;b]$ definierte monotone oder stetige Funktion. Dann ist $f \in \Re[a;b]$.

Fundamentalsatz 1: $f \in \Re[a;b]$. Dann: (1) $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$, $F(x) \in C[a,b]$ (2) Ist f in $x_0 \in (a,b)$ stetig, so ist $F(x)$ in x_0 diffbar und es gilt $\int_a^x f(u)_{x=x_0} = f(x_0)$ (3) $f \in C[a;b]$, dann $\left(\int_a^x f(u)\,du\right)' = f(x)$.

Fundamentalsatz 2: (1) $f \in \Re[a;b]$, G Stammfunktion. Dann ist $\int_a^b f(x) = G(b) - G(a)$ (2) f auf $[a;b]$ definiert, $f' \in \Re[a;b]$. Dann $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(u)\,du$, $a \leq x \leq b$.

Mittelwertsatz der Integralrechnung: $f \in C[a;b]$ und $g \in \Re[a;b]$, $g(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$, $\int_a^b g > 0$. Dann $\exists \eta \in (a,b) : \int_a^b fg = f(\eta) \int_a^b g$.

Rechenregeln

Integralregeln: (1) $\int \alpha f = \alpha \int f$ (2) $\int (f+g) = \int f + \int g$ (3) $f \leq g \Rightarrow \int f \leq \int g$ (4) $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int f \leq M(b-a)$ (5) $f \in \Re[a;b] \Rightarrow |f| \in \Re[a;b] \wedge \left|\int f\right| \leq \int |f|$ (6) $f, g \in \Re[a;b] \Rightarrow fg \in \Re[a;b]$ (7) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \; (a \leq c \leq b)$ (8) $\int_a^b f = -\int_b^a f$

Grundintegrale: (1) $\int x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$, $\alpha \neq -1$ (2) $\int e^x = e^x$ (3) $\int a^x = \frac{a^x}{\log a}$, $a > 0, a \neq 1$ (4) $\int \frac{1}{x} = \ln |x|$

Integrationsregeln: (1) partielle Integration: $\int fg' = fg - \int f'g$ bzw. $\int_a^b fg' = fg\,|_a^b - \int_a^b f'g$ (2) Taylorformel: $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$ (3) Substitution: $\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(v(x)) \cdot v'(x)\,dx$ mit $a = v(\alpha)$, $b = v(\beta)$, $t = v(x)$, $dt = v'(x)\,dx$ (4) Partialbruchzerlegung: Koeffizientenvergleich oder Zuhältermethode

8 Folgen und Reihen

Definitionen

Reihe&Partialsumme: $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$ heißt konvergent, wenn $\lim_{n\to\infty} s_n =: s$ existiert. Dann heißt s Summe und $\sum a_k = s$.

Bedingte/absolute Konvergenz: $\sum a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum |a_k|$ konvergent ist; falls nur $\sum a_k$ konvergent ist, bedingt konvergent. Ist $\sum a_k$ nicht konvergent, heißt $\sum a_k$ divergent.

Sätze

Satz: $\sum a_k$ konvergent $\Rightarrow \lim a_k = 0$

Satz: $\sum a_k$ ist konvergent, wenn die Summe der Partialsummen beschränkt ist

Satz: $\sum a_k$ und $\sum b_k$ konvergent. Dann ist auch $\sum(\alpha a_k + \beta b_k)$ konvergent mit

$$\sum(\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum a_k + \beta \sum b_k$$

Satz: $\sum a_k$ sei bedingt konvergent. Dann existiert eine Umordnung von $\sum a_k$, die gegen ein beliebiges $A \in \mathbb{R}$ konvergiert.

Satz: $\sum a_k$ sei absolut konvergent. Dann strebt jede Umordnung gegen den gleichen Grenzwert.

Konvergenzkriterien

Majorantenkriterium: $\sum |b_k| < \infty$, $|a_k| \leq |b_k|$, dann ist $\sum |a_k|$ konvergent.

Minorantenkriterium: $\sum b_k$ divergent, $|a_k| \geq |b_k|$, dann ist $\sum |a_k|$ divergent.

Wurzelkriterium: $\sum a_k$ sei Reihe. $p := \lim^n \sqrt{|a_n|}$. (1) $p < 1 \Rightarrow \sum |a_k|$ bedingt konvergent (2) $p = 1 \Rightarrow$ keine Aussage (3) $p > 1 \Rightarrow \sum a_k$ divergent

Quotientenkriterium: $\sum a_k$ sei Reihe. $r := \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. (1) $r < 1 \Rightarrow \sum |a_k|$ bedingt konvergent (2) $r = 1 \Rightarrow$ keine Aussage (3) $r > 1 \Rightarrow \sum a_k$ divergent

Leibniz-Kriterium: a_k sei monoton fallende Nullfolge. Dann ist $\sum (-1)^{k-1} a_k$ konvergent.

Cauchy-Kriterium (Reihen): $\sum a_k$ konvergent, wenn $\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon\, \forall n \geq N$.

Bekannte Grenzwerte

(1) geometr. Reihe: $\sum x^k = \frac{1}{1-x}$ ($|x| < 1$), divergent für $|x| \geq 1$ (2) harmonische Reihe: $\sum \frac{1}{x}$ divergiert (3) alt. harm. Reihe: $\sum (-1)^{k-1} \frac{1}{k} = \log 2$ (4) $\sum (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t} (0 \leq t < 1)$

9 Folgen und Reihen von Funktionen

Definitionen

Punktweise Konvergenz: $f_n(x)$ konvergiert punktweise gegen $f(x)$, wenn $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Gleichmäßige Konvergenz (Reihe): $\sum f_n$ konvergiert glm., wenn die Folge der Partialsummen $\sum_{k=1}^n f_k$ glm. konvergiert.

Sup-Norm: $\|f\|_\infty = \sup |f(x)|$ heißt Sup-Norm von f (f beschränkt).

Sätze

Satz: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \, \forall n \geq N(\varepsilon)$.

Glm. Konvergenz: f_n konvergiert glm. gegen f (i.Z. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$), wenn $\lim \|f_n - f\| = 0$.

Satz: Es gilt $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, wenn $\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \, n \geq N(\varepsilon)$.

Cauchy-Konvergenzkriterium (glm. Kgz.): f_n konvergiert glm. gegen f wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N > 0$ existiert mit $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, $n, m \geq N$.

Weierstraß-Majorantenkriterium: Gegeben $\sum f_n$. Gilt $|f_n(x)| \leq M_n$, $\sum M_n < \infty$, dann konvergieren $\sum f_n$ und $\sum |f_n|$ gleichmäßig.

Vertauschungsgesetz: Sei $f_n(x)$ stetig. Es gilt: (1) $f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow f$ stetig (2) x_0 Häufungspunkt: $\lim_{x\to\infty, x_0} f_n(x) = \lim_{x\to\infty, x_0} f_n(x)$ (3) $\sum f_n(x) = f(x) \Rightarrow f$ stetig (4) $\lim_{x\to x_0} \sum f_n(x) = \sum \lim_{x\to x_0} f_n(x)$

Satz: Sei $f_n \in \Re[a;b]$ und f stetig mit $\lim f_n(x) = f(x)$. (1) $f \in \Re[a;b]$ (2) $\lim \int_a^b f_n(x) = \int_a^b \lim f_n(x)$

Satz: Sei $f_n \in \Re[a;b]$, $\sum f_n$ glm. kgt. mit Summe $f(x)$. (1) $f \in \Re[a;b]$ (2) $\sum \int f_n(x) = \int \sum f_n(x)$

Satz: $f_n \in C^1[a;b]$, $f_n'(x) \rightrightarrows g(x)$, ex. $\lim f_n(x)$ für ein $x = x_0 \in [a;b]$. Dann: (1) f_n konvergiert glm. gegen $f \in C^1[a;b]$ (2) $f' = g$

Satz: $f_n \in C^1[a;b]$, $\sum f_n'$ gleichmäßig konvergent auf $[a;b]$. $\sum f_n$ konvergiere für $x = x_0 \in [a;b]$. Dann: (1) $\sum f_n$ kgt. glm. (2) $f(x) = \sum f_n(x) \Rightarrow f'(x) = \sum f_n'$

Satz: Sei geg. $\sum a_k x^k$. Sei $p = \lim^n \sqrt{|a_n|}$, $R = \frac{1}{p}$ für $p \neq 0$, $R = 0$ für $p = \infty$ und $R = \infty$ für $p = 0$. Dann: (1) $\sum a_k x^k$ absolut kgt. für $|x| < R$ und divergent für $|x| > R$, R heißt Konvergenzradius (2) $\sum a_k x^k$ kgt. glm. für $|x| \leq R$ (3) ex. $\lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, dann $R = \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$.

Satz: Sei $\sum a_n x^n$ Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Dann: (1) $f(x) = \sum a_n x^k$ ist stetig diffbar in $|x| < R$ und $f'(x) = \sum n a_n x^{n-1}$ (2) $f(x)$ besitzt in $|x| < R$ Ableitungen beliebig hoher Ordnung, $f^{(k)}(x) = \sum a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot x^{n-k}$, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (3) Ist $\sum b_n x^n$ auch Potenzreihe mit Kgzrad. R und $f(x) = \sum b_n x^n$, dann gilt $a_n = b_n$ (Eindeutigkeit).

Satz: Seien $\sum a_k$ und $\sum b_k$ kgt. Reihen mit Summen A bzw. B. Sei $c_n = \sum a_k b_{n-k}$. Dann ist $\sum c_n$ absolut kgt. mit Summe $C = A \cdot B$.

Satz: Seien $\sum a_k x^k$ und $\sum b_k x^k$ Potenzreihen mit Radius R_1 und R_2, $f(x)$ und $g(x)$ ihre Summen. Dann besitzt $f \cdot g$ für $|x| < \min\{R_1, R_2\}$ die Potenzreihenentwicklung

$$f(x)g(x) = \sum c_n x^n, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Satz: Sei f beliebig oft diffbar in $[a;b]$, $\left\|f^{(k)}\right\| \leq M$. Dann ($x \in [a;b]$): $f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-x_0)^k$, wobei die Reihe absolut konvergent ist.

Rechenregeln

Normregeln: (1) $\|f\| \geq 0$, $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ (2) $\|\alpha f\| = |\alpha| \, \|f\|$ (3) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

10 Winkelfunktionen

Funktion	Beschreibung	Ableitung
$\sin x$		$\cos x$
$\cos x$	$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{\sin x}{\cos x}$	$1 + \tan^2 x$
$\arccos x$	$\cos^{-1}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arcsin x$	$\sin^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\tan^{-1}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\frac{\sinh x}{\cosh x}$	$\frac{1}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2 x$
$\operatorname{arsinh} x$	$\sinh^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{arcosh} x$	$\cosh^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{artanh} x$	$\tanh^{-1}$	$\frac{1}{1-x^2}$

Rechenregeln

Sinus: $\sin(-x) = -\sin(x)$

Cosinus: $\cos(-x) = \cos(x)$

Additionstheoreme:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cosh x + \sinh x = e^x$
- $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
- $\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$
- $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$
- $\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$

Folgende Themen wurden nicht aufgenommen: Konvergenzordnung und -beschleunigung, Reihenbeschleunigung, Newton-Verfahren, Fixpunktsatz