Wichtige Verfahren der Analysis

Marc Ensenbach

1 Vollständige Induktion

(vgl. Skript S. 5 ff.; Übung 2)

1.1 Verfahren

Es sei $A(n)$ eine Aussage, die von einer natürlichen/ganzen Zahl n abhängig ist. Um nun zu zeigen, daß $A(n)$ für alle $n \geqslant n_0$ gültig ist (wobei n_0 eine fest gewählte natürliche/ganze Zahl ist), benutzt man folgendes Schema:
(IA) Zeige die Gültigkeit der Aussage $A(n_0)$. („Induktionsanfang")
(IV) Behaupte die Gültigkeit von $A(n)$ für **ein** $n \geqslant n_0$. („Induktionsvoraussetzung")
(IS) Folgere die Gültigkeit von $A(n+1)$. („Induktionsschluß")
Im Induktionsschluß sollte die Induktionsvoraussetzung angewendet werden (bitte im Beweis immer angeben, wo genau die IV verwendet wird).

1.2 Häufige Typen

Aussagen über Summen und Produkte, bei denen die Ober- und/oder Untergrenze von n abhängt, kommen häufig vor. (Dazu zählen auch Potenzen mit n im Exponent, Fakultäten oder Binomialkoeffizienten, dies sind auch nur bestimmte Arten von Produkten.) Hierbei bietet es sich in den meisten Fällen an, Terme der Summe/des Produktes für $n+1$ abzuspalten, so daß die Summe/das Produkt für n dasteht, so daß die Induktionsvoraussetzung angewendet werden kann.

1.3 Beispiele

a) Zeige mit vollständiger Induktion: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für alle natürlichen Zahlen.

(IA) $n=1$: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ **für dieses** n.

(IS) Dann ist $\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + \underbrace{n+1}_{\substack{\text{abgespalteter Summand} \\ \text{für } k=n+1}} \stackrel{\mathbf{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} =$

$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Damit ist die Aussage für $n+1$ bewiesen.
Mit dem Induktionsprinzip folgt die Gültigkeit der Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Zeige mit vollständiger Induktion: $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(IA) $n = 1$: $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{1}$.

(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ für dieses n.

(IS) Dann ist $\sum_{k=n+1}^{2(n+1)} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} = \sum_{k=n}^{2n+2} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \overset{\text{IV}}{\geqslant} \frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2n+2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}$,
was die Behauptung für $n + 1$ ist.
Mit dem Induktionsprinzip folgt die Gültigkeit der Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Zeige für $n \geqslant 8$: $2^n n^2 < n!$.
(IA) $n = 8$: $2^8 \cdot 8^2 = 16384 < 40320 = 8!$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $2^n n^2 < n!$ für dieses n.
(IS) Dann ist $2^{n+1}(n+1)^2 = 2 \cdot 2^n(n^2 + 2n + 1) = 2^n(2n^2 + 4n + 2) = 2^n n^2 \left(2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \overset{\text{IV}}{<} n! \left(2 + \frac{4}{n} + \frac{2}{n^2}\right) \leqslant n! \left(2 + \frac{4}{8} + \frac{2}{8^2}\right) < n! \cdot 3 < n!(n+1) = (n+1)!$, also ist die Behauptung für $n + 1$ gezeigt.
Mit dem Induktionsprinzip folgt die Gültigkeit der Behauptung für $n \geqslant 8$.

2 Grenzwerte von explizit gegebenen Folgen

(vgl. Skript S. 14 ff.; Übungen 3, 4 und 6)

2.1 Verfahren

Die klausurrelevanten Folgen lassen sich meist mit (mehr oder weniger einfachen) Umformungen auf bekannte Folgen oder Teilfolgen bekannter Folgen zurückführen, so daß sich die Grenzwerte (sofern vorhanden) leicht mit den Grenzwertsätzen und den bekannten Grenzwerten ausrechnen lassen. Daher sollten zumindest die im nächsten Abschnitt erwähnten Folgen mit ihren Grenzwerten bekannt sein.
Eine weitere Möglichkeit besteht manchmal darin, den Folgengrenzwert auf den Grenzwert einer Funktion zurückzuführen (indem man in der Folgenvorschrift das n durch ein x ersetzt und $x \in \mathbb{R}$ zuläßt). Konvergiert die Funktion für $x \to \infty$, so konvergiert auch die Folge (**Warnung:** Die Umkehrung gilt nicht!), ebenso überträgt sich bestimmte Divergenz von der Funktion auf die Folge.
Eine ebenfalls nützliche Eigenschaft bei der Grenzwertberechnung ist die Stetigkeit bestimmter Funktionen wie k-te Wurzel (**Warnung:** das k darf nicht die Variable sein, die gegen ∞ geht), r-te Potenz, $r \in \mathbb{R}$, Exponentialfunktion zur Basis $b > 0$, usw., die es erlaubt, „den Limes unter die Wurzel/in den Exponent/ … zu ziehen." (Die Verwendung von Stetigkeit sollte immer in der Begründung angegeben werden).

2.2 Wichtige Folgen und ihre Grenzwerte

a) $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1}n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1}n^{l-1} + \cdots + b_1 n + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{für } k < l \\ \frac{a_k}{b_l} & \text{für } k = l \\ \infty & \text{für } k > l, \text{wobei } a_k \text{ und } b_l \text{ vorzeichengleich} \\ -\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

b) $$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

c) $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^d}{c^n} = \begin{cases} 0 & \text{für } |c| > 1 \text{ oder } |c| = 1, d < 0 \\ 1 & \text{für } c = 1, d = 0 \\ \infty & \text{für } 0 < c < 1 \text{ oder } c = 1, d > 0 \end{cases}$$

In allen anderen Fällen ist diese Folge unbestimmt divergent.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$

2.3 Beispiele

a) Bestimme den Grenzwert von $\sqrt[2n]{n}$ für $n \to \infty$.
Es ist $\sqrt[2n]{n} = \sqrt[2n]{2n \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt[2n]{2n} \cdot \sqrt[2n]{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \cdot 1 = 1$ nach den Grenzwertsätzen, da $(\sqrt[2n]{2n})$ eine Teilfolge von $(\sqrt[n]{n})$ und $\left(\sqrt[2n]{\frac{1}{2}}\right)$ eine Teilfolge von $\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right)$ ist.

b) Berechne den Grenzwert von $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3}}$ für $n \to \infty$.
Substituiere $y = \frac{n}{2}$, also $n = 2y$, dann ist $n \to \infty$ gleichbedeutend mit $y \to \infty$ und damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{3}} = \lim\limits_{y\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{\frac{2}{3}y} = \lim\limits_{y\to\infty} \left(\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)^{\frac{2}{3}} \overset{\text{Stetigk.}}{=} \left(\lim\limits_{y\to\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y\right)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{e^2}$.

3 Grenzwerte von rekursiv definierten Folgen

(vgl. Skript S. 17)

3.1 Verfahren

Eine Folge wird rekursiv definiert, indem man einen (oder mehrere) Startwert(e) (z. B. a_1) explizit vorgibt und dann eine Vorschrift angibt, wie man a_{n+1} aus a_n (und evtl. auch noch a_{n-1}, $a_{n-2}, \ldots$) berechnet. Soll ein Grenzwert bestimmt werden, so muß zunächst die Konvergenz der Folge gezeigt werden. Dazu benutzt man meistens den Satz von Bolzano-Weierstraß, das heißt, man zeigt, daß die Folgt beschränkt und monoton ist (meistens durch vollständige Induktion), und weiß damit, daß der Grenzwert existiert. Indem man nun den Grenzwert von (a_{n+1}) betrachtet (dieser muß derselbe sein wie der von (a_n)), erhält man eine implizite Gleichung für den

Grenzwert, die man dann nach diesem auflösen kann.
Ist die Folge nicht von vorneherein monoton, so muß man sie eventuell in (monotone) Teilfolgen aufspalten und die Betrachtung für jede Teilfolge einzeln machen.

3.2 Beispiele

a) Die Folge (a_n) sei rekursiv gegeben durch $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n}$. Konvergiert diese Folge, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?
1. Schritt: Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 \leqslant a_n \leqslant 2$.
(IA) $n = 1$: $1 \leqslant a_1 = 2 \leqslant 2$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}$ und gelte $1 \leqslant a_n \leqslant 2$ für dieses n.
(IS) Dann ist $1 = \sqrt{1} \leqslant \sqrt{a_n} = a_{n+1} \leqslant \sqrt{2} < 2$.
Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.
2. Schritt: Zeige, daß (a_n) monoton fallend ist, also $a_{n+1} \leqslant a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Wegen $a_n \geqslant 1$ ist $a_{n+1} = \sqrt{a_n} \leqslant a_n$, also ist Monotonie gezeigt.
3. Schritt: (a_n) besitzt als beschränkte, monotone Folge nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß einen Grenzwert. Mit $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ erhält man $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} \overset{\text{Stetigk.}}{=} \sqrt{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{a}$, also muß der Grenzwert entweder 0 oder 1 sein, da dies die einzigen Lösungen der Gleichung $a = \sqrt{a}$ sind. Da alle Folgenglieder größer/gleich 1 sind, kann 0 nicht Grenzwert sein, also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Die Folge (a_n) sei rekursiv gegeben durch $a_0 = 0$, $a_{n+1} = \dfrac{1-a_n}{2}$. Konvergiert diese Folge, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?
Durch scharfes Hinsehen (oder durch Berechnung der ersten fünf, sechs Folgenglieder) sieht man, daß die Folge in zwei monotone Teilfolgen zerfällt, nämlich $(a_{2n})_n$ und $(a_{2n+1})_n$. Die Eigenschaften dieser Teilfolgen werden nun formal gezeigt:
1. Schritt: Zeige, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt: $0 \leqslant a_{2n} \leqslant \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3} \leqslant a_{2n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
(IA) $n = 0$: Es ist $0 \leqslant 0 = a_n \leqslant \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3} \leqslant \frac{1}{2} = a_1 \leqslant \frac{1}{2}$.
(IV) Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und gelte $0 \leqslant a_{2n} \leqslant \frac{1}{3}$ und $\frac{1}{3} \leqslant a_{2n+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
(IS) Dann gilt $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1-\frac{1}{3}}{2} \geqslant \dfrac{1-a_{2n+1}}{2} = a_{2n+2} = a_{2(n+1)} \geqslant \dfrac{1-\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} > 0$ und $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1-0}{2} \geqslant \dfrac{1-a_{2n+2}}{2} = a_{2n+3} = a_{2(n+1)+1} \geqslant \dfrac{1-\frac{1}{3}}{2} = \dfrac{1}{3}$, was die Aussage für $n+1$ ist.
Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung.
2. Schritt: Zeige, daß $(a_{2n})_n$ monoton steigend und $(a_{2n+1})_n$ monoton fallend ist.
Es ist $a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = \dfrac{1-a_{2n+1}}{2} = \dfrac{1-\frac{1-a_{2n}}{2}}{2} = \dfrac{2-1+a_{2n}}{4} = \dfrac{1+a_{2n}}{4} \geqslant a_{2n} \quad \Leftrightarrow$ $1 + a_{2n} \geqslant 4a_{2n} \Leftrightarrow 1 \geqslant 3a_{2n}$, was wegen $a_{2n} \leqslant \frac{1}{3}$ erfüllt ist, also ist $(a_{2n})_n$ monoton steigend.
Weiterhin ist $a_{2(n+1)+1} = a_{2n+3} = \dfrac{1+a_{2n+1}}{4} \leqslant a_{2n+1} \Leftrightarrow 1 + a_{2n+1} \leqslant 4a_{2n+1} \Leftrightarrow 1 \leqslant 3a_{2n+1}$, was wegen $a_{2n+1} \geqslant \frac{1}{3}$ immer erfüllt ist, also ist $(a_{2n+1})_n$ monoton fallend.
3. Schritt: $(a_{2n})_n$ und $(a_{2n+1})_n$ besitzen als beschränkte, monotone Folgen einen Grenzwert. Setze $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$, man erhält dann $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a_{2n}}{4} \overset{\text{GWS}}{=} \dfrac{1+a}{4}$, und da $a = \dfrac{1}{3}$ einzige Lösung dieser Gleichung ist, muß $\frac{1}{3}$ Grenzwert der Folge a_{2n} sein. Nun setze $a' := \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$, es ergibt sich $a' = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2(n+1)+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+a_{2n+1}}{4} \overset{\text{GWS}}{=} \dfrac{1+a'}{4}$, und wie vorher erhält man $a' = \frac{1}{3}$. Da nun jedes Folgenglied in einer Teilfolge auftritt und

beide Teilfolgen gegen denselben Grenzwert konvergieren, muß auch $(a_n)_n$ konvergent gegen diesen Grenzwert sein. Damit ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$ gezeigt.

c) Die Folge (a_n) sei rekursiv gegeben durch $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{n+1}$. Konvergiert diese Folge, und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?
Diese Folge konvergiert nicht, denn es handelt sich hierbei um die harmonische Reihe.

4 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

(vgl. Skript S. 23 ff., 43 f.; Übungen 4, 5 und 6)

4.1 Verfahren

Grenzwerte von Funktionen werden im Prinzip genauso berechnet wie Grenzwerte von Folgen, es stehen also auch Grenzwertsätze und das Stetigkeitsargument zur Verfügung. Als zusätzliches wichtiges Hilfsmittel tritt noch die Regel von L'Hospital hinzu, die angewendet werden kann, wenn bei einem Bruch Zähler und Nenner beide gegen 0 streben oder der Nenner gegen $\pm\infty$ geht. Dann kann man Zähler und Nenner ableiten, ohne das sich der Grenzwert ändert. Weiterhin gibt es noch Aussagen über das Wachstumsverhalten von Funktionen, die ebenfalls Informationen über bestimmte Grenzwerte liefern.
Stetigkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ kann man meist in fast allen Punkten von D mit „In $D \setminus \{x_1; x_2; \dots\}$ ist D als Verknüpfung/Verkettung elementarer Funktionen stetig" begründen, es verbleibt dann nur noch, die (Un-)Stetigkeit von f in den übrigen Punkten x_i mit dem ε-δ-Kriterium oder der (Un-)Gleichheit von $f(x_i)$, $\lim\limits_{x\downarrow x_i} f(x)$ und $\lim\limits_{x\uparrow x_i} f(x)$ zu zeigen.

4.2 Wachstumsverhalten von Funktionen

a) „Die Exponentialfunktion wächst stärker als jede Potenzfunktion mit positivem Exponenten."
Diese Aussage besagt in exakter Formulierung: (1) Für $a > 0$ existiert zu jedem (beliebig großen) $c > 0$ ein $M \in \mathbb{R}$, so daß $\exp(x) > cx^a$ für alle $x > M$ ist und (2) Für $a > 0$ existiert zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{R}$, so daß $x^a \exp(x) < \varepsilon$ für alle $x < M$ ist. In Grenzwertschreibweise erhält man $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^a}{\exp(x)} = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} x^a \exp(x) = 0$.

b) „Der Logarithmus log wächst schwächer als jede Potenzfunktion mit positivem Exponenten."
In exakter Formulierung bedeutet dies: (1) Für $a > 0$ existiert zu jedem (beliebig großen) $c > 0$ ein $M \in (0; \infty)$, so daß $x^a > c \log x$ für alle $x > M$ ist und (2) Für $a > 0$ existiert zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ ein $M \in (0; \infty)$, so daß $x^a \log(x) < \varepsilon$ für alle $0 < x < M$ ist.
In Grenzwertschreibweise: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log x}{x^a} = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} x^a \log x = 0$.

4.3 Elementare stetige Funktionen

a) Konstante Funktionen: $x \mapsto c$, $c \in \mathbb{R}$

b) Potenzfunktionen: $x \mapsto x^a$, wobei a eine positive reelle Zahl oder $0, -1, -2, \dots$ sein kann (darunter fällt insbesondere auch die Wurzelfunktion mit $a = \frac{1}{2}$)

c) Winkelfunktionen: sin, cos, tan

d) Exponentialfunktion: exp

e) Umkehrfunktionen: arcsin, arccos, arctan und log.

4.4 Beispiele

a) Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Durch mehrmalige Anwendung der Regel von L'Hospital erhält man $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x} \underset{\text{GWS}}{\overset{\text{Stetigk.}}{=}} \frac{0}{1+1-0} = 0.$

b) Bestimme den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\cdot(\log\sin x - \log\cos x)$.

Es ist $\tan x\cdot(\log\sin x-\log\cos x) = \tan x\cdot\left(\log\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \tan x\cdot\log\tan x$. Da für $x\to 0$ auch $\tan x$ gegen 0 geht, kann man $y=\tan x$ substituieren und y gegen 0 gehen lassen. Dann ist $\lim\limits_{x\to 0}\tan x\cdot(\log\sin x-\log\cos x) = \lim\limits_{y\to 0} y\log y = 0$ nach 4.2 b).

c) Bestimme den Grenzwert von $\frac{3^x-2^x}{x}$ für $x\to 0$.

Nach L'Hospital ist $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x} \overset{„\frac{0}{0}“}{=} \lim\limits_{x\to 0}\frac{3^x\log 3 - 2^x\log 2}{1} = \log 3 - \log 2.$

d) Untersuche $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x-\lfloor x\rfloor$ auf Stetigkeit.
In $x_0\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ sind sowohl $x\mapsto x$ als auch $x\mapsto\lfloor x\rfloor$ stetig, also ist auch f in x_0 stetig. Zu $x_0\in\mathbb{Z}$ betrachte die Folge (x_n) mit $x_n = x_0-\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Es ist $f(x_n) = x_0-\frac{1}{n}-\lfloor x-\frac{1}{n}\rfloor = x_0-\frac{1}{n}-(x_0-1)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1\neq 0 = f(x_0)$, also ist f in x_0 nicht stetig.

e) Untersuche $f:[0;\infty)\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x)=\begin{cases} x^x & \text{für } x>0\\ 1 & \text{für } x=0.\end{cases}$$

auf Stetigkeit.
$f(x)=x^x=\exp(x\log x)$, also ist f auf $(0;\infty)$ als Verknüpfung und Verkettung stetiger Funktionen stetig. Nun ist $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x\downarrow 0}\exp(x\log x) \overset{\text{Stetigk.}}{=} \exp(\lim\limits_{x\downarrow 0} x\log x)$. Da der Logarithmus schwächer gegen $-\infty$ geht als x gegen 0, muß gelten $\lim\limits_{x\downarrow 0} x\log x = 0$ und damit $\lim\limits_{x\downarrow 0} f(x) = \exp 0 = 1 = f(1)$. Damit ist f stetig auf seinem Definitionsbereich.

5 Identitätsbeweise mit Differentiation

(vgl. Übung 12)

5.1 Verfahren

Gegeben sind hier zwei Funktionen f und g. Es soll entweder gezeigt werden, daß $f(x)=g(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$ gilt oder daß es eine Konstante $c\in\mathbb{R}$ gibt mit $f(x)=g(x)+c$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Dazu zeigt man, daß $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und berechnet dann $c = g(x_0) - f(x_0)$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$, das möglichst so gewählt sein sollte, daß $f(x_0)$ und $g(x_0)$ leicht berechnet werden können. Ist $c = 0$, so hat man Gleichheit gezeigt.

5.2 Beispiele

a) Zeige durch Ableiten, daß $\cos^2 x = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$ gilt.
Setze $f(x) = \cos^2 x$ und $g(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2}$. Es ist $f'(x) = (\cos^2 x)' = -2\cos x \sin x$ und $g'(x) = (\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{2})' = -\frac{1}{2} \cdot 2\sin(2x) = -\sin(2x)$. Nach den Additionstheoremen ist $\sin(2x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2\cos x \sin x$, also ist $f'(x) = g'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen $g(0) - f(0) = \frac{1}{2}\cos(2 \cdot 0) + \frac{1}{2} - \cos^2 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gezeigt.

b) Zeige: Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\arctan x = c - \arctan \frac{1}{x}$ für alle $x > 0$. Berechne c.
Setze $f(x) = \arctan x$ und $g(x) = -\arctan \frac{1}{x}$. Dann ist $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ und $g'(x) = -\dfrac{1}{1+(\frac{1}{x})^2}\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = \dfrac{1}{x^2+1} = f'(x)$. Damit können sich $f(x)$ und $g(x)$ nur um eine additive Konstante unterscheiden, die für alle $x \in \mathbb{R}$ gleich ist. Nun ist $c = g(1) - f(1) = -\arctan \frac{1}{1} - \arctan 1 = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, also gilt insgesamt: $\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$ für $x > 0$.

6 Integrationstricks

6.1 Beliebte Integrale und Substitutionen

Folgende Integrale sind sehr beliebt und treten auch oft nach Substitutionen auf:

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x,$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x.$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x.$

d) $\displaystyle\int 1 + \tan^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x.$

Der folgende Spezialfall der Substitutionsregel ist ebenfalls oft hilfreich:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \log|f(x)|.$$

Bei Integralen, die $\sqrt{a-x^2}$ enthalten, bietet es sich oft an, $x = \sqrt{a}\,\sin y$ zu substituieren.

6.2 Wichtige Identitäten der Winkelfunktionen

a) $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

b) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

c) $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

d) $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$

e) $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

f) $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$

g) $\cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$

6.3 Bemerkungen zu uneigentlichen Integralen

Für Konvergenzuntersuchungen bei uneigentlichen Integralen gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Bestimmung des Integralwertes für eine variable Unter-/Obergrenze (abhängig von der Lage der „uneigentlichen Stelle“) und dann Berechnung des Grenzwertes,

2. theoretische Konvergenzuntersuchung mit Majoranten-/Minorantenkriterium, Vergleichskriterium oder ähnlichem.

Handelt es sich dem um ein doppelt-uneigentliches Integral, so ist das Integral an einer Zwischenstelle zu zerlegen. Beide Integrale müssen getrennt auf Konvergenz untersucht werden, dabei ist das ursprüngliche Integral genau dann konvergent, wenn beide Teilintegrale konvergieren.

7 Konvergenz von Reihen

(vgl. Skript S. 64 ff., Übung 9)

7.1 Verfahren

Es sei $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ eine Reihe. Die wichtigsten Kriterien für die Konvergenzeigenschaft dieser Reihe sind in der folgenden Übersicht zusammengefaßt. Die Tabelle ist so zu lesen, daß wenn eins der angegebenen Kriterien erfüllt ist, die Reihe den darüberstehenden Konvergenztyp (bzw. einen der darüberstehenden Konvergenztypen) hat.

absolut konvergent	bedingt konvergent	divergent
		$(a_k)_k$ ist keine Nullfolge
$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left\lvert \frac{a_{k+1}}{a_k} \right\rvert < 1$		$\underline{\lim\limits_{k\to\infty}} \left\lvert \frac{a_{k+1}}{a_k} \right\rvert > 1$
$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\lvert a_k \rvert} < 1$		$\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\lvert a_k \rvert} > 1$
Es existiert eine konvergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall\, k > k_0 : \lvert a_k \rvert \leqslant b_k$		Es existiert eine divergente Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \lvert b_k \rvert$ und $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $\forall\, k > k_0 : \lvert a_k \rvert \geqslant \lvert b_k \rvert$
$a_k = (-1)^k b_k$, wobei $(b_k)_k$ eine monoton fallende Nullfolge ist		

8 Konvergenz von Potenzreihen

(vgl. Skript S. 78 ff.; Übungen 10 und 11)

8.1 Verfahren

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe, so läßt sich der Konvergenzradius R mit $R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|a_k|}}$ oder $R = \lim\limits_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$ berechnen. Der Konvergenzradius R besagt nun, daß die Reihe für $x \in (x_0 - R; x_0 + R)$ absolut konvergiert und für $x \notin [x_0 - R; x_0 + R]$ divergiert. Über die Punkte $x = x_0 - R$ und $x = x_0 + R$ wird keine Aussage gemacht, das heißt, um alle $x \in \mathbb{R}$ zu finden, für die eine Potenzreihe konvergiert, bestimmt man den Konvergenzradius und überprüft dann diese zwei Punkte gesondert (man beachte: Wurzel- und Quotientenkriterium sind in den Randpunkten nutzlos).

8.2 Beispiele

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} x^n$?

Bestimmung des Konvergenzradius mit Wurzelkriterium: $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{n+1}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{\frac{n+1}{n}}} \overset{\text{Stetigk.}}{=} \frac{1}{2}$, also ist $R = 2$. Da die Potenzreihe den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ hat, konvergiert sie für $x \in (-R; R) = (-2; 2)$ absolut und divergiert für $x < -2$ oder $x > 2$.

Untersuchung der Randpunkte: $x = -2$: Hier lautet die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} = \infty$, also ist die Reihe hier nicht konvergent.

$x = 2$: Hier lautet die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} 2^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2}$. Diese Reihe ist nicht konvergent, da $\frac{(-1)^n}{2}$ keine Nullfolge ist.

Insgesamt konvergiert die Potenzreihe damit für $x \in (-2; 2)$, während sie für alle anderen Werte von x divergiert.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(x-3)^n$?

Bestimmung des Konvergenzradius mit Quotientenkriterium: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \frac{n+2}{\sqrt{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot \frac{n+2}{n+1} \underset{\text{GWS}}{\overset{\text{Stetigk.}}{=}} 1 \cdot 1 = 1$. Die Potenzreihe hat den Entwicklungspunkt $x_0 = 3$, also konvergiert die Potenzreihe für $x \in (3-R; 3+R) = (2; 4)$ absolut und divergiert für $x < 2$ oder $x > 4$.

Untersuchung der Randpunkte: $x = 2$: Hier lautet die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(2-3)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1}(-1)^n$. Betrachte den Quotienten $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n+1}}{n+2} \cdot \frac{n+1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{(n+1)(n+1)^2}{(n+2)^2 n}} =$

$\sqrt{\dfrac{n^3+3n^2+3n+1}{n^3+4n^3+4n}} < 1$, da der Term unter der Wurzel kleiner als 1 ist. Damit ist (a_n) monoton fallend. Weiterhin ist $a_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = \dfrac{\sqrt{n}\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, also ist a_n eine monoton fallende Nullfolge, womit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}(-1)^n$ nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert.

$x = 4$: Hier lautet die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}(4-3)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$. Es ist $\dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = \dfrac{n}{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n}} > \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \dfrac{1}{2n}$, und da $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ und damit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n}$ als harmonische Reihe divergiert, muß auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$ nach dem Minorantenkriterium divergieren.

Insgesamt erhält man, daß die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}(x-3)^n$ für $x \in [2;4)$ konvergiert und für alle anderen Werte von x divergiert.

c) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{2^n}(x+1)^n$?

Bestimmung des Konvergenzradius mit Quotientenkriterium: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\log n}{2^n} \cdot \dfrac{2^{n+1}}{\log(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\dfrac{\log n}{\log(n+1)} \overset{„\frac{\infty}{\infty}“}{=} \lim\limits_{n\to\infty} 2\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} 2\dfrac{n+1}{n} = 2$. Die Potenzreihe hat den Entwicklungspunkt $x_0 = -1$, also konvergiert die Potenzreihe für $x \in (-1-R; -1+R) = (-3;1)$ absolut und divergiert für $x < -3$ oder $x > 1$.

Untersuchung der Randpunkte: $x = -3$: Hier lautet die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{2^n}(-3+1)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{2^n}(-2)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \log n$. Diese Reihe ist divergent, da $(-1)^n \log n$ keine Nullfolge ist.

$x = 1$: Hier lautet die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{2^n}(1+1)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{2^n}2^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \log n$. Diese Reihe ist ebenfalls divergent, da $\log n$ keine Nullfolge ist.

Insgesamt ist damit gezeigt, daß die Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\log n}{2^n}(x+1)^n$ für $x \in (-3;1)$ konvergiert und für alle anderen Werte von x divergiert.