RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

LEHRSTUHL FÜR INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de

Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen* – Blatt 1

Abgabe am Freitag, 27.4.2001, vor der Zentralübung.

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)

Beweisen Sie durch Induktion:

a) $(w^R)^R = w$ für alle $w \in \Sigma^*$.
b) $(w^R)^n = (w^n)^R$ für alle $w \in \Sigma^*$ und $n \geq 0$.

Aufgabe 2 (3 + 2 Punkte)

a) Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, daß aus $L_1 \subseteq L_2$ folgt $L_1^* \subseteq L_2^*$.
b) Folgern Sie, daß für alle $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ gilt: $L_1^* \cup L_2^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$

Aufgabe 3 (2 + 2 + 3 Punkte)

Geben Sie reguläre Ausdrücke $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \text{RegE}(\{0,1\})$ an, so daß gilt:

a) $[\![\alpha_1]\!] = \{w \in \{0,1\}^* \mid \text{in } w \text{ folgt auf } 00 \text{ stets } 11\}$
b) $[\![\alpha_2]\!] = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 \text{ ist geradzahlig oder } |w|_1 \text{ ist durch 3 teilbar}\}$
c) $[\![\alpha_3]\!] = \{w \in \{0,1\}^* \mid |w|_0 = |w|_1 \text{ und } \forall v \in \mathit{Prf}(w) : |v|_0 \leq |v|_1 + 1 \text{ und } |v|_1 \leq |v|_0 + 1\}$

$\mathit{Prf}(w) := \{u \in \Sigma^* \mid \exists v \in \Sigma^* : uv = w\}$ bezeichne dabei die Menge der Präfixe eines Wortes $w \in \Sigma^*$, und $|w|_a$ bezeichne die Anzahl der Vorkommen des Buchstabens a in w.

Aufgabe 4 (1 + 2 + 2 Punkte)

Die Sternhöhe $sh(\alpha)$ eines regulären Ausdrucks $\alpha \in \text{RegE}(\Sigma)$ sei induktiv wie folgt definiert:

- $sh(\Lambda) = sh(a) = 0$ für alle $a \in \Sigma$
- $sh((\alpha \vee \beta)) = sh((\alpha \cdot \beta)) = max(sh(\alpha), sh(\beta))$
- $sh((\alpha^*)) = sh(\alpha) + 1$

Finden Sie zu den folgenden regulären Ausdrücken äquivalente reguläre Ausdrücke geringerer Sternhöhe.

a) $\alpha_1 = ((ab)^* \vee (ba)^*)^*$
b) $\alpha_2 = (a(b^*c)^*)^*$
c) $\alpha_3 = ((abc)^*ab)^*$

RWTH RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

LEHRSTUHL FÜR INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de

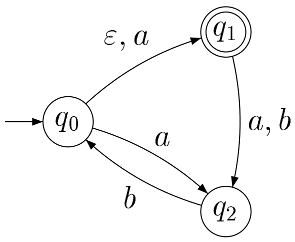
Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen* – Blatt 2

Abgabe am Freitag, 4.5.2001, vor der Zentralübung.

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle \in \mathrm{NFA}(\{a, b\})$ durch seinen Zustandsgraphen wie folgt gegeben:



Geben Sie Transitionstafel und Zustandsgraphen des Automaten $\mathfrak{A}^P$ an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle \in \mathrm{NFA}(\Sigma)$, und sei $\mathfrak{A}^P = \langle \widehat{Q}, \Sigma, \widehat{\delta}, \widehat{q_0}, \widehat{F}\rangle \in \mathrm{DFA}(\Sigma)$ der Potenzmengenautomat von $\mathfrak{A}$. Zeigen Sie, daß für alle $w \in \Sigma^*$ und $T \in \widehat{Q}$ gilt:

$$\overline{\widehat{\delta}}(T, w) = \overline{\delta}(T, w)$$

Aufgabe 3 (4 + 4 Punkte)

Seien $\mathfrak{A}_1 = \langle Q_1, \Sigma, \delta_1, q_0^1, F_1\rangle$ und $\mathfrak{A}_2 = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2\rangle$, $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, deterministische endliche Automaten über Σ. Konstruieren Sie einen Automaten $\mathfrak{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F\rangle \in \mathrm{DFA}(\Sigma)$, so daß

a) $L(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{A}_1)L(\mathfrak{A}_2)$.
b) $L(\mathfrak{A}) = \mathit{Pref}(L(\mathfrak{A}_1))$.

Für eine Sprache L sei dabei $\mathit{Pref}(L) := \bigcup_{w \in L} \mathit{Prf}(w)$, wobei $\mathit{Prf}(w)$ definiert ist wie auf Übungsblatt 1.

Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

LEHRSTUHL FÜR INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de

Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen* – Blatt 3

Abgabe am Freitag, 11.5.2001, vor der Zentralübung.

Hinweis: Am Freitag, dem 11.5.2001, findet von 14:00 bis 15:30 Uhr im Roten Hörsaal eine zusätzliche Vorlesung statt.

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)

Konstruieren Sie nach dem Algorithmus von Thompson zu den regulären Ausdrücken

$\alpha_1 = (a^* \vee b^*)c^*$ und

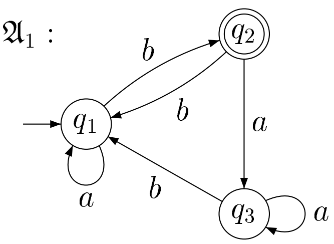
$\alpha_2 = ((a \vee b)^*(\Lambda^* \vee c)^*)^*$

die nichtdeterministischen endlichen Automaten $\mathfrak{A}(\alpha_1)$ und $\mathfrak{A}(\alpha_2)$.

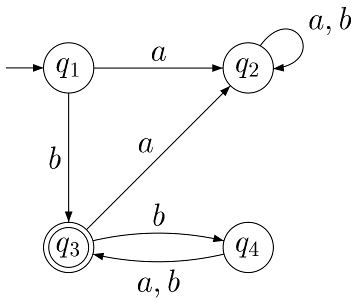
Aufgabe 2 (3 + 3 Punkte)

Die Automaten $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathrm{DFA}(\{a, b\})$ seien durch ihre Zustandsgraphen wie folgt gegeben:

$\mathfrak{A}_1$:



$\mathfrak{A}_2$:



Geben Sie unter Berechnung entsprechender W_{ij}^k-Mengen reguläre Ausdrücke α_1 und α_2 an, so daß $L(\mathfrak{A}_1) = [\![\alpha_1]\!]$ und $L(\mathfrak{A}_2) = [\![\alpha_2]\!]$.

Aufgabe 3 (4 + 4 + 4 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie die Regularität der folgenden Sprachen (mit Hilfe des Pumping-Lemmas bzw. durch Angabe eines endlichen Automaten):

a) $L_1 = \{a^m b a^n b a^{m+n} \mid m, n \geq 0\}$

b) $L_2 = \{w \in \{a, b\}^* \mid w^R = w\}$

c) $L_3^n = \{w \in \{a, b\}^* \mid (|w| < n \text{ und } |w|_a = |w|_b) \text{ oder } (w = uv,\ |v| = n, \text{ und } |v|_a = |v|_b)\}$ für $n \geq 0$

Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen* – Blatt 4

Abgabe am Freitag, 18.5.2001, vor der Zentralübung.

Aufgabe 1 (3 + 3 Punkte)

Konstruieren Sie zu Automaten $\mathfrak{A}_i = \langle Q_i, \Sigma, \delta_i, q_0^i, F_i \rangle \in \mathrm{DFA}(\Sigma)$, $i = 1, 2$, *direkt* (d.h. ohne Umweg über einen NFA)

a) einen Automaten $\mathfrak{A}^\cap \in \mathrm{DFA}(\Sigma)$, so daß $L(\mathfrak{A}^\cap) = L(\mathfrak{A}_1) \cap L(\mathfrak{A}_2)$.

b) einen Automaten $\mathfrak{A}^\cup \in \mathrm{DFA}(\Sigma)$, so daß $L(\mathfrak{A}^\cup) = L(\mathfrak{A}_1) \cup L(\mathfrak{A}_2)$.

(*Hinweis:* Parallelverarbeitung)

Erläutern Sie jeweils Ihre Konstruktion.

Aufgabe 2 (4 + 2 Punkte)

Seien Σ_1 und Σ_2 Alphabete, und sei $h : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ ein *Homomorphismus*, d.h. $h(\varepsilon) = \varepsilon$ und für alle Wörter $u, v \in \Sigma_1^*$ gilt: $h(uv) = h(u)h(v)$

a) Zeigen Sie, daß für alle $L \subseteq \Sigma_1^*$ gilt: $L \in \mathcal{L}(\Sigma_1, \mathrm{DFA}) \curvearrowright h(L) \in \mathcal{L}(\Sigma_2, \mathrm{DFA})$.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: Für alle $L \subseteq \Sigma_1^*$ gilt: $L \notin \mathcal{L}(\Sigma_1, \mathrm{DFA}) \curvearrowright h(L) \notin \mathcal{L}(\Sigma_2, \mathrm{DFA})$.

Sei dabei $h(L) := \{h(w) \mid w \in L\}$.

(*Hinweis:* h ist durch $(h(a))_{a \in \Sigma_1}$ bereits eindeutig bestimmt.)

Aufgabe 3 (3 + 3 Punkte)

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Ableitungen, daß die Sprache

$$\{w \in \{(,)\}^* \mid |w|_(= |w|_) \text{ und } \forall v \in \mathit{Prf}(w) : \; |v|_(\geq |v|_)\}$$

der korrekten Klammerausdrücke nicht regulär ist.

b) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 2, daß für alle Alphabete Σ die Sprache $\mathrm{RegE}(\Sigma)$ nicht regulär ist.

Aufgabe 4 **($3+1$ Punkte)**

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{DFA}(\{a, b\})$ durch seine Transitionstafel wie folgt gegeben:

δ	a	b
$\rightarrow q_0$	q_1	q_2
q_1	q_4	q_2
q_2	q_3	q_2
q_3	q_4	q_0
$\Rightarrow q_4$	q_4	q_4

a) Konstruieren Sie mit Hilfe des Markierungsalgorithmus den Faktorautomaten $\mathfrak{A}_{/\sim}$.

b) Weisen Sie die Minimalität des Faktorautomaten nach, indem Sie in einer Tabelle für jedes Zustandspaar $p \neq q$ ein Wort angeben, das belegt, daß p und q nicht äquivalent sind.

Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen* – Blatt 5

Abgabe am Freitag, 25.5.2001, vor der Zentralübung.

Aufgabe 1 $(1 + 1 + 2 + 2$ **Punkte)**

Sei $G = \langle\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S\rangle$ eine kontextfreie Grammatik, wobei P wie folgt gegeben ist:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & aB \mid bA \\ A & \longrightarrow & a \mid aS \mid bAA \\ B & \longrightarrow & b \mid bS \mid aBB \end{array}$$

Geben Sie für das Wort $bbbaabaaab$

a) eine Linksableitung,

b) eine Rechtsableitung und

c) alle Ableitungsbäume an.

d) Welche Sprache erzeugt G?

Aufgabe 2 $(3 + 3 + 3$ **Punkte)**

Geben Sie kontextfreie Grammatiken $G_1, G_2, G_3 \in \mathrm{CFG}(\{a, b\})$ an, so daß

a) $L(G_1) = \{ua^{|u|_a} \mid u \in \{a, b\}^*\}$,

b) $L(G_2) = \{a^m b^n \mid m \leq n \leq 3m\}$ und

c) $L(G_3) = \bigcup_{n=2}^{\infty} [\![(a^*b)^n(b^*a)^n]\!]$.

Begründen Sie jeweils die Korrektheit Ihrer Wahl.

Aufgabe 3 $(4 + 4$ **Punkte)**

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Ist L eine kontextfreie Sprache, so auch $L^R := \{w^R \mid w \in L\}$.

b) Für alle Grammatiken $G = \langle N, \Sigma, P, S\rangle \in \mathrm{CFG}(\Sigma)$ mit

$$P \subseteq N \times (\Sigma^*(N \cup \{\varepsilon\}) \cup N\Sigma^*)$$

ist $L(G)$ regulär.

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

LEHRSTUHL FÜR INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de

Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen* – Blatt 6

Abgabe am Freitag, 1.6.2001, vor der Zentralübung.

Aufgabe 1 (4 + 1 Punkte)

Die Grammatik $G \in \mathrm{CFG}(\{a, b\})$ sei gegeben wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & AbB \\ A & \longrightarrow & aA \mid \varepsilon \\ B & \longrightarrow & aB \mid bB \mid \varepsilon \end{array}$$

a) Zeigen Sie, daß G eindeutig ist.

b) Geben Sie eine mehrdeutige Grammatik $G' \in \mathrm{CFG}(\{a, b\})$ an, so daß $L(G') = L(G)$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Eine Sprache $L \in \mathrm{CFL}(\Sigma)$ heiße *eindeutig*, falls es eine eindeutige Grammatik $G \in \mathrm{CFG}(\Sigma)$ gibt, so daß $L(G) = L$. Andernfalls heiße L *inhärent mehrdeutig*.

Zeigen Sie, daß jede reguläre Sprache eine eindeutige kontextfreie Sprache ist.

Aufgabe 3 (1 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Die Grammatik $G \in \mathrm{CFG}(\{(,), +, a\})$ sei gegeben wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & S + A \mid A \\ A & \longrightarrow & (S) \mid B \\ B & \longrightarrow & aB \mid \varepsilon \end{array}$$

a) Zeigen Sie, daß $L(G) \neq \emptyset$.

b) Prüfen Sie, ob $()() \in L(G)$.

c) Transformieren Sie G in eine äquivalente ε-freie Grammatik G'.

d) Transformieren Sie G' in eine äquivalente Grammatik G'' ohne Kettenregeln.

e) Transformieren Sie G'' in eine äquivalente Grammatik G''' in Chomsky-Normalform.

Bearbeiten Sie die Aufgabenteile unter Verwendung der Vorgängerabschluß-Methode. Geben Sie zu jedem Vorgängerabschluß jeweils den entsprechenden NFA an.

Aufgabe 4 (4 + 4 + 1 **Punkte)**

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für kontextfreie Sprachen, daß die Sprache $L_1 = \{ww^Rw \mid w \in \{a,b\}^*\}$ nicht kontextfrei ist.

b) Zeigen Sie explizit, daß die Sprache $L_2 = \{a^m b^n c^i \mid m,n,i \in \mathbb{N},\ m+n=i\}$ die im Pumping-Lemma für kontextfreie Sprachen geforderten Eigenschaften besitzt.

c) Ist damit gezeigt, daß L_2 kontextfrei ist?

RWTH RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

LEHRSTUHL FÜR INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de

Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen* – Blatt 7

Abgabe am Freitag, 15.6.2001, vor der Zentralübung.

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Seien $\mathfrak{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\rangle \in \mathrm{PDA}(\Sigma)$ ein Kellerautomat,

$$\begin{aligned} L(\mathfrak{A}, \mathrm{F}) &:= \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha),\ q \in F,\ \alpha \in \Gamma^*\}, \\ L(\mathfrak{A}, \varepsilon) &:= \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon),\ q \in Q\} \text{ und} \\ L(\mathfrak{A}, \mathrm{F}, \varepsilon) &:= \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon),\ q \in F\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{L}(\Sigma, \mathrm{PDA}, \mathrm{F})$, $\mathcal{L}(\Sigma, \mathrm{PDA}, \varepsilon)$ und $\mathcal{L}(\Sigma, \mathrm{PDA}, \mathrm{F}, \varepsilon)$ bezeichnen die jeweiligen Sprachklassen.

Zeigen Sie: $\mathcal{L}(\Sigma, \mathrm{PDA}, \mathrm{F}) = \mathcal{L}(\Sigma, \mathrm{PDA}, \varepsilon) = \mathcal{L}(\Sigma, \mathrm{PDA}, \mathrm{F}, \varepsilon)$

Aufgabe 2 (3 + 2 Punkte)

Sei $G \in \mathrm{CFG}(\{a, b, c, d\})$ gegeben wie folgt:

$$\begin{array}{lcl} S & \longrightarrow & aSd \mid A \mid C \\ A & \longrightarrow & aAc \mid B \\ B & \longrightarrow & bBc \mid \varepsilon \\ C & \longrightarrow & bCd \mid B \end{array}$$

a) Konstruieren Sie nach dem Verfahren der Vorlesung den Automaten $\mathfrak{A}_G \in \mathrm{PDA}(\{a, b, c, d\})$, für den gilt $L(\mathfrak{A}_G, \varepsilon) = L(G)$.

b) Geben Sie für das Wort *abbcdd* sowohl eine Ableitung in der Grammatik als auch eine akzeptierende Berechnung des Kellerautomaten $\mathfrak{A}_G$ an.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F\rangle \in \mathrm{PDA}(\Sigma)$ ein Kellerautomat mit *beschränktem Keller*, d.h. es existiere ein $n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $w, v \in \Sigma^*, q \in Q, \alpha \in \Gamma^*$ gilt:

$$(q_0, w, Z_0) \vdash^* (q, v, \alpha) \quad \curvearrowright \quad |\alpha| \leq n$$

Zeigen Sie, daß $L(\mathfrak{A}, \mathrm{F})$, $L(\mathfrak{A}, \varepsilon)$ und $L(\mathfrak{A}, \mathrm{F}, \varepsilon)$ regulär sind.

Sonderaufgabe 1 **($3 + 2$ Punkte)**

a) Geben Sie einen Automaten $\mathfrak{A} \in \mathrm{PDA}(\{a, b\})$ an, so daß

$$L(\mathfrak{A}, \varepsilon) = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{a^n b^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Begründen Sie die Korrektheit Ihrer Konstruktion.

b) Geben Sie eine akzeptierende sowie eine mit nicht-leerem Keller abbrechende Berechnung Ihres Automaten für das Eingabewort $aabb$ an.

Sonderaufgabe 2 **($2 + 3$ Punkte)**

Ziel dieser Aufgabe ist der Nachweis, daß für deterministische Kellerautomaten (im Gegensatz zu beliebigen Kellerautomaten) nicht alle Erkennungsarten gleich mächtig sind. Sei dazu im folgenden $L := \{\varepsilon, a\}$.

a) Zeigen Sie, daß L deterministisch kontextfrei ist, indem Sie einen deterministischen Kellerautomaten $\mathfrak{A} \in \mathrm{DPDA}(\{a\})$ angeben, so daß $L(\mathfrak{A}, \mathrm{F}) = L$.

b) Zeigen Sie, daß kein Automat $\mathfrak{A} \in \mathrm{DPDA}(\{a\})$ existiert, so daß $L(\mathfrak{A}, \varepsilon) = L$.

Terminübersicht Diplom-Vorprüfung

11. Juni – 13. Juni Anmeldung zur Diplom-Vorprüfung im Zentralen Prüfungsamt

18. Juni + 19. Juni Anmeldung zur Diplom-Vorprüfung im Zentralen Prüfungsamt

18. Juli: Scheinklausur

20. Juli: Bekanntgabe der Klausurergebnisse, Scheinausgabe

17. August: Diplom-Vorprüfung, 9:00 Uhr bis 12:00 Uhr, Aula 2, AH IV, AH V

22. August: Bekanntgabe der Ergebnisse der Diplom-Vorprüfung

Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen* – Blatt 8

Abgabe am Freitag, 22.6.2001, vor der Zentralübung.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ habe die *Präfix-Eigenschaft*, wenn für alle $u, v \in L$ gilt:

$$u \neq v \;\curvearrowright\; u \notin \mathit{Prf}(v)$$

Zeigen Sie, daß für alle $\mathfrak{A} \in \mathrm{DPDA}(\Sigma)$ die Sprache $L(\mathfrak{A}, \varepsilon)$ die Präfix-Eigenschaft hat.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: $L = \{a^i b^j c^k \mid i, j, k \in \mathbb{N} \text{ und } |\{i, j, k\}| > 1\} \notin \mathcal{L}(\{a, b, c\}, \mathrm{DPDA})$

Aufgabe 3 (2 + 2 Punkte)

Die kontextfreie Grammatik G sei gegeben wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & AB \mid BC \\ A & \longrightarrow & BA \mid a \\ B & \longrightarrow & CC \mid b \\ C & \longrightarrow & AB \mid a \end{array}$$

Stellen Sie mit Hilfe des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus fest, ob

a) $baaab \in L(G)$. b) $aabab \in L(G)$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Transformieren Sie mit Hilfe des in der Vorlesung angedeuteten Verfahrens die folgende ECFG in eine äquivalente CFG.

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & V := E \\ & \vee & \text{if } E \text{ then } S \text{ (else } S \vee \Lambda^*) \\ & \vee & \text{begin } S \text{ (; } S)^* \text{ end} \\ & \vee & \text{repeat } S \text{ (; } S)^* \text{ until } E \\ E & \longrightarrow & V \vee \text{true} \vee \text{false} \\ V & \longrightarrow & \text{x} \vee \text{y} \vee \text{z} \end{array}$$

RHEINISCH-
WESTFÄLISCHE
TECHNISCHE
HOCHSCHULE
AACHEN

LEHRSTUHL FÜR INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de

Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen* – Blatt 9

Abgabe am Freitag, 29.6.2001, vor der Zentralübung.

Aufgabe 1 ($1+4$ Punkte)

Sei die Chomsky-Grammatik $G = \langle \{S, B, C, D\}, \{a, b\}, P, S\rangle$ gegeben wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & abB \\ B & \longrightarrow & C \mid aD \\ C & \longrightarrow & Ca \mid \varepsilon \\ D & \longrightarrow & Db \mid \varepsilon \end{array}$$

a) Geben Sie die größte Zahl $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ an mit der Eigenschaft „G ist eine Typ-i-Grammatik". Begründen Sie Ihre Antwort und erläutern Sie, warum Sie nicht $i+1$ anstelle von i angegeben haben.

b) Geben Sie die größte Zahl $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ an mit der Eigenschaft „$L(G)$ ist vom Typ i". Begründen Sie Ihre Antwort und erläutern Sie, warum Sie nicht $i + 1$ anstelle von i angegeben haben.

Aufgabe 2 ($3+4$ Punkte)

Sei die Chomsky-Grammatik $G = \langle \{S, B, C\}, \{a, b, c\}, P, S\rangle$ vom Typ 0 gegeben wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & aSBC \mid \varepsilon \\ aB & \longrightarrow & ab \\ CB & \longrightarrow & BC \\ bB & \longrightarrow & bb \\ bC & \longrightarrow & bc \\ cC & \longrightarrow & cc \end{array}$$

Es gilt $L(G) = \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

a) Normieren Sie G.

b) Bestimmen Sie nach dem Verfahren der Vorlesung (Abschluß unter Substitution) eine Grammatik G', so daß $L(G') = L(G)^*$.

Aufgabe 3 **($5+1$ Punkte)**

Ein Wort $v \in \Sigma^*$ heißt *Permutation* eines Wortes $w \in \Sigma^*$, wenn für alle $a \in \Sigma$ gilt: $|v|_a = |w|_a$

a) Geben Sie ein Verfahren an, das aus einer Typ-0-Grammatik G eine Typ-0-Grammatik G' erzeugt, so daß

$$L(G') = \{v \mid w \in L(G),\ v \text{ ist Permutation von } w\}.$$

b) Erzeugt Ihr Verfahren eine Typ-1-Grammatik, wenn G vom Typ 1 ist?

Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen* – Blatt 10

Abgabe am Freitag, 6.7.2001, vor der Zentralübung.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Geben Sie eine wohldokumentierte erkennende Turingmaschine $\mathfrak{A} \in \mathrm{TM}(\{a\})$ an, so daß

$$L(\mathfrak{A}) = \{a^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Ein Korrektheitsbeweis ist nicht erforderlich.

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Turingmaschinen, die in jedem Schritt nach rechts gehen müssen, d.h. deren Transitionsfunktion vom Typ

$$\delta : Q \times \Gamma \to \mathfrak{P}(Q \times \Gamma \times \{\mathrm{R}\})$$

ist, erkennen genau die regulären Sprachen.

Beweisen Sie eine Hälfte dieser Aussage, indem Sie ein Konstruktionsverfahren angeben, das einen deterministischen endlichen Automaten in eine äquivalente, wie oben angegeben eingeschränkte erkennende Turingmaschine transformiert. Beweisen Sie hierbei auch kurz die Korrektheit ihres Verfahrens.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Box, F, \delta \rangle \in \mathrm{TM}(\Sigma)$ eine erkennende Turingmaschine. Sei außerdem für $w \in \Sigma^*$

$$\mathcal{K}(w) := \begin{cases} \quad \{(q_0, w\Box^n, \Box, \varepsilon) \mid n \in \mathbb{N}\} & \\ \cup \; \{(q_0, \varepsilon, \Box, \Box^n w) \mid n \in \mathbb{N}\} & \text{falls } w \neq \varepsilon \\ \cup \; \{(q_0, u, a, v) \mid w = uav\} & \\ & \\ \quad \{(q_0, \varepsilon, \Box, \varepsilon)\} & \text{falls } w = \varepsilon \end{cases}$$

die *Menge der Startkonfigurationen* von w und ferner

$$\mathcal{L}_{\mathcal{K}}(\mathfrak{A}) := \{w \in \Sigma^* \mid \text{für alle } \kappa \in \mathcal{K}(w) \text{ ex. eine Endkonfiguration } \kappa', \text{ so daß } \kappa \vdash_{\mathfrak{A}}^* \kappa'\}.$$

Definieren Sie nun eine erkennende Turingmaschine $\mathfrak{A} \in \mathrm{TM}(\{\$\})$, so daß

$$L_{\mathcal{K}}(\mathfrak{A}) = \{\$\}^+.$$

RHEINISCH-
WESTFÄLISCHE
TECHNISCHE
HOCHSCHULE
AACHEN

LEHRSTUHL FÜR INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de

Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen* – Blatt 11

Abgabe am Freitag, 13.7.2001, vor der Zentralübung.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Geben Sie eine erkennende Turingmaschine $\mathfrak{A} \in 1\text{-}d\mathrm{TM}$ über dem Alphabet $\{\$\}$ an, so daß

$$L_{\mathcal{K}}(\mathfrak{A}) = \{\$\}^{+}.$$

(Zur Definition von $L_{\mathcal{K}}(\mathfrak{A})$ siehe Blatt 10, Aufgabe 3.)

Aufgabe 2 (6 + 2 + 4 Punkte)

Sei $\mathfrak{A} = \langle Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Box, F, \delta \rangle \in \mathrm{TM}(\Sigma)$, so daß für alle Endkonfigurationen $\kappa \in \mathit{Conf}(\mathfrak{A})$ gilt:

$$\kappa \nvdash_{\mathfrak{A}}$$

(D. h. eine Endkonfiguration hat bzgl. $\vdash_{\mathfrak{A}}$ keine Folgekonfiguration.) Sei ferner $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Funktion, so daß für alle Wörter $w \in L(\mathfrak{A})$ gilt:

$$bv_{\mathfrak{A}}(w) \leq s(|w|)$$

a) Zeigen Sie, daß für alle Wörter $w \in L(\mathfrak{A})$ eine Endkonfiguration κ und eine natürliche Zahl n existieren, so daß

$$\kappa(w) \vdash_{\mathfrak{A}}^{n} \kappa \quad \text{und} \quad n \leq |Q| \cdot s(|w|) \cdot |\Gamma|^{s(|w|)}.$$

b) Was bedeutet das für linear beschränkte erkennende Turingmaschinen?

c) Stellen Sie einen Bezug zur Thematik der Entscheidbarkeit von Sprachen her.

RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN

LEHRSTUHL FÜR INFORMATIK II
RWTH Aachen · D-52056 Aachen · GERMANY
http://www-i2.informatik.rwth-aachen.de

Prof. Dr. K. Indermark
B. Bollig

Übungen *Automatentheorie und Formale Sprachen*
Aufgaben zur Klausurvorbereitung

Aufgabe 1

Beschreiben Sie ein effektives Verfahren, das für reguläre Ausdrücke $\alpha, \beta \in \text{RegE}(\Sigma)$ entscheidet, ob $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!]$. Zeigen Sie auch die Korrektheit Ihres Verfahrens.

Aufgabe 2

Gibt es Sprachen $L_r \in \text{RegL}(\Sigma)$ und $L_c \in \text{CFL}(\Sigma)\backslash\text{RegL}(\Sigma)$, so daß

a) $L_c \subseteq L_r$?

b) $\overline{L_c} = L_r$?

Aufgabe 3

Konstruieren Sie zu einem Kellerautomaten $\mathfrak{A}_1 = \langle Q_1, \Sigma, \Gamma, \delta_1, q_0^1, Z_0, F_1\rangle \in \text{PDA}(\Sigma)$ und einem endlichen Automaten $\mathfrak{A}_2 = \langle Q_2, \Sigma, \delta_2, q_0^2, F_2\rangle \in \text{DFA}(\Sigma)$ einen Kellerautomaten $\mathfrak{A}^\cap \in \text{PDA}(\Sigma)$, so daß $L(\mathfrak{A}^\cap, \text{F}) = L(\mathfrak{A}_1, \text{F}) \cap L(\mathfrak{A}_2)$. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $L \cdot \{\varepsilon, a\}$ eine reguläre Sprache, so ist auch L regulär.

b) Für eine kontextfreie Sprache L ist auch $L\backslash\{\varepsilon\}$ kontextfrei.

c) Für eine Folge $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ von regulären Sprachen über dem Alphabet Σ ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n \subseteq \Sigma^*$ vom Typ 0.