ATFS Übung 1 – 26.4.2001

Matthias Hensler

15. August 2001

Aufgabe 1

1.a

$$\forall\, w \in \Sigma^* : \left(w^R\right)^R = w$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfang: $\left(\varepsilon^R\right)^R = \varepsilon$

Induktionsschluß: (sei $\left(w^R\right)^R = w$)

$$\left((wa)^R\right)^R = \left(a(w^R)\right)^R = (w^R)^R a = wa \quad \square$$

Beachte: $\forall u, v \in \Sigma^* : (uv)^R = v^R u^R$
$(ab\, cd)^R := (cd)^R\, (ab)^R$

1.b

$$\forall w \in \Sigma^*\ (w^R)^n = (w^n)^R$$

Beweis mit vollständiger Induktion:

Induktionsanfgang: $(w^R)^0 = \varepsilon = (w^0)^R$

Induktionsschluß: sei $(w^R)^n = (w^n)^R$

$$(w^R)^{n+1} = w^R (w^R)^n = w^R (w^n)^R = (w^n w)^R = (w^{n+1})^R \quad \square$$

Aufgabe 2

2.a

$$\forall L_1, L_2 \in \Sigma^* : L_1 \subseteq L_2 \curvearrowright {L_1}^* \subseteq {L_2}^*$$

$\curvearrowright \exists n \in \mathbb{N} : w \in {L_1}^n$
$\curvearrowright \exists n_1, \ldots, n_n \in L_1 : w = u_1 \ldots u_n$
$\curvearrowright \exists n_1, \ldots, n_n \in L_2 : w = u_1 \ldots u_n$
$\curvearrowright \exists n \in \mathbb{N} : w \in {L_2}^n$
$\curvearrowright w \in {L_2}^* \quad \square$

2.b

zu zeigen: $L_1{}^* \cup L_2{}^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$

$L_1 \subseteq L_1 \cup L_2$ und $L_2 \subseteq L_1 \cup L_2$
$\overset{a.)}{\curvearrowright} L_1{}^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$ und $L_2{}^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^*$
$\curvearrowright L_1{}^* \cup L_2{}^* \subseteq (L_1 \cup L_2)^* \quad \square$

Aufgabe 3

3.a

$$\alpha_1 = (1 \vee 01 \vee 0011)^*(0 \vee \Lambda^*)$$

3.b

$$\alpha_2 = \beta_1 \vee \beta_2$$

wobei $\beta_1 = (1 \vee 01^*0)^*$ $\beta_2 = (0 \vee 10^*10^*1)^*$

3.c

$$\alpha_3 = (01 \vee 10)^*$$

Aufgabe 4

Gegeben: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathrm{Reg}E$
Gesucht: $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, so daß $\alpha_i \tilde{\beta}_i$, $i = 1,2,3$ und $\mathrm{sh}(\beta_i) < \mathrm{sh}(\alpha_i)$, $[\![\alpha_i]\!] = [\![\beta_i]\!]$

4.a

$$\alpha_1 = ((ab)^* \vee (ba)^*)^*$$
$$\beta_1 = (ab \vee ba)^*$$

4.b

$$\alpha_2 = (a(b^*c)^*)^R$$
$$\beta_2 = \Lambda^* \vee a(a \vee b^*c)^*$$

4.c

$$\alpha_3 = ((abc)^*ab)^*$$
$$\beta_3 = \Lambda^* \vee ((abc \vee ab)^*ab)$$

ATFS Übung 2 – 4.5.2001

geTEXt von Matthias Hensler

15. August 2001

Aufgabe 1

siehe Anhang

$$\hat{Q} = \{\overline{\delta}(\varepsilon\{q_0\}, w) | w \in \Sigma^*\}$$

$$\hat{\delta}(T, a) = \overline{\delta}(T, a) = \varepsilon\left(\bigcup_{q \in T} \delta(q, a)\right)$$

ε-Hülle von q_0: Der Zustand q_0 sowie alle Zustände, die man durch ε-Transitionen von q_0 aus erreichen kann.

Aufgabe 2

$$\mathfrak{A} = < Q, \Sigma, \delta, q_0, F > \in \text{NFA}(\varepsilon)$$

$$\mathfrak{A}^P = < \hat{Q}, \Sigma, \hat{\delta}, \hat{q_0}, \hat{F} > \in \text{DFA}(\varepsilon)$$

$\overline{\delta} : \mathfrak{p}(Q) \times \Sigma^* \to \mathfrak{p}(Q)$
$\subseteq$
$\overline{\hat{\delta}} : \hat{Q} \times \Sigma^* \to \hat{Q}$

zu zeigen: $\forall T \in \hat{Q}, w \in \Sigma^* \ \overline{\hat{\delta}}(T, w) = \overline{\delta}(T, w)$.

Induktionsanfang: $\overline{\hat{\delta}}(T, \varepsilon) = T = \varepsilon(T) = \overline{\delta}(T, \varepsilon)$
Induktionsschluß: (sei $\overline{\hat{\delta}}(T, w) = \overline{\delta}(T, w)$)

$$\overline{\hat{\delta}}(T, wa) = \hat{\delta}(\overline{\hat{\delta}}(T, w), a) = \overline{\delta}(\overline{\hat{\delta}}(T, w), a) =$$

(*Beachte:* $\overline{\delta}(T, wa) = \varepsilon\left(\bigcup_{q \in \overline{\delta}(T,w)} \delta(q, a)\right)$)

$$= \varepsilon\left(\bigcup_{q \in \overline{\delta}(\overline{\hat{\delta}}(T,w),\varepsilon)} \delta(q, a)\right) =$$

$$= \varepsilon\left(\bigcup_{q \in \overline{\hat{\delta}}(T,w)} \delta(q, a)\right) =$$

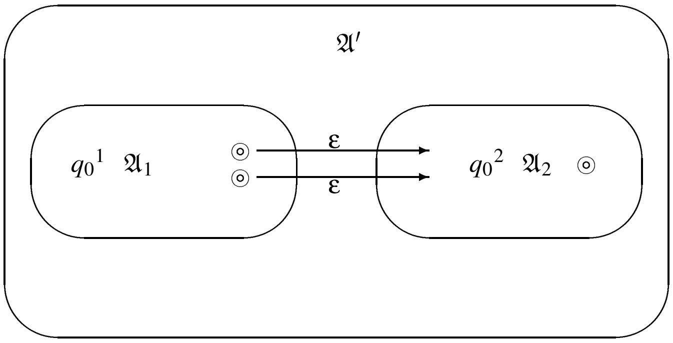
$$= \varepsilon\left(\bigcup_{q \in \overline{\delta}(T,w)} \delta(q, a)\right) = \overline{\delta}(T, wa) \qquad \square$$

Aufgabe 3

Für $i = 1,2$ sei $\mathfrak{A}_i =< Q_i, \Sigma, \delta_i, q_0^i, F_i >\in$ DFA(ε).

3.a

gesucht: $\mathfrak{A} \in$ DFA(ε) : $L(\mathfrak{A}) = L(\mathfrak{A}_1)L(\mathfrak{A}_2)$



$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'^P$$

$$\mathfrak{A}' =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >$$
$$Q = Q_1 \cup Q_2, q_0 = q_0^1, F = F_2$$
$$\delta : Q \times (\varepsilon \vee \{\varepsilon\}) \to \mathfrak{p}(Q)$$

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \{\delta_1(q,a)\} & ,q \in Q_1 \\ \{\delta_2(q,a)\} & ,q \in Q_2 \end{cases}$$

$$\delta(q,\varepsilon) = \begin{cases} \emptyset & ,q \notin F_1 \\ \{{q_0}^2\} & ,q \in F_1 \end{cases}$$

3.b

$$F = \{q \in Q | \overline{\delta}(q,w) \in F_1, w \in \Sigma^*\}$$

Anhang: Folie zu Aufgabe 1 – erstellt vom Lehrstuhl

ATFS Übung 4 – 18.5.2001

geTEXt von Matthias Hensler (mh@wspse.de)

15. August 2001

Aufgabe 1

$$\mathfrak{A}_i = < Q_i, \Sigma, \delta_i, q_0^i, F_i > \in \text{DFA}(\Sigma)$$

1.a

$\mathfrak{A}^\cap = < Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, (q_0^1, q_0^2), F > \in \text{DFA}$

$\delta \begin{cases} (Q_1 \times Q_2) \times \Sigma \to Q_1 \times Q_2 \\ ((q_1, q_2), a) \mapsto (\delta_1(q_1, a), \delta_2(q_2, a)) \end{cases}$

$F = F_1 \times F_2$

1.b

$$F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$$

Aufgabe 2

$$L \in \mathscr{L}(\Sigma_1, \text{DFA})$$

$\curvearrowright \exists \alpha \in \text{Reg}E(\Sigma_1) : [\![\alpha]\!] = L$
$\curvearrowright \exists \alpha \in \text{Reg}E(\Sigma_1) : [\![h(\alpha)]\!] = h(L)$
$\curvearrowright h(L) \in \mathscr{L}(\Sigma_2, \text{DFA})$

$\forall \alpha \in \text{Reg}E(\Sigma_1)\, h([\![\alpha]\!]) = [\![h(\alpha)]\!]$

Induktionsanfang:

- $h([\![\Lambda]\!]) = \emptyset = [\![\Lambda]\!] = [\![h(\Lambda)]\!]$
- $h([\![a]\!]) = h(\{a\}) = \{h(a)\} = [\![h(a)]\!]$

Induktionsschluß: α, β

$$\begin{aligned} h([\![\alpha \vee \beta]\!]) &= h([\![\alpha]\!] \cup [\![\beta]\!]) \\ &= h([\![\alpha]\!]) \vee h([\![\beta]\!]) \\ &= [\![h(\alpha)]\!] \cup [\![h(\beta)]\!] \\ &= [\![\underbrace{h(\alpha) \vee h(\beta)}]\!] \\ &= [\![h(\alpha \vee \beta)]\!] \end{aligned}$$

Aufgabe 3

L_{KL} sei die Menge der korrekten Klammerausdrücke.
zu zeigen: $|D(L_{KL})| = \infty$
Definition: $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}, w_n \in \{(,)\}^*$, durch $w_n = (^n$
$\forall n \neq m\ )^n \in d_{w_n}(L_{KL})$
und $)^m \notin d_{w_n}(L_{KL})$
$\curvearrowright \forall n \neq m:\ d_{w_n}(L_{KL}) \neq d_{w_m}(L_{KL})$
$\curvearrowright |D(L_{KL})| = \infty$
$\curvearrowright L_{KL}$ ist nicht regulär

ATFS Übung 5 – 18.5.2001

geTEXt von Matthias Hensler (mh@wspse.de)

15. August 2001

$\pi \in N \times (\varepsilon \cup N)^*$
$\Rightarrow_\pi \subseteq X^* \times X^*$
$\Rightarrow_G := \bigcup_{\pi \in P} \Rightarrow_\pi$
$w \in \Sigma^*$
$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in X^*$
$S = \alpha_1 \Rightarrow_G \alpha_2 \Rightarrow_G \ldots \Rightarrow_G \alpha_n = w$

Aufgabe 1

siehe Folie im Netz

Aufgabe 2

2.a

$$G_1 : S \to bS|aSa|\varepsilon$$

2.b

$$G_2 : S \to aS|aSbb|aSbbb|\varepsilon$$

2.c

$$\begin{array}{rcl} G_3 : A & \to & aA|b \\ B & \to & bB|a \\ S & \to & AAS'BB \\ S' \to & AS'B|\varepsilon & \end{array}$$

Aufgabe 3

3.a

Sei $G = < N, \Sigma, P, S > \in \mathrm{CFG}(\Sigma)$
$G^R = < N, \Sigma, P^R, S > \in \mathrm{CFG}(\Sigma)$
$P^R = \{A \to \alpha^R | A \to \alpha \in P\}$
Es gilt: $L(G^R) = L(G)^R$

3.b

$G : S \to aB|\varepsilon$
$B \to Sb$
$L(G) = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\} \notin \mathrm{Reg}E(\{a,b\})$

ATFS Übung 6 – 1.6.2001

geTEXt von Matthias Hensler (mh@wspse.de)

15. August 2001

Aufgabe 1

zu zeigen: $\forall \alpha \in X^*NX^*, \beta_1, \beta_2 \in X^*$:
$S \Rightarrow_l^+ \alpha \Rightarrow_l \beta_1, \alpha \Rightarrow_l \beta_2, \beta_1 \neq \beta_2$
$\curvearrowright \nexists w \in \Sigma^* : \beta_1 \Rightarrow^* w \,\text{und}\, \beta_2 \Rightarrow^* w$
zeige zunächst: $\forall \alpha \in X^*NX^*$:
$S \Rightarrow_l^+ \alpha \curvearrowright \alpha \in [\![a^*AbB]\!]$ oder $\alpha \in [\![a^*b(a \vee b)^*B]\!]$

Fall 1: $\alpha = a^nAbB$ $, n \in \mathbb{N}$
Unter Linksableitung $\Rightarrow_l$: $\beta_1 = a^naAbB$, bzw. $\beta_2 = a^nbB$

Fall 2: $\alpha = a^nbnB$ $, n \in \mathbb{N}, u \in \{a,b\}^*$
Unter Linksableitung $\Rightarrow_l$: a^nbnaB oder a^nbnbB, bzw. a^nbn

Aufgabe 2

$$L \in \text{Reg}L(\Sigma) \curvearrowright \exists \mathfrak{A} = < Q, \Sigma, \delta, q_0, F > \in \text{DFA}(\Sigma) : L(\mathfrak{A}) = L$$

Sei $G = < Q, \Sigma, P, q_0 > \in \text{CFG}(\Sigma) : L(G) = L(\mathfrak{A}) = L$
$P = \{q \to ap | \delta(q,a) = p\} \cup \{q \to \varepsilon | q \in F\}$
zu zeigen: G ist eindeutig.
Beweis: Angenommen, es existiert $w \in \Sigma^*$ und zwei Ableitungen:

$$A_1 : q_0 \Rightarrow^* \alpha \Rightarrow \beta_1 \Rightarrow^* w$$

$$A_2 : q_0 \Rightarrow^* \alpha \Rightarrow \beta_2 \Rightarrow^* w$$

(mit $\beta_1 \neq \beta_2$)

$q_0 \Rightarrow^n \alpha \Rightarrow \beta \curvearrowright \alpha \in \Sigma^n Q$

$$A_1 : q_0 \Rightarrow^* vq \Rightarrow vaq' \Rightarrow^* w$$
$$A_2 : q_0 \Rightarrow^* vq \Rightarrow vaq'' \Rightarrow^* w$$
$$q' = \delta(q,a) = q''$$

Dies ist ein Widerspruch. Es gibt also keine zwei Ableitungen für dasselbe Wort, folglich ist die Grammatik eindeutig.

ATFS Übung 7 – 15.6.2001

geTEXt von Matthias Hensler (mh@wspse.de)

15. August 2001

Aufgabe 1

zu zeigen: $\mathscr{L}(\Sigma,\mathrm{PDA},F) = \mathscr{L}(\Sigma,\mathrm{PDA},\varepsilon) = \mathscr{L}(\Sigma,\mathrm{PDA},F,\varepsilon)$. Dazu genügt es zu zeigen:

1. $\mathscr{L}(\Sigma,\mathrm{PDA},F) \subseteq \mathscr{L}(\Sigma,\mathrm{PDA},\varepsilon)$
2. $\mathscr{L}(\Sigma,\mathrm{PDA},\varepsilon) \subseteq \mathscr{L}(\Sigma,\mathrm{PDA},F,\varepsilon)$
3. $\mathscr{L}(\Sigma,\mathrm{PDA},F,\varepsilon) \subseteq \mathscr{L}(\Sigma,\mathrm{PDA},F)$

denn: „$\subseteq$“ transitiv und anti-symmetrisch.

1.a

sei $L \in \mathscr{L}(\Sigma,\mathrm{PDA},F)$, zeige: $L \in \mathscr{L}(\Sigma,\mathrm{PDA},\varepsilon)$. Klar ist: $\exists \mathfrak{A} \in \mathrm{PDA}(\Sigma) : L(\mathfrak{A},F) = L$.
zu zeigen: $\exists \mathfrak{A} \in \mathrm{PDA}(\Sigma) : L(\mathfrak{A},\varepsilon) = L$.
Sei $\mathfrak{A} =< Q,\Sigma,\Gamma,\delta,q_0,z_0,F >$, definiere $\mathfrak{A}' =< Q',\Sigma,\Gamma',\delta',q_0',z_0', \underset{\text{unbekannt, da}\,\varepsilon\,\text{Erkennung}}{\emptyset} >$ mit

$$Q' := Q \cup \{q_0', q_f'\}$$

$$\Gamma' := \Gamma \cup \{z_0'\}$$

$$\delta' : Q' \times \Sigma_\varepsilon \times \Gamma' \to \mathfrak{p}_f(Q' \times \Gamma'^*)$$

$$\delta'(q,X,Z) := \begin{cases} \delta(q,X,Z) \cup \{(q_f',z)\} & \text{für}\, q \in Q, X \in \Sigma_\varepsilon, Z \in \Gamma \\ \{(q_0,z_0,z_0')\} & \text{für}\, q = q_0', X = \varepsilon, Z = z_0' \\ \{(q_1',Z)\} & \text{für}\, q \in F, Z \in \Gamma \\ \{(q_f',\varepsilon)\} & \text{für}\, q = q_f', Z \in \Gamma' \\ \emptyset & \text{sonst} \end{cases}$$

kurz : $\delta' = \delta \cup \{q_0',\varepsilon,z_0') \to (q_0,z_0z_0')\} \cup \{(q,\varepsilon,Z) \to (q_f,Z) | q \in F, Z \in Gamma\} \cup \{(q_f,\varepsilon,Z) \to (q_f,\varepsilon) | Z \in \Gamma'\}$

$w \in L(\mathfrak{A},F) \curvearrowright \exists q \in F, \alpha \in \Gamma^* : (q_0,w,z_0) \overset{*}{\vdash}_{\mathfrak{A}} (q,\varepsilon,\alpha)$. Seien also $q \in F, \alpha \in \Gamma^*, h_0,\ldots,h_n \in Q \times \Sigma^* \times \Gamma^*$
mit $h_0 = (q_0,w,z_0) \vdash_{\mathfrak{A}} h_1 \vdash_{\mathfrak{A}} \ldots \vdash_{\mathfrak{A}} h_n = (q,\varepsilon,\alpha) \curvearrowright \exists h_0',\ldots,h_n' \in Q \times \Sigma^* \times (\Gamma^*\{z_0'\})$
$h_0' = (q_0,w,z_0z_0') \vdash_{\mathfrak{A}'} h_1' \vdash_{\mathfrak{A}'} \ldots \vdash_{\mathfrak{A}'} h_n' = (q,\varepsilon,\alpha,z_0')$
“$\curvearrowright$“ $\mathfrak{A}'$ kann alle Transitionen von $\mathfrak{A}, z_0'$ unten
“$\curvearrowright$“ keine der neuen Regeln anwendbar
“$\curvearrowright$“ $(q_0',w,z_0') \vdash_{\mathfrak{A}'} (q_0,w,z_0z_0') \vdash_{\mathfrak{A}'} \ldots \vdash_{\mathfrak{A}'} (q,\varepsilon,\alpha z_0') \vdash_{\mathfrak{A}'} (q_f',\varepsilon,\alpha z_0') \vdash_{\mathfrak{A}'}^{|\alpha|} (q_f,\varepsilon,z_0') \vdash_{\mathfrak{A}'} (q_f,\varepsilon,\varepsilon) \curvearrowright w \in L(\mathfrak{A}',\varepsilon)$

1.b

analog zu (a) konstruiere $\mathfrak{A}'$ mit

$$\delta' = \delta \cup \{(q_0',\varepsilon,z_0) \to (q_0,z_0z_0')\} \cup \{(q,\varepsilon,z_0') \to (q_f',\varepsilon) | q \in Q\}$$

$$F' = \{q_f'\}$$

1.c

analog zu (a) konstruiere $\mathfrak{A}'$ mit

$$\delta' = \delta \cup \{(q_0', \varepsilon, z_0) \to (q_0, z_0 z_0')\} \cup \{(q, \varepsilon, z_0') \to (q_f', z_0') | q \in F\}$$

$$F' = \{q_f'\}$$

Aufgabe 2

2.a

$\mathfrak{A}_G =< Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F >$ mit $Q := \{Q\}, \Sigma := \{a,b,c,d\}, \Gamma = \Sigma \cup \{S,A,B,C\}, q_0 := q, z_0 = S, F = \emptyset$,
sowie den Zustandsübergängen:
$\delta(q,a,a) = \{(q,\varepsilon)\} = \delta(q,b,b) = \delta(q,c,c) = \delta(q,d,d)$ und $\delta(q,X,Y) := \emptyset$ für $x \neq y, \delta(q,\varepsilon,S) := \{(q,a,Sd),(q,A),(q,C)\}, \delta(q,\varepsilon,A) :=$
$\{(q,aAc),(q,B)\}, \delta(q,\varepsilon,B) := \{(q,bBc),(q,\varepsilon)\}, \delta(q,\varepsilon,C) := \{(q,bCd),(q,B)\}$

2.b

$S \Rightarrow a\underline{S}d \Rightarrow a\underline{C}d \Rightarrow ab\underline{C}dd \Rightarrow ab\underline{B}dd \Rightarrow abb\underline{B}cdd \Rightarrow abbcdd$
$(q,abbcdd,S) \vdash (q,\overline{a}bbcdd,\overline{a}Sd) \vdash (q,bbcdd,Sd) \vdash (q,bbcdd,Cd) \vdash (q,\overline{b}bcdd,\overline{b}Cdd) \vdash (q,bcdd,Cdd) \vdash$
$(q,bcdd,Bdd) \vdash (q,bcdd,bBcdd) \vdash (q,cdd,Bcdd) \to (q,cdd,cdd) \vdash (q,\varepsilon)$

Aufgabe 3

Definiere $\Gamma^{\leq n} := \bigcup_{i=0}^{n} \Gamma^i$, dann gilt: $\{\alpha \in \Gamma^* | (q,w,z_0) \vdash^* (q,u,\alpha)\} \subseteq \Gamma^{\leq n}$.
Insbesondere: es existieren nur endlich viele α.
Idee: kodiere diese in endlicher Kontrolle des endlichen Automaten (EA). Konstruiere EA $\mathfrak{A}_i' =< Q', \Sigma, \delta', q_0', F_i' >$
$, i = 1,2,\ldots,n\}, Q' := Q \times \Gamma^{\leq n}, q_0' := (q_0, z_0), \delta'((q,z_\gamma),a) := \{(q', z_m \ldots z_{1\gamma}) \in Q' \times \Gamma^* | (q', z_m \ldots z_1) \in \delta(q,a,Z)\} \cap$
Q' mit $(a, z_\gamma) \in Q, a \in \Sigma_\varepsilon$
Endzustände: $F_1 := \{(q,\gamma) \in Q' | q \in F\}, F_2 := \{(q,\varepsilon) \in Q'\}, F_3 := \{(q,\varepsilon) \in Q' | q \in F\}$

nach Konstruktion gilt: $(q,uv,\gamma) \vdash^* (q',u,\gamma'), \gamma,\gamma' \in \Gamma^{\leq n} \curvearrowleft (q',\gamma') \in \overline{\delta}((q,\gamma),u)$, also $L(\mathfrak{A}_1) = L(\mathfrak{A},F), L(\mathfrak{A}_2) =$
$L(\mathfrak{A},\varepsilon), L(\mathfrak{A}_3) = L(\mathfrak{A},F,\varepsilon)$

ATFS Übung 8 – 22.6.2001

geTEXt von Matthias Hensler (mh@wspse.de)

15. August 2001

Aufgabe 1

Angenommen es ex. $\mathfrak{A} < Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F > \in$ DPDA(Σ),so daß $L(\mathfrak{A}, \Sigma)$ die P-Eigenschaft (Prefix-Eigenschaft) nicht hat.
Dann ex. $u, v \in L(\mathfrak{A}, \Sigma), u \neq v, u \in \text{Prf}(v)$, d.h. $a \in \Sigma, w \in \Sigma^* : v = uaw$.
Es gilt: $(q_0, u, Z_0) \overset{*}{\vdash}_{\mathfrak{A}} (q, \varepsilon, \varepsilon)$ für genau ein $q \in Q$.
Ferner: $v \in L(\mathfrak{A}, \Sigma) \curvearrowright (q, aw, \varepsilon) \overset{+}{\vdash}_{\mathfrak{A}} (q', \varepsilon, \varepsilon), q' \in Q$ (Widerspruch)

$\square$

Aufgabe 2

Angenommen, $L \in \mathscr{L}(\Sigma, \text{DPDA}), \Sigma = \{a, b, c\}$.
Dann gilt, daß das Komplement ebenfalls in der Sprache liegt: $\overline{L} \in \mathscr{L}(\Sigma, \text{DPDA}) \curvearrowright \overline{L} \in \mathscr{L}(\Sigma, \text{PDA}) \curvearrowright \overline{L} \cap [\![a^*b^*c^*]\!] = \{a^nb^nc^n | n \in \mathbb{N}\} \in \mathscr{L}(\Sigma, \text{PDA})$ (Widerspruch)

$\square$

Abschlußeigenschaften von Sprachen sind **stark** Klausurrelevant!

Aufgabe 4

$S \rightarrow V := E\,|$
    if E then S else $S\,|$
    if E then $SA\,|$
    begin SB end $|$
    repeat SB until E
$E \rightarrow V$ — true — false
$V \rightarrow x|y|z$
$A \rightarrow LA|\varepsilon$
$B \rightarrow ;SB|\varepsilon$
$L \rightarrow L$

ATFS Übung 9 – 29.6.2001

geTEXt von Matthias Hensler (mh@wspse.de)

15. August 2001

Aufgabe 1

1.a

G ist vom Typ 2, da $P \subseteq N \times X^*$. G ist nicht vom Typ 3, da $B \to aD, C \to Ca \in P$ (in Typ 3 dürfen entweder nur rechts- oder linkslineare Regeln vorkommen).

1.b

Sei die Typ 3-Grammatik G' gegeben wie folgt:

$$S \to abB$$

$$B \to C|aD$$

$$C \to aC|\varepsilon$$

$$D \to bD|\varepsilon$$

Es gilt offensichtlich $L(G) = L(G')$ und deshalb ist $L(G)$ Typ 3 Sprache.

Aufgabe 2

2.a

Normierung von G:

1. $G' : S \to A_aSBC|\varepsilon$
   $A_aB \to A_aA_b$
   $CB \to BC$
   $A_bB \to A_bA_b$
   $A_bC \to A_bA_c$
   $A_cC \to A_cA_c$
   $A_a \to a$
   $A_b \to b$
   $A_c \to c$

2. $G'' : S \to A_aSBC|\varepsilon$
   $A_aB \to A_aA_b$
   $$\left.\begin{array}{l} CB \to C'B \\ C'B \to C'B' \\ C'B' \to BB' \\ BB' \to BC \end{array}\right\} CB \to BC$$
   $\vdots$

2.b

- $\Sigma = \{a\}$
- $\Sigma_a = \{a, b, c\}$
- $G_1 : S' \to B_a S' | \varepsilon$
  $Ba \to a$ normiert!
  $L(G_1) = [\![a^*]\!]$
- $\phi : \mathfrak{p}(\Sigma) \to \mathfrak{p}(\Sigma_a)$
  $\phi(a) = L(G'')4$

Konstruiere $\overline{G}$ mit $L(\overline{G}) = \phi(L(G_1)) = L(G'')^*$:

$$
\begin{array}{ll}
\overline{G} : \overline{S} \to \hat{C}S' | C \to \varepsilon & \\
\quad \left.\begin{array}{l} S' \to B_a S' | \varepsilon \\ B_a \to A'_a \end{array}\right\} & P_0 \\
\quad \phi \to \hat{C}A'_a \to \hat{C}S\} & P_1 \\
\quad \left.\begin{array}{l} \hat{C}_a \to a\hat{C} \\ \hat{C}_b \to b\hat{C} \\ \hat{C}_c \to c\hat{C} \end{array}\right\} & P_2 \\
\quad S \to A_a SBC\} & G''
\end{array}
$$

Aufgabe 3

3.a

Sei $G =< N, \Sigma, P, S >$ vom Typ 0.
Konstruiere $G' =< N', \Sigma, P', S' >$ vom Typ 0, so daß $L(G') = \{v | w \in L(G), v$ Permutation von $w\}$ wie folgt:

- $N' = N \cup \{c_1, c_2, c_3, S'\}$
- $P' = P \cup \{S' \to c_1 c_2 S c_3\} \cup \{c_2 a \to a c_2 | a \in \Sigma\} \cup \{a c_1 \to c_1 a | a \in \Sigma\} \cup \{c_1 a \to a c_1 | a \in \Sigma\} \cup \{a c_1 b \to b c_1 a | a, b \in \Sigma\} \cup \{c_1 c_2 c_3 \to \varepsilon\}$

(Klausurrelevant! Auch Stern vom Typ 0 mit Kontrollsymbolen)

0.1 3.b

Keine Typ 1-Grammatik.

ATFS Übung 10 – 6.7.2001

geTEXt von Matthias Hensler (mh@wspse.de)

15. August 2001

Aufgabe 1

Sei $\mathfrak{A} = < \{q_0, q_1, \ldots, q_7, q_f\}, \{a\}, \{a, b, c, \Box\}, q_0, \Box, \{q_f\}, \delta > \in \mathrm{TM}(\{a\})$.

$q_0 a$	$q_1 bR$
$q_1 \Box$	$q_f \Box N$
$q_1 a$	$q_2 aN$
$q_2 a$	$q_2 aR$
$q_2 \Box$	$q_3 \Box L$
$q_2 c$	$q_3 cL$
$q_3 a$	$q_4 cL$
$q_4 a$	$q_5 aL$
$q_4 b$	$q_6 \Box R$
$q_5 a$	$q_5 aL$
$q_5 b$	$q_0 bR$
$q_6 c$	$q_6 aR$
$q_6 \Box$	$q_7 \Box L$
$q_7 a$	$q_7 aL$
$q_7 \Box$	$q_0 \Box R$

Aufgabe 2

$\mathfrak{A} = < Q, \Sigma, \delta, q_0, F > \in \mathrm{DFA}(\Sigma)$
Sei $\mathfrak{A}' = < Q \uplus \{q_f\}, \Sigma, \Sigma \uplus \{\Box\}, q_0, \{q_f\}, \delta' > \in \mathrm{TM}(\Sigma)$ gegeben durch:

$$\begin{array}{rcl}\delta'(q,a) & = & \{(\delta(q,a), a, R)\} \\ \delta'(q,\Box) & = & \left\{ \begin{array}{ll} \{(q_f, \Box, R)\} & , q \in F \\ \emptyset & , \text{sonst} \end{array} \right.\end{array}$$

Beweis: : $a_1 \ldots a_n = w \in L(\mathfrak{A}) \curvearrowright \overline{\delta}(q_0, w) \in F \curvearrowright \exists q_1, \ldots, q_{n-1} \in Q, q_n \in F : \delta(q_0, a_1) = q_1, \delta(q_1, a_2) = q_2, \ldots, \delta(q_{n-1}, a_n) = q_n \curvearrowright \exists q_1, \ldots, q_{n-1} \in Q, q_n \in F : (q_0, \varepsilon, a_1, a_2, \ldots, a_n) \vdash (q_1, a_1, a_2, a_3 \ldots a_n) \vdash \ldots \vdash (q_{n-1}, a_1 \ldots a_{n-1}, a_n, \varepsilon) \vdash (q_n, w, \Box, \varepsilon) \vdash (q_f, w\Box, \Box, \varepsilon) \curvearrowright w \in L(\mathfrak{A}')$

$\Box$

Aufgabe 3

Sei $\mathfrak{A} = < \{q_0, q_f\}, \{\$\}, \{\$, \Box\}, q_0, \Box, \{q_f\}, \delta > \in \mathrm{TM}(\{\$\})$ gegeben durch:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, \Box) &= \{(q_0, \Box, L), (q_0, \Box, R)\} \\
\delta(q_0, \$) &= \{(q_f, \$, N)\} \\
\delta(q_f, \Box) &= \delta(q_f, \$) = \emptyset
\end{aligned}
$$

ATFS Übung 11 – 13.7.2001

geTEXt von Matthias Hensler (mh@wspse.de)

15. August 2001

Aufgabe 1

$$\mathfrak{A} =< \{q_0, q_1, \dots, q_5, q_f\}, \{\$\}, \{\$, \Box, |\}, q_0, \Box, \{q_f\}, \delta >\in 1-\mathrm{dTM}$$

gegeben wie folgt:

$$\delta : Q \times \Gamma \dashrightarrow Q \times \Gamma \times \{L, N, R\}$$

$$\left.\begin{array}{ll} q_0\$ & q_f\$N \\ q_0\Box & q_1|L \\ q_1\$\Box & q_f\$N \\ q_1\Box & q_2|R \end{array}\right\} \text{ErzeugeRandmarkierungen}$$

$$\left.\begin{array}{ll} q_2\Box & q_2\Box R \\ q_2| & q_3\Box R \\ q_3\$ & q_f\$N \\ q_3\Box & q_4|L \end{array}\right\} \text{GehezurechtemRandunderweitereihn}$$

$$\left.\begin{array}{ll} q_4\Box & q_4\Box L \\ q4| & q_5\Box L \\ q_5\$ & q_f\$N \\ q_5\Box & q_2|R \end{array}\right\} \text{Gehenachlinks...}$$

Aufgabe 2

2.a

Sei $\mathfrak{A} \in \mathrm{TM}(\Sigma), \sim \subseteq \underline{\mathrm{Conf}}(\mathfrak{A})\tilde{A}R$ definiert wie folgt:

$$(q, \alpha, X, \beta) \sim (q', \alpha', X', \beta') :\curvearrowright$$

1. $q = q'$
2. $X = X'$
3. $\alpha = \Box^n\alpha'$ oder $\alpha' = \Box^n\alpha$ für $n \in \mathbb{N}$
4. $\beta = \beta'\Box^n$ oder $\beta' = \beta\Box^n$ für $n \in \mathbb{N}$

$$(q, \Box\Box ab, \$, bc) \sim (q, \Box ab, \$, bc\Box)$$

Es gilt: $\forall \kappa_1, \kappa_2, \kappa'_1 \in \underline{\mathrm{Conf}}(\mathfrak{A}) : \kappa_1 \vdash_{\mathfrak{A}} \kappa_2$ und $\kappa_1 \sim \kappa'_1$
$\curvearrowright \exists \kappa'_2 \sim \kappa_2 : \kappa'_1 \vdash \kappa'_2$

Sei $w \in L(\mathfrak{A})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} &|\{[n]_\sim | \kappa \in \underline{\text{Conf}}(\mathfrak{A}), |\kappa| \leq s(|w|)\}| \\ = &|\{[n]_\sim | \kappa \in \underline{\text{Conf}}(\mathfrak{A}), |\kappa| = s(|w|)\}| \\ (*) \qquad &\leq |Q| \cdot s(|w|) \cdot |\Gamma| \end{aligned}$$

Es existiert $\gamma = (\kappa_0 = \kappa(w) \vdash \kappa_1 \vdash \ldots \vdash \kappa_n)$, κ_n Endkonfiguration mit:
$\underline{\text{bv}}(\gamma) \leq s(|w|)$ und o.B.d.A. $\kappa_i \chi \kappa_j, i \neq j$ (wegen $(*) n \leq |Q| \ldots$)

2.b

Sei $\mathfrak{A} = < Q, \Sigma, \Gamma, q_0, \Box, F, \delta > \in \text{TM}(\Sigma)$ linear beschränkt und $p \in \mathbb{N}_0$, so daß:

$$\underline{\text{bv}}_{\mathfrak{A}}(w) \leq p \cdot |w| \qquad \forall w \in L(\mathfrak{A}) \setminus \{\varepsilon\}$$

Sei $S : \begin{cases} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto p \cdot n \end{cases}$
Für alle $w \in L(\mathfrak{A}) \setminus \{\varepsilon\}$ existiert Endkonfiguration κ und $n \in \mathbb{N}$, so daß $n(w) \vdash^n_{\mathfrak{A}} \kappa$ und $n \leq |Q| \cdot p \cdot |w| \cdot |\Gamma|^{p \cdot |w|}$

2.c

Falls s eine berechenbare Funktion, dann ist $L(\mathfrak{A}) \in \text{DEC}(\Sigma)$.
Für $w \in \Sigma^*$ berechne $s(|w|)$ und untersuche die endlich vielen Berechnungen $\gamma = (\kappa(w) \vdash \ldots)$ der Länge $|Q| \cdot s(|w|) \cdot |\Gamma|$ auf Endkonfigurationen.

1. Fall: Endkonfiguration vorhanden $\rightsquigarrow w \in L(\mathfrak{A})$

2. Fall: keine Endkonfiguration vorhanden $\rightsquigarrow w \notin L(\mathfrak{A})$

ATFS Übung 12 – 20.7.2001

geTEXt von Matthias Hensler (mh@wspse.de)

15. August 2001

Aufgabe 1

Seien $\alpha, \beta \in \mathrm{Reg}E$:

1. Konstruiere $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \in \mathrm{NFA} : L(\mathfrak{A}_1) = [\![\alpha]\!]$ und $L(\mathfrak{A}_2) = [\![\beta]\!]$ (nach Thompson).
2. Konstruiere $\mathfrak{A}'_1, \mathfrak{A}'_2 \in \mathrm{DFA} : L(\mathfrak{A}'_1) = L(\mathfrak{A}_1)$ und $L(\mathfrak{A}'_2) = L(\mathfrak{A}_2)$ (Potenzmengenkonstruktion)
3. Konstruiere $\overline{\mathfrak{A}'_1}, \overline{\mathfrak{A}'_2} \in \mathrm{DFA} : L(\overline{\mathfrak{A}'_1}) = \overline{L(\mathfrak{A}'_1)}$ und $L(\overline{\mathfrak{A}'_2}) = \overline{L(\mathfrak{A}'_2)}$.
4. Konstruiere $\mathfrak{A}'_1 \times \overline{\mathfrak{A}'_2}, \overline{\mathfrak{A}'_1} \times \mathfrak{A}'_2 : L(\mathfrak{A}'_1 \times \overline{\mathfrak{A}'_2} = L(\mathfrak{A}'_1) \cap L(\overline{\mathfrak{A}'_2})$ und $L(\overline{\mathfrak{A}'_1}) \cap L(\mathfrak{A}'_2)$.
5. Führe Leehrheitstes durch:
$$L(\mathfrak{A}'_1 \times \overline{\mathfrak{A}'_2}) \stackrel{?}{=} \emptyset$$
$$L(\overline{\mathfrak{A}'_1} \times \mathfrak{A}'_2) \stackrel{?}{=} \emptyset$$
6. $[\![\alpha]\!] = [\![\beta]\!] \curvearrowright$ Beide leer!

Aufabe 2

2.a

$$L_r = \{a,b\}^*$$
$$L_c = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$$

2.b

Falsch, denn: Angenommen $\overline{L_c} = L_r$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{L_c}} = \overline{L_r} \quad &\curvearrowright \quad L_c = \overline{L_r} \\ &\curvearrowright \quad L_c \in \mathrm{Reg}L \end{aligned}$$

Widerspruch!

Aufgabe 3

Sei $\mathfrak{A}^\cap = < Q_1 \times Q_2, \Sigma, \Gamma, \delta, (q_0^1, q_0^2), Z_0, F_1 \times F_2 > \in \mathrm{PDA}(\Sigma)$.

$$\delta : (Q_1 \times Q_2) \times \Sigma_\Sigma \times \Gamma \to \mathfrak{p}_f((Q_1 \times Q_2) \times \Gamma^*)$$
$$\forall a \in \Sigma\, \delta((q_1,q_2),a,Z) = \{((q,\delta_2(q_2,a)),\beta) | \delta_1(q_1,a,Z) \ni (q,\beta)\}$$
$$\delta((q_1,q_2),\Sigma,Z) = \{((q_1,q_2),\beta) | \delta_1(q_1,\varepsilon,Z) \ni (q,\beta)\}$$

$L(\mathfrak{A}^\cap, F, \varepsilon) = L(\mathfrak{A}_1, F, \varepsilon) \cap L(\mathfrak{A}_2)$.

Aufgabe 4

4.a (nicht Klausurrelevant)

$L\{\varepsilon, a\}_{\text{reg}} \curvearrowright L_{\text{reg}}$
Falsch, denn: $\forall L \subseteq \{a\}^* : \{aa\}* \subseteq L \curvearrowright L\{\varepsilon, a\} = \{a\}^* \in \text{Reg}L(\{a\})$.
Aber: $\mathscr{L} = \{L \subseteq \{a\}^* | \{aa\}^* \subseteq L\}$ is überabzählbar.
Da es nur abzählbar viele reguläre Sprachen gibt: $\exists L \in \mathscr{L} : L \notin \text{Reg}L$ und $L\{\varepsilon, a\} \in \text{Reg}L(\{a\})$

4.b (Klausurrelevant)

Richtig, denn: $L \in \text{CFL} \curvearrowright L \backslash \{\varepsilon\} \in \text{CFL}$

$$\begin{aligned}
L \in \text{CFL} \quad &\curvearrowright \quad \exists G \in \text{CNF} : L(G) = L \\
&\curvearrowright \quad \exists G =< N, \Sigma, P, S > \in \text{CNF} : \\
& \quad L(< N, \Sigma, P \backslash \{S \to \varepsilon\} >) = L \backslash \{\varepsilon\} \\
&\curvearrowright \quad \exists G \in \text{CNF} : L(G) = L \backslash \{\varepsilon\} \\
&\curvearrowright \quad \exists G \in \text{CFG} : L(g) = L \backslash \{\varepsilon\} \\
&\curvearrowright \quad L \backslash \{\varepsilon\} \in \text{CFL}
\end{aligned}$$

4.c

Falsch, denn: Seien $L \in \mathfrak{p}(\Sigma^*) \backslash \mathscr{L}_0(\Sigma)$ und $f : \mathbb{N} \to \Sigma^* \backslash L$ surjektiv.

Seien $\forall n \geq 1 : L_n = \Sigma^* \backslash \{f(n)\} \in \text{Reg}L$.

Es gilt: $\bigcap_{n=1}^{\infty} L_n = L$.

ATFS Klausur-Übungen

geTEXt von Matthias Hensler (mh@wspse.de)

Übungen vom 29.6.2001 und 6.7.2001

15. August 2001

Aufgabe 1

Sei Σ Alphabet. Die Menge der ko-endlichen Sprachen $\mathscr{L} := \{L \subseteq \Sigma^* | \overline{L} : \Sigma^* \setminus L \text{ ist endlich } \}$.

1.a

Zeigen Sie: $\mathscr{L}$ ist unter $\cup, \cap, ^*$ abgeschlossen.

1.b

In welchen Sprachklassen ist $\mathscr{L}$ enthalten.

Lösung: 1.a

$$\begin{aligned} \cup, \cap : L_1, L_2 \in \mathscr{L} &\curvearrowright \overline{L_1}, \overline{L_2} \text{ endlich} \\ &\curvearrowright \overline{L_1} \cap \overline{L_2}, \overline{L_1} \cup \overline{L_2} \text{ endlich} \\ &\curvearrowright \overline{L_1 \cup L_2}, \overline{L_1 \cap L_2} \text{ endlich} \\ &\curvearrowright L_1 \cup L_2, L_1 \cap L_2 \in \mathscr{L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * : L \in \mathscr{L} \text{ und} L \subseteq L^* &\curvearrowright L^* \subseteq \overline{L} \text{endlich} \\ &\curvearrowright L^* \in \mathscr{L} \end{aligned}$$

Lösung: 1.b

$\mathscr{L} \subseteq \mathrm{Reg}L(\Sigma)$, denn $L \in \mathscr{L}$
$\curvearrowright \overline{L}$ endlich
$\curvearrowright \overline{L}$ regulär
$\curvearrowright L$ regulär

Aufgabe 2

Sei Σ Alphabet und $\# \notin \Sigma$. Für $L \subseteq \Sigma^*$:
$\mathrm{split}(L) : \{v\#w | vw \in L\}$

2.a

Geben Sie split(L) für $L = \{a, bb, aba\}$ explizit an.

2.b

Gegeben ist ein Automat $\mathfrak{A}$. Zu konstruieren ist ein Automat $\mathfrak{A}'$ =split$(\mathfrak{A})$.

Lösung: 2.a

split$(L) = \{\#a, a\#, \#bb, b\#b, bb\#, \#aba, a\#ba, ab\#a, aba\#\}$

Lösung: 2.b

Wir kopieren den Automaten einfach, und von jedem Zustand des Originalautomaten einen Gatter- Übergang (#) in den entsprechenden Zustand des Kopierautomaten. Der Endzustand des Originalautomaten ist hier kein Endzustand mehr.
Damit wir einen deterministischen Automaten erhalten, fügen wir von jedem Zustand im kopierten Automaten noch eine Gatter-Senke in einen neuen Zustand ein, sowie eine Schleife mit $a, b, \#$ die wieder in die Senke führt.
Der Originalautomat erzeugt das Prefix, und der kopierte das Suffix.

Aufgabe 3

Für $L \subseteq \Sigma^*$ und $\Sigma^* \subseteq \Sigma$.
sub$(L) := \{w \in L | w \in (\Sigma')^*\}$
Beweisen oder widerlegen Sie:

3.a

L regulär $\curvearrowright$ sub(L) regulär.

3.b

sub(L) regulär $\curvearrowright$ L regulär.

Lösung: 3.a

Sei $L \subseteq \Sigma^*$ regulär. Dann existiert $\mathfrak{A} =< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >\in$ DFA(Σ), so daß $L(\mathfrak{A}) = L$

Sei $\mathfrak{A}' =< Q \cup \{q_{neu}\}, \Sigma, \delta', q_0, F >\in$ DFA(Σ) gegeben gemäß:

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} \delta(q,a) & \text{, falls } a \in \Sigma', q \in Q \\ q_{neu} & a \in \Sigma \backslash \Sigma' \text{ oder } q = q_{neu} \end{cases}$$

Es gilt: $L(\mathfrak{A}'|\text{sub}(L(\mathfrak{A})) = \text{sub}(L) \curvearrowright \text{sub}(L)$ regulär.

Lösung: 3.b

$\Sigma = \{a, b, c\}, \Sigma' = \{c\}$
$L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{c\}$ ist nicht regulär, aber sub$(L) = \{c\}$ regulär: Widerspruch.

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie:

4.a

$$L_1 = \{uavb | u, v \in \{a,b\}^*, |u| = |v|\} \in \mathrm{CFL}(\{a,b\})$$

4.b

$$L_2 = \{a^n b^n c^i | i \leq n\} \in \mathrm{CFL}(\{a,b,c\})$$

Lösung: 4.a

$$\begin{aligned} S &\to Ab \\ A &\to aAa|aAb|bAa|bAb|a \\ L(G) &= L_1 \end{aligned}$$

Lösung: 4.b

$L_2 \notin$ CFL. Angenommen L_2 sei kontextfrei. Dann ex. $k \geq 1$ mit den Eigenschaften des Pumping-Lemmas. Sei $z = a^k b^k c^k \in L_2$ und $uvwxy$ Zerlegung von z gemäß Pumpinglemma.

1. Fall: $vwx \in [\![a^* b^*]\!] : uwy = a^i b^j c^k$ mit $i < k$ oder $j < k$: Widerspruch!

2. Fall: $vwx \in [\![b^* c^*]\!] : uwy = a^k b^i c^j$ mit $i < k$ oder $j < k$: Widerspruch!

(Pumpinglemma stark Klausurrelevant!)