Skript zur Vorlesung

Analysis IV

H. Th. Jongen, RWTH-Aachen
Sommersemester 2004 [1]

Dominik Hollmann [2]

17. August 2004

[1] www.bartholodeus.de.vu www.s-inf.de
[2] Anregungen, Fehler, Lob etc. an: dominik.hollmann@gmx.de

Inhaltsverzeichnis

2 Vektoranalysis 33

Teil 1

Funktionentheorie

Kapitel XI

Differentialformen 1. Ordnung

Pfaffsche Formen, 1-Formen

XI.1 Definition: Tangentialraum, Tangentialvektor, Kurve

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in U$

$T_p(U) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, \varepsilon < 0$ und $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ stetig differenzierbar mit $\alpha(0) = p$ und $\alpha'(0) = v\}$

$T_p(U)$ heißt *Tangentialraum* von U in p.
$v \in T_p(U)$ heißt *Tangentialvektor*.
α heißt stetig differenzierbare *Kurve*.

XI.1.1 Satz

$$T_p(U) = \mathbb{R}^n$$

XI.2 Definition: Dualraum

$$T_p^*(U) := \{\varphi \mid \varphi : T_p(U) \to \mathbb{R} \text{ linear } \}$$

$T_p^*(U)$ heißt *Dualraum*.

XI.3 Definition: Differentialform 1. Ordnung

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen.
Eine *Differentialform 1. Ordnung* ω ist eine Abbildung $\omega : U \to \bigcup_{p \in U} T_p^*(U)$
wobei $\omega(p) \in T_p^* \;\forall\, p \in U$.
ω heißt auch *Pfaffsche Form* oder *1-Form*

XI.3.1 Notation

$< .,. >$ $\quad < \omega(p), v > := \omega(p)(v) \quad (v \in T_p(U))$

XI.4 Definition: Totales Differential

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Das *totale Differential* df von f ist die wie folgt definierte pfaffsche Form:

$$< df(p), v > := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\ v_i$$

mit $v = (v_1, \ldots, v_n)^T \in T_p(U)$.

XI.5 Darstellung ω bzgl. (dualer) Basis

$\underbrace{\omega(p)}_{\in T_p^*(U)} \underbrace{(v)}_{\in T_p(U)} \in \mathbb{R}$

Wähle Standard-Basis $e_1, \ldots, e_n$ von $T_p(U) = \mathbb{R}^n$, $\quad e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)^T$

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\ dx_i \qquad (f_i : U \to \mathbb{R})$$

XI.6 Definition: Stetig, differenzierbar usw. für 1-Formen

$\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\ dx_i$

ω *stetig / differenzierbar / usw.*, falls f_i stetig / differenzierbar / usw.

XI.7 Definition: Integral von 1-Formen

XI.7.1 für stetige Kurven

Sei $\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i\ dx_i$ *stetig* $\qquad \alpha : [a, b] \to U$ stetig differenzierbare Kurve

$$\begin{aligned} \int_\alpha \omega \quad &:= \quad \int_a^b \left(\sum_{i=1}^{n} f_i(\alpha(t)) \cdot \alpha_i'(t) \right) dt \\ &= \quad \int_a^b < \omega(\alpha(t)), a'(t) > dt \end{aligned}$$

XI.7.2 für stückweise stetige Kurven

$\alpha : [a, b] \to U$ heißt *stückweise stetig differenzierbare Kurve*, falls α stetig ist und $t_0, \ldots, t_k \in [a, b]$ existieren mit $\alpha_j := \alpha_{|[t_j, t_{j+1}]}$ ist stetig differenzierbar.

$$\int_\alpha \omega := \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\alpha_j} \omega$$

XI.8 Satz 1

Vor.:

$F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar,
$\alpha : [a, b] \to U$ stückweise stetig differenzierbare Kurve, $\quad \alpha(a) = p, \quad \alpha(b) = q$

Beh.:

$$\int_\alpha dF = F(p) - F(q)$$

XI.9 Lemma

Vor.:

ω stetige 1-Form, $\qquad \alpha : [a, b] \to U$ stetig differenzierbar,
$\varphi, \psi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a, b]$,
$\varphi(\tilde{a}) = a,\ \varphi(\tilde{b}) = b \quad \psi(\tilde{a}) = b,\ \psi(\tilde{b}) = a$

Beh.:

$$\int_{\alpha\circ\varphi} \omega = \int_\alpha \omega, \qquad \int_{\alpha\circ\psi} \omega = -\int_\alpha \omega$$

XI.10 Definition; Stammfunktion für 1-Form

$F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar heißt *Stammfunktion* für stetige ω,
falls $\omega = dF$.

XI.11 Definition: Gebiet

$U \subset \mathbb{R}^n, U \neq \emptyset$ heißt *Gebiet*, falls U offen und wegzusammenhängend ist.

XI.11.1 Definition: Wegzusammenhängend, Weg

Vergleiche VI.60
Seien $(V, \|.\|)$ ein normierter Raum, $D \subset V$.
Die Menge D heißt *wegzusammenhängend*, falls es für je zwei Punkte $x, y \in D$ eine stetige Abbildung $\varphi : [0, 1] \to V$ mit $\varphi(0) = x$ und $\varphi(1) = y$ gibt mit $\varphi([0, 1]) \subset D$. φ heißt *Weg*.

XI.12 Satz 2

Vor.:

U Gebiet, $F : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\qquad dF = 0$

Beh.:

F ist konstant.

XI.12.1 Folgerung

F Stammfunktion einer 1-Form $\omega \quad \Longrightarrow$
$F+$ Konstante ist auch Stammfunktion von ω
Mit Satz 2 gilt auch die Umkehrung:
F, G Stammfunktionen von ω auf wegzusammenhängendem $U \quad \Longrightarrow$
$F = G +$ Konstante

XI.13 Satz 3

Vor.:

U Gebiet, $\qquad \omega$ stetige 1-Form in U

Beh.:

$$\begin{array}{cl} & \omega \text{ hat Stammfunktion } f \\ \Longleftrightarrow & \\ & \displaystyle\int_\alpha \omega = 0 \quad \forall \text{ stückweise stetig differenzierbaren} \\ & \textit{geschlossenen} \text{ Kurven } \alpha : [0,1] \to U \end{array}$$

XI.13.1 Definition: Geschlossene Kurve

$\alpha : [0,1] \to U$ heißt *geschlossen*, falls $\alpha(0) = \alpha(1)$.

XI.14 Definition: Geschlossen, exakt

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$ stetig differenzierbare Pfaffsche Form auf U.
ω heißt *geschlossen*, falls $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}$
ω heißt *exakt*, falls $\omega = dF$ für ein zweimal stetig differenzierbares F.

Bem.:

$$\omega \text{ exakt } \begin{array}{c}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} \omega \text{ geschlossen}$$

XI.15 Definition: Sternförmig

$U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *sternförmig*, falls ein $p \in U$ existiert, mit
$[p, a] \subset U$ für alle $a \in U$, wobei $[p, a] = \{tp + (1-t)a \mid t \in [0,1]\}$ ist.

XI.16 Satz 4

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen und U sternförmig, ω stetig differenzierbare 1-Form

Beh.:

ω geschlossen $\Longrightarrow \omega$ exakt
Vergleiche auch XI.14.

XI.16.1 Definition: Homotop

$\alpha, \beta : [0,1] \to U$ stetig, $\alpha(0) = \beta(0) = p_0$, $\alpha(1) = \beta(1) = p_1$
α, β heißen *homotop* in U, falls ein stetiges $H : [0,1] \times [0,1] \to U$ existiert mit

1. $H(0,t) = \alpha(t), \quad H(1,t) = \beta(t) \quad \forall\, t \in [0,1]$
2. $H(u,0) = p_0, \quad H(u,1) = p_1 \quad \forall\, u \in [0,1]$

H heißt *Homotopie*.

XI.17 Satz 5

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p_0, p_1 \in U$, $\alpha, \beta : [0,1] \to U$, stückweise stetig differenzierbare Kurven mit $\alpha(0) = \beta(0) = p_0$, $\alpha(1) = \beta(1) = p_1$, α, β homotop.

Beh.:

$$\int_\alpha \omega = \int_\beta \omega$$

XI.18 Definition: Einfach zusammenhängend

Ein Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$ heißt *einfach zusammenhängend*, falls es ein $p \in U$ gibt mit: Jede stetige Kurve $\alpha : [0,1] \to U$ mit $\alpha(0) = \alpha(1) = p$ ist homotop zur Punktkurve $\gamma : [0,1] \to U$, $\gamma(t) \equiv p$.

Beispiel:

U sternförmig.

XI.19 Satz 6

Vor.:

U Gebiet einfach zusammenhängend,
ω stetig differenzierbare geschlossene 1-Form,
α stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve in U

Beh.:

$$\int_\alpha \omega = 0$$

XI.20 Folgerung 1

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^n$ einfach zusammenhängendes Gebiet,
ω stetig differenzierbare 1-Form

Beh.:

$$\omega = dF \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega \text{ geschlossen}$$

XI.21 Definition: $\mathbb{C}$-Integral

$U \subset \mathbb{C}$ offen, $\quad F : U \to \mathbb{C}$ stetig, $\quad \gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar,
$z = x + iy \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &\overset{\mathbb{C}\cong\mathbb{R}^2}{=} \int_\gamma \underbrace{(u+iv)}_{f}\underbrace{(dx+idy)}_{dz} \\
&= \int_\gamma (udx - vdy) + i\int_\gamma (vdx + udy) \\
&\overset{\gamma: t\mapsto \begin{pmatrix}\gamma_1(t)\\ \gamma_2(t)\end{pmatrix}}{=} \int_{t=a}^b (u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\cdot\gamma_1'(t) - v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t))\,dt \\
&\quad + i\int_{t=a}^b (v(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\cdot\gamma_1'(t) + u(\gamma_1(t),\gamma_2(t))\cdot\gamma_2'(t))\,dt \\
&= \int_a^b \underbrace{(u+iv)_{|(\gamma_1(t),\gamma_2(t))}}_{f(\gamma(t))} \cdot \underbrace{(\gamma_1'(t) + i\gamma_2'(t))}_{\gamma'(t)}\,dt \\
&= \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt
\end{aligned}$$

XI.22 Definition: Stammfunktion in $\mathbb{C}$

$F : U \to \mathbb{C}$ heißt *Stammfunktion* von f, falls F $\mathbb{C}$-differenzierbar in U und $F' = f$ ist.

XI.23 Satz 7

Vor.:

$U \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $\quad f : U \to \mathbb{C}$ stetig.

Beh.:

$f = F' \quad \Longleftrightarrow \quad \int_\gamma f(z)dz = 0 \quad \forall$ stückweise stetig differenzierbaren geschlossenen Kurve γ in U

XI.24 Satz 8 (Existenz von Stammfunktion)

Vor.:

$U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet,
$F : U \to \mathbb{C}$ stetig $\mathbb{C}$-differenzierbar.

Beh.:

f hat Stammfunktion: $f = F'$

Bem.:

Vergleiche Satz 6 und Satz 7 fehlt: Geschlossenheit

XI.25 Cauchy-Riemann-Gleichungen

Vor.:

f $\mathbb{C}$-differenzierbar (holomorph), $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$

Beh.:

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

XI.26 Folgerung 2 (Integralsatz von Cauchy)

XI.26.1 Vor.:

$U \subset \mathbb{C}$ einfach zusammenhängendes Gebiet,
$f : U \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar.

Beh.:

$\int_\gamma f dz = 0$ für jede stückweise stetig differenzierbare geschlossene Kurve γ in U.

XI.27 Definition: Holomorph

$U \subset \mathbb{C}$ offen. $f : U \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph* in $\bar{z} \in U$, falls eine Umgebung $V \subset U$, $\bar{z} \in V$ existiert mit f ist $\mathbb{C}$-differenzierbar in jedem Punkt $z \in V$.
f heißt *holomorph*, falls f holomorph in jedem Punkt von U ist.

Bem.:

f holomorph in $\bar{z} \Longrightarrow f$ stetig in $\bar{z}$

XI.28 Satz 9 (Cauchy - Goursat)

Vor.:

$\triangle \subset \mathbb{C}$ abgeschlossenes Dreieck, $\quad U$ offene Umgebung von $\triangle$,
$f : U \to \mathbb{C}$ holomorph.

XI.28.1 Beh.:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$$

XI.29 \$atz 1 (Cauchy - Goursat für Polygone)

Vor.:

P abgeschlossenes Polygon, $\quad U$ offene Umgebung von P,
$f : U \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$.

XI.29.1 Beh.:

$$\int_{\partial P} f(z)dz = 0$$

XI.30 \$atz 2 (Cauchy - Goursat für Dreiecke)

Vor.:

$\triangle \subset \mathbb{C}$ abgeschlossenes Dreieck, $\quad U$ offene Umgebung von $\triangle$, $\quad z_0 \in \triangle$
$f : U \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$.

XI.30.1 Beh.:

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$$

XI.31 Definition: Integrationsweg

XI.31.1 Integrationsweg

$U \subset \mathbb{C}$ offen.
$\gamma : [a, b] \to U$ stückweise stetig differenzierbarer Weg mit
$\gamma'(t) \neq 0 \; \forall \, t \in [a_i, a_{i+1}]$ heißt *Integrationsweg* (*I-Weg*).

XI.31.2 einfach

$\gamma : [a, b] \to U$ Integrationsweg heißt *einfach*, falls $\gamma_{|_{[a,b)}}$ injektiv ist.

XI.31.3 geschlossen

$\gamma : [a, b] \to U$ Integrationsweg heißt *geschlossen*, falls $\gamma(a) = \gamma(b)$ ist.

XI.31.4 EGI-Weg

Ein *EGI-Weg* ist ein einfach geschlossener Integrationsweg.

XI.31.5 Bemerkung:

γ einfach geschlossener Integrationsweg. Dann ist Bild(γ) homöomorphes Bild des Einheitskreises $\partial B(0, 1)$.

XI.32 $atz 4 (Jordan)

Vor.:

$S \subset \mathbb{C}$ homöomorphes Bild von $\partial B(0, 1)$.

Beh.:

$\mathbb{C} \setminus S = G_1 \cup G_2$, wobei G_1, G_2 Gebiete sind mit
$G_1 \cap G_2 = \emptyset$, $\partial G_1 = \partial G_2$, G_1 beschränkt.

(Ohne Beweis.)

XI.33 Annahme: $\oint$

Orientierung / Durchlaufsinn eines EGI-Weges γ sei "linksherum".
$\oint_\gamma f(z)dz$ ist in diesem Sinne zu verstehen.

XI.34 $atz 5 (Cauchy - Goursat für EGI-Weg)

Vor.:

γ EGI-Weg,
G_1 beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma)$ (im Sinne von XI.32),
f holomorph auf $G_1 \cup \text{Bild}(\gamma)$.

Beh.:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0$$

XI.35 $atz 6 (Cauchy - Goursat für geschachtelte EGI-Wege)

Vor.:

γ_1, γ_2 EGI-Wege,
$G_1^{(1)}$ beschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma_1)$ (XI.32),
$G_2^{(2)}$ unbeschränkte Komponente von $\mathbb{C} \setminus \text{Bild}(\gamma_2)$,
f holomorph auf $G_1^{(1)} \cap G_2^{(2)} \cup \text{Bild}(\gamma_1) \cup \text{Bild}(\gamma_2)$.

Beh.:

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

Kapitel XII

Integralformel von Cauchy

XII.0 Holomorphiekriterium

f habe Stammfunktion F auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{C}$
Dann ist $f = F'$ holomorph auf U.

XII.1 Definition: Holomorph auf und innerhalb, innerhalb

Sei γ EGI-Weg.
f heißt *holomorph auf und innerhalb* γ, falls f holomorph auf $G_1 \cup \text{Bild}(\gamma)$ (im Sinne von XI.32) ist.

$a \in \mathbb{C}$ liegt *innerhalb* γ, falls $a \in G_1$.

XII.2 Satz 1 (Integralformel von Cauchy)

Vor.:

Sei γ EGI-Weg, f holomorph auf und innerhalb γ,
a liege innerhalb γ.

Beh.:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(z)}{z-a} dz$$

XII.3 Satz 2 (“Einmal diffbar, immer diffbar”)

Jede holomorphe Funktion ist beliebig oft differenzierbar, somit ist jede ihrer Ableitungen holomorph.

Vor.:

Sei γ EGI-Weg, f holomorph auf und innerhalb γ,
z liege innerhalb γ.

Beh.:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

XII.4 Satz 3 (Morera)

Vor.:

$G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Für alle $\triangle \subset G$ ist $\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$.

Beh.:

f ist holomorph auf G.

XII.5 Satz 4

Vor.:

$G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$, $z_0 \in G$, f holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$,
f stetig fortsetzbar in z_0.

Beh.:

f ist holomorph auf ganz G.

XII.6 Satz 5 (Hebbarkeitssatz von Riemann)

Vor.:

$G \subset \mathbb{C}$ offen, $f : G \to \mathbb{C}$, $z_0 \in G$, f holomorph auf $G \setminus \{z_0\}$,
Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodas f beschränkt ist auf $B(z_0, \varepsilon) \setminus \{z_0\} \subset G$.

Beh.:

f ist holomorph auf G. (D.h., f ist holomorph fortsetzbar in z_0.)

XII.7 Satz 6 (Ungleichung von Cauchy)

Vor.:

f holomorph auf $\overline{B(z_0, r)}$. Sei $0 < \delta \leq r$.

Beh.:

Für $z \in \overline{B(z_0, r-\delta)} \cup \{z_0\}$ gilt:

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{r}{\delta}\frac{n!}{\delta^n} \max_{\xi \in \partial B(z_0,r)} |f(\xi)|$$

XII.7.1 Anmerkung

Die Ungleichung wird schlecht, falls δ klein ist, d.h., falls z in der Nähe vom Rand der Kugel liegt.

XII.8 Folgerung 1 ($\delta = r$)

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!}{r^n} \max_{\xi \in \partial B(z_0,r)} |f(\xi)|$$

XII.9 Folgerung 2 ($\delta = \frac{r}{2}$)

Für $z \in B(z_0, \frac{r}{2})$

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq c_n \frac{n!}{r^n} \max_{\xi \in \partial B(z_0,r)} |f(\xi)|$$

$c_n \in \mathbb{R}$ Konstante ($c_n = 2^{n+1}$)

XII.10 Satz 7 (Liouville)

Vor.:

f holomorph auf $\mathbb{C}$

Beh.:

f beschränkt $\implies$ f konstant

XII.11 Satz 8 (Hauptsatz der Algebra)

Vor.:

$p(z) := a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \qquad n \geq 1, \quad a_n \neq 0, \quad a_i \in \mathbb{C}$

Beh.:

Es existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $p(z_0) = 0$.

XII.12 Satz 9 (Weierstraß)

Vor.:

$G \subset \mathbb{C}$ offen, $f_n : G \to \mathbb{C}$ holomorph $(n = 1, 2, \ldots)$,
$f_n \to f$ lokal gleichmäßig.

Beh.:

1. f ist holomorph.
2. $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ lokal gleichmäßig.

XII.13 Lemma 1 (Existenz von Nullstellen)

Vor.:

F holomorph auf $\overline{B(z_0, r)}$, $|F(z_0| < \min_{z \in \partial B(z_0,r)} |F(z)|$.

Beh.:

F hat Nullstelle in $B(z_0, r)$.

XII.14 Satz 10 (Gebietstreue)

Vor.:

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, f holomorph auf G, f nicht konstant.

Beh.:

$f(G)$ ist Gebiet.

XII.15 Satz 11 (Mittelwertsatz von Gauß)

Vor.:

f holomorph auf $\overline{B(z_0, r)}$

Beh.:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta$$

XII.16 Satz 12 (Maximum Modulus Theorem)

Vor.:

γ EGI-Weg, f holomorph auf und innerhalb γ, f nicht konstant.

Beh.:

Das Maximum von $|f(z)|$ auf und innerhalb γ wird auf γ und nicht innerhalb γ angenommen.

XII.17 Satz 13 (Minimum Modulus Theorem)

Vor.:

γ EGI-Weg, f holomorph auf und innerhalb γ, f nicht konstant.
Sei $f(z) \neq 0$ innerhalb γ.

Beh.:

Das Minimum von $|f(z)|$ auf und innerhalb γ wird auf γ und nicht innerhalb γ angenommen.

XII.18 Definition: Ordnung einer Nullstelle (Multiplizität)

Sei f holomorph in z_0. f hat in z_0 eine *Nullstelle der Ordnung (Multiplizität)* p, falls in einer Umgebung $U \ni z_0$ gilt $f(z) = (z - z_0)^p \cdot h(z)$, mit h holomorph in z_0 und $h(z_0) \neq 0$.

XII.19 Definition: Pol (Ordnung / Multiplizität)

Sei $U \ni z_0$ offene Menge, f holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$.
Falls $f(z) = \frac{h(z)}{(z-z_0)^p}$ $(p \in \mathbb{N})$ mit h holomorph auf U und $h(z_0) \neq 0$,
so hat f in z_0 einen *Pol der Ordnung (Multiplizität)* p

D.h., $\frac{1}{f}$ hat in z_0 eine Nullstelle der Ordnung p.

XII.20 Satz 14 (Argument-Theorem)

Vor.:

γ EGI-Weg, α, β liegen innerhalb γ,
f holomorph auf und innerhalb γ, mit Ausnahme von α
α Pol der Ordnung p, β Nullstelle der Ordnung n,
f habe keine weiteren Nullstellen auf und innerhalb γ.

Beh.:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n - p$$

XII.21 Satz 15 (Rouché)

Vor.:

γ EGI-Weg, $\quad f, g$ holomorph auf und innerhalb γ,
$|g(z)| < |f(z)|$ auf γ.

Beh.:

f und $f+g$ haben dieselbe Anzahl von Nullstellen innerhalb γ (mit Multiplizität).

XII.22 Satz 16 (Taylorentwicklung)

Vor.:

f holomorph auf $B(a, R)$.

Beh.:

Für alle $z \in B(a, R)$ gilt:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots$$

Anmerkung

Die Konvergenz der Reihe ist lokal gleichmäßig.

XII.23 Definition: Diskrete Menge

Sei $G \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Teilmenge $A \subset G$ heißt *diskret*, falls für alle $z_0 \in G$ eine Umgebung U_{z_0} existiert mit $|U_{z_0} \cap A|$ ist endlich.

XII.24 Identitätssatz

Vor.:

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $\quad f$ holomorph auf G.

Beh.:

Äquivalent sind:

1. $f(z) \equiv 0$
2. f hat in G eine Nullstelle der Ordnung ∞
3. Es gibt eine *nicht* diskrete Teilmenge $A \subset G$ mit $f(z) = 0 \; \forall \, z \in A$

XII.25 Folgerung (Permanenzprinzip)

Vor.:

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, f holomorph auf G, $A \subset G$ nicht diskret.

Beh.:

f ist durch die Werte auf A vollständig bestimmt.

XII.26 Satz (Laurent-Entwicklung)

Vor.:

$r_1 > r_2$, $R := B(a, r_1) \setminus \overline{B(a, r_2)}$ (offener Ring),
f holomorph auf $\bar{R}$.

Beh.:

Für $z \in R$ ist

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n}_{Nebenteil} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z-a)^{-n}}_{Hauptteil}$$

wobei

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(a,r_1)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw \\ a_{-n} &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(a,r_2)} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}} dw \end{aligned}$$

XII.27 Definition: Residuum

$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(a,r_2)} f(w) dw$ aus der Laurent-Reihe heißt *Residuum* von f an der Stelle a.
$\mathrm{res}_a f$ sei das Residuum der Funktion f an der Stelle a.

XII.28 Definition: Isolierte Singularität

Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, f holomorph auf $U \setminus \{z_0\}$, U Umgebung von z_0.
Dann heißt z_0 *isolierte Singularität* von f.

XII.28.1 Klassifizierung von isolierten Singularitäten

1. **Hebbare Singularität:**
   f beschränkt auf $U \setminus \{z_0\}$
   $\Longrightarrow f$ holomorph fortsetzbar in z_0 (Riemannscher Hebbarkeitssatz XII.6)
   $\Longleftrightarrow f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$

2. **Singularität mit Pol der Ordnung n:**
   $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$
   $\Longrightarrow \frac{1}{f(z)}$ holomorph fortsetzbar in z_0 wobei z_0 dann Nullstelle der Ordnung n von $\frac{1}{f(z)}$ ist.
   $\Longleftrightarrow f$ hat Pol der Ordnung n in z_0.
   $\Longleftrightarrow f = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (a_{-n} \neq 0)$

3. **Wesentliche Singularität:**
   Falls nicht 1. oder 2., so heißt z_0 *wesentliche Singularität* von f.
   $\Longleftrightarrow f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (\nexists\, n \in \mathbb{N} : a_{-k} = 0 \;\forall\, k > n)$

Kapitel XIII

Satz Casorati - Weierstraß

XIII.1 Satz 1 (Casorati - Weierstraß)

Vor.:

z_0 sei wesentlich Singularität von $f : U \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$

Beh.:

Für jede Umgebung $V \subset U$ von z_0 gilt:

$$\overline{f(V \setminus \{z_0\})} = \mathbb{C}$$

XIII.2 Satz 2 (Wachstumsverhalten von Polynomen)

Vor.:

Sei $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ Polynom vom Grad n ($a_n \neq 0$).

Beh.:

Für $|z| \geq 1$ gilt:

$$|p(z)| \leq M \cdot |z|^n$$

XIII.3 Definition: Ganze Funktion, ganze transzendente Funktion

Eine Funktion f heißt *ganze Funktion*, falls f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.
Eine Funktion f heißt *ganze transzendente Funktion*, falls f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist und f kein Polynom ist.

XIII.4 Satz 3 (Verallgemeinerung von Liouville)

Vor.:

f ganze Funktion, es gibt $M, R > 0, n \in \mathbb{N}_0$ mit
$|f(z)| \leq M|z|^n$ für alle $|z| \geq R$.

Beh.:

Dann ist f Polynom vom Grad $\leq n$.

XIII.5 Satz 4 (Casorati - Weierstraß für ∞)

Vor.:

f ganze transzendente Funktion.

Beh.:

Für alle $R > 0$ gilt:

$$\overline{f(\mathbb{C} \setminus \mathrm{B}(0, R))} = \mathbb{C}$$

Kapitel XIV

Logarithmus

"Umkehrfunktion" von exp

XIV.1 Definition: $\mathbb{C}^*$

$$\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

XIV.2 Definition: Logarithmus

Sei $z \in \mathbb{C}^*$. Ein $w \in \mathbb{C}$ mit $\exp(w) = z$ heißt *Logarithmus* von z.
(w ist nicht eindeutig bestimmt!)

XIV.3 Definition: Zweig des Logarithmus

$G \subset \mathbb{C}^*$ Gebiet. Eine stetige Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ mit $\exp(f(z)) = z \;\forall\, z \in G$ heißt *Zweig des Logarithmus (Logarithmusfunktion)* auf G.

Bem.:

Falls $f, g : G \to \mathbb{C}$ Zweige des Logarithmus sind, so ist $f(z) = g(z) + 2k\pi i$ für ein $k \in \mathbb{Z}$ und alle $z \in G$.

XIV.4 Definition: Zweig des Argumentes

Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ Gebiet. Eine stetige Funktion $\varphi : G \to \mathbb{R}$ heißt *Zweig des Argumentes* (des Winkels) (*Argumentfunktion*), falls $\varphi(z)$ für jedes $z \in G$ ein Argument (Winkel) von z ist.

XIV.5 Satz 1

Vor.:

$G \subset \mathbb{C}^*$ Gebiet

Beh.:

Auf G gilt:

es existiert ein Zweig des Logarithmus

$\iff$

es existiert ein Zweig des Argumentes

XIV.6 Satz 2

Vor.:

$G \subset \mathbb{C}^*$ Gebiet, $\qquad f$ Zweig des Logarithmus auf G

Beh.:

f ist holomorph und $f'(z) = \frac{1}{z}$.

Bem.:

Auf $\mathbb{C}^*$ (oder auf einem Ring $\subset \mathbb{C}^*$) gibt es *keinen* Zweig des Logarithmus.

XIV.7 Satz 3

Vor.:

$G \subset \mathbb{C}^*$ Gebiet und einfach zusammenhängend.

Beh.:

Auf G gibt es einen Zweig des Logarithmus.

XIV.8 Definition: Potenz

$a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}$

$$a^b := \exp(b \cdot \log a)$$

XIV.8.1 Eigenschaften

Fall 1: a fest, b variabel

$$\begin{aligned} a^z &:= z \mapsto \exp(z \log a) \\ (a^z)' &= a^z \cdot \log a \\ a^{z_1+z_2} &= a^{z_1} \cdot a^{z_2} \end{aligned}$$

Fall 2: a variabel, b fest

Welchen Zweig des Logarithmus wählt man für z^b ?
$\rightarrow$ Zweig der b-ten Potenz:

XIV.9 Definition: Zweig der b-ten Potenz

Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ Gebiet, auf dem ein Zweig des Logarithmus existiert.
Dann heißt $z \mapsto \exp(b \cdot \log z)$ ein *Zweig der b-ten Potenz* auf G.

XIV.9.1 Spezialfall

$b = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$. Betrachte die n-te Wurzel $z^{\frac{1}{n}}$.
Sei log ein Zweig des Logarithmus auf G.
Dann gibt es genau n Zweige der b-ten Potenz

$$f_k(z) = \exp\left(\frac{\log(z) + 2k\pi i}{n}\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Kapitel XV

Der Residuensatz

XV.1 Satz 1 (Residuensatz)

Vor.:

C sei EGI-Weg, $\quad \{a, b, c, \ldots\}$ innerhalb C, endlich viele,
f holomorph auf und innerhalb C mit Ausnahme von $a, b, c, \ldots$ mit Residuen $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \ldots$

Beh.:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \ldots)$$

XV.2 Bemerkung

Vor.:

Sei a_{-1} Residuum für einen Pol a der Ordnung m der Funktion f.

Beh.:

$$a_{-1} = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-a)^m f(z)\right]$$

XV.3 Anwendungen des Residuensatzes

XV.3.1 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$

Vor.:

$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ holomorph komplexifizierbar, $\quad R > 0$,
$\Gamma := R \cdot e^{it}, t \in [0, \pi]$ (Halbkreis) $\quad C := \Gamma([0, \pi]) \cup [-R, R]$
F stetig auf Γ, $\quad \exists\, a > 1, M \in \mathbb{R}\ \forall\, z \in \Gamma : |F(z)| \leq \frac{M}{R^a}$.

Beh.:

$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma F(z)dz = 0$ und somit

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = \lim_{R\to\infty} \oint_C F(z)dz$$

Anmerkung

Benutze den Residuensatz, falls innerhalb C Punkte $a, b, c, \ldots$ liegen.

Beispiel

$F(x) = \frac{1}{x^6+5}$
Siehe Vorlesungen vom 27.05.2004 und 08.06.2004 sowie Übungen.

XV.3.2 $\int_0^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)d\theta$

Komplexifizieren: $z := e^{i\theta}$
Benutze dabei:

$$\begin{aligned}
\sin\theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\
&= \frac{z - z^{-1}}{2i} \\
\cos\theta &= \ldots = \frac{z + z^{-1}}{2} \\
d\theta &= \frac{1}{iz}dz
\end{aligned}$$

Falls beim Einsetzen nicht alle θ aufgelöst werden können, ist diese Methode nicht anwendbar. Sonst:

$$\begin{aligned}
C &:= \left\{e^{it} \mid 0 \le t \le 2\pi\right\} \quad \text{(Einheitskreis)} \\
\int_0^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)d\theta &= \oint_C \underbrace{G\left(\frac{z - z^{-1}}{2i}, \frac{z + z^{-1}}{2}\right)\frac{1}{iz}}_{=:f(z)} dz \\
&= 2\pi i \left[\sum \text{Residuen von } f \text{ innerhalb } C\right]
\end{aligned}$$

Beispiel

$G(\sin\theta, \cos\theta) = \frac{1}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$
Siehe Vorlesung vom 08.06.2004 sowie Übungen.

XV.3.3 $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) \cdot \{\cos mx, \sin mx\}\, dx$

Benutze: $\cos(mx)$ ist gerade und $\sin(mx)$ ungerade. Gut anwendbar falls F gerade oder ungerade ist.
$\Gamma := R \cdot e^{it}, t \in [0, \pi]$ (Halbkreis) $\qquad C := \Gamma([0, \pi]) \cup [-R, R]$
Versuche $F(x) \cdot \{\cos mx, \sin mx\}$ als $e^{imz} \cdot F(z)$ zu schreiben und benutze:

Beh.:

Falls $|F(z)| < \frac{M}{R^k}$ auf Γ, $k > 0$, F stetig auf Γ (für R groß),
dann gilt für $m \in \mathbb{R}, m > 0$:

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma e^{imz} \cdot F(z) = 0$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\oint_C e^{imz} F(z)dz &= \int_{-R}^{R} e^{imx} F(x)dx + \int_\Gamma e^{imz} F(z)dz \\
&= 2\pi i \left(\sum \text{ Residuen von } e^{imz}F(z) \text{ innerhalb } C\right)
\end{aligned}$$

Beispiel

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}dx &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}dx \\
\int_{-\infty}^\infty \frac{\cos(x)}{x^2+1}dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{x^2+1}dx \qquad \text{da } F \text{ gerade, } \sin \text{ ungerade sind} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}dx \\
\Longrightarrow \quad \oint_C \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz &= 2\pi i \left(\sum \text{ Residuen innerhalb } C\right) \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{1+x^2}dx + \int_\Gamma \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)}{x^2+1}dx + \underbrace{\int_{-R}^{R} \frac{i\sin(x)}{x^2+1}dx}_{=0} + \underbrace{\int_\Gamma \frac{e^{iz}}{1+z^2}dz}_{\to 0 \text{ (Beh.)}} \\
&\to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{1+x^2}dx
\end{aligned}$$

Siehe Vorlesung vom 08.06.2004 sowie Übungen.

XV.3.4 $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$ "$f(n)$ als Residuum"

Vor.:

$C_N :=$ Quadrat durch die Punkte
$(N+\frac{1}{2})(1+i), (N+\frac{1}{2})(1-i), (N+\frac{1}{2})(-1+i), (N+\frac{1}{2})(-1-i)$.

1. f holomorph auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme von endlich vielen Polen.
2. Kein $n \in \mathbb{Z}$ ist Pol von f.
3. Auf C_N (N groß) sei $|f(z)| \leq \frac{K}{|z|^k}$, $\quad k > 1, \quad K$ unabhängig von N.

$G(z) := \pi \cot(\pi z) \cdot f(z)$

Beh.:

Dann ist $\text{res}_n G = f(n)$ und für N hinreichend groß (so, dass alle Pole von f innerhalb von C_N liegen)

$$\oint_{C_N} G(z)dz = 2\pi i \left(\sum_{n=-N}^{N} f(n) + \sum \text{Residuen von } G \text{ in den Polen von } f \right)$$

Weiterhin gilt: Auf C_N ist $|\cot(\pi z)| \leq M$, wobei M unabhängig von N ist.
Deshalb ist (zusammen mit Vor. 3) $\oint_{C_N} G(z)dz \to 0$ für $N \to \infty$.
Zusammen ergibt dies:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} f(n) = -\sum \text{Residuen von } G \text{ in den Polen von } f$$

Beispiel

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$
Siehe Vorlesung vom 08.06.2004 sowie Übungen.

XV.4 Satz 2 (Urbilder)

Vor.:

$U \subset \mathbb{C}$ offen, $\quad f : U \to \mathbb{C}$ holomorph,
$z_0 \in U$ sei w_0-Stelle (d.h. 0-Stelle von $f(z) - w_0$) der Vielfachheit k, $1 \leq k < \infty$.

Beh.:

Es existiert eine Umgebung $V \subset U$ von z_0 und W von $f(z_0) = w_0$, sodass $W \subset f(V)$ und dass zu jedem $w \in W$, $\quad w \neq w_0$ genau k verschiedene Punkte von V existieren, in denen f den Wert w annimmt, mit Vielfachheit 1.

XV.5 Satz (zur lokalen Bijektivität)

Vor.:

$U \subset \mathbb{C}$ offen, $\quad f : U \to \mathbb{C}$ holomorph, $\quad z_0 \in U$, $\quad w_0 = f(z_0)$.

Beh.:

Es existiert eine Umgebung $V \subset U$ von z_0, die durch f *bijektiv* auf eine Umgebung W von w_0 abgebildet wird

$\Longleftrightarrow$

$f'(z_0) \neq 0$

XV.6 Satz 3 (Mittag-Leffler)

Vor.:

1. f holomorph auf $\mathbb{C}$ mit Ausnahme der *einfachen* Pole $a_1, a_2, a_3, \ldots$, wobei $|a_1| \leq |a_2| \leq |a_3| \leq \ldots$, $\quad 0 \notin A := \{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$.
2. Das Residuum von f in a_i sei b_i.
3. C_N seien Kreislinien mit Radien R_N, mit $C_N \cap A = \emptyset$,
   $R_N \nearrow \infty$ für $N \to \infty$ und
   $|f(z)| \leq M$ auf C_N, wobei M unabhängig von N ist.

Beh.:

Auf $\mathbb{C} \setminus A$ gilt:

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right)$$

Lokal gleichmäßige Konvergenz.

Kapitel XVI

Abbildungssatz von Riemann

XVI.1 Definition: Biholomorph, konform

Seien $U, V \subset \mathbb{C}$ offen. $f : U \to V$ heißt *biholomorph (konform)*, falls f bijektiv ist und f, f^{-1} beide holomorph sind.

XVI.2 Definition: Automorphismus

$G \subset \mathbb{C}$ Gebiet. Eine biholomorphe Abbildung $f : G \to G$ heißt *Automorphismus*. $\mathrm{Aut}\,(G) :=$ Menge aller Automorphismen auf G.

XVI.3 Satz 1 (Automorphismengruppe auf $\mathbb{C}$)

$$f \in \mathrm{Aut}\,(\mathbb{C}) \Longleftrightarrow f(z) = az + b, \quad a \neq 0$$

XVI.4 Definition: $\hat{\mathbb{C}}$

$$\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{+\infty\}$$

XVI.5 Definition: Holomorph in ∞

$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$

$$f(w) \text{ holomorph in } w = \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad f\left(\frac{1}{w}\right) \text{ holomorph in } w = 0$$

XVI.6 Satz 2 (Automorphismengruppe auf $\hat{\mathbb{C}}$)

Möbius-Transformation

$$f \in \mathrm{Aut}\,(\hat{\mathbb{C}}) \Longleftrightarrow f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

XVI.7 Satz 3 (Automorphismengruppe auf B)

$B := B(0,1)$

$$f \in \mathrm{Aut}\,(B) \Longleftrightarrow f(z) = e^{i\lambda}\frac{z-b}{1-\bar{b}z}, \quad \lambda \in [0, 2\pi),\ b \in B$$

XVI.8 Satz 4 (Lemma von Schwarz)

Vor.:

$B := B(0,1), \qquad f : B \to B$ holomorph, $\qquad f(0) = 0$

Beh.:

1. $|f(z)| \leq |z| \quad \forall\, z \in B$ und $|f'(0)| \leq 1$.
2. Falls für ein $z_0 \neq 0$ gilt $|f(z_0)| = |z_0|$ oder falls $|f'(0)| = 1$ gilt, dann ist f eine Drehung, also $f(z) = e^{i\lambda} \cdot z, \quad \lambda \in [0, 2\pi)$.

XVI.9 Lemma 1 (technisch)

Vor.:

$B := B(0,1) \qquad G \subset B$ Gebiet, einfach zusammenhängend,
$0 \in G, \qquad G \neq B$.

Beh.:

Es existiert eine *injektive* Abbildung $h : B \to B$ mit $h(0) = 0$ und $h'(0) > 1$.

XVI.10 Satz 5 (Riemannscher Abbildungssatz)

Vor.:

$\emptyset \neq G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, einfach zusammenhängend,
$G \neq \mathbb{C}, \qquad B := B(0,1)$.

Beh.:

1. Es existiert ein $f : G \to B$ biholomorph.
2. Mit $a \in G$ kann man vorschreiben:
   $f(a) = 0, \quad f'(a) > 0 \qquad$ (also $f'(a) \in \mathbb{R}$)
   Dadurch ist f eindeutig bestimmt.

Beachte:

$f : U \to V$ biholomorph $\Longrightarrow f'(z) \neq 0\ \forall\, z \in U$ (Vorlesung 11)

Bem.:

$f : U \to V$ biholomorph $\Longrightarrow f$ Winkel- und Orientierungstreu.

XVI.11 Satz 6

Vor.:

$U \subset \mathbb{C}$ offen,
(f_n) lokal gleichmäßig konvergente Folge holomorpher Funktionen auf U mit Limes f, f nicht konstant, f habe in $z_0 \in U$ eine k-fache w_0-Stelle.

Beh.:

Es gibt eine beliebig kleine Umgebung V von z_0, $V \subset U$, so dass jedes f_n mit n hinreichend groß auf V genau k w_0-Stellen (mit Vielfachheiten gezählt) hat.

XVI.12 Folgerung

Falls die f_n injektiv sind, so ist f injektiv.
Anmerkung: Im reellen gilt dies *nicht*, sondern nur im komplexen.

XVI.13 Satz 7 (Montel)

Vor.:

$U \subset \mathbb{C}$ offen,
(f_n) lokal beschränkte Folge holomorpher Funktionen auf U.

Beh.:

(f_n) hat eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Teil 2

Vektoranalysis

Kapitel XVII

Differentialformen höherer Ordnung

XVII.1 Alternierende Multilinearformen

$V:$ n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum (Spaltenvektoren)
V^*: Dualraum, d.h. lineare Abbildungen: $V \to \mathbb{R}$ (Zeilenvektoren)
$v \in V, \qquad \varphi \in V^*, \qquad <\varphi, v>:= \varphi(v).$

XVII.1.1 Definition: Alternierende k-Form

$\omega : V^k \to \mathbb{R}$ heißt *alternierende k-Form* auf V, falls

1. ω linear in jedem Argument:

$$\omega(\ldots, \lambda v_1 + \mu v_2, \ldots) = \lambda\omega(\ldots, v_1, \ldots) + \mu\omega(\ldots, v_2, \ldots)$$

2. $\omega(v_1, \ldots, v_k) = 0, \quad$ falls $v_i = v_j$ für ein Paar $(i, j), \ i \neq j$.

$\Lambda^k V^*$ sei der Raum der alternierenden k-Formen.

$$\Lambda^1 V^* = V, \qquad \Lambda^0 V^* := \mathbb{R}$$

Bem.:

Eigenschaft 2. $\Longleftrightarrow \omega(\ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots) = -\omega(\ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots)$

XVII.1.2 Eigenschaften von alternierenden k-Formen

Sei π Permutation von $(1, 2, \ldots, k)$.

$$\Longrightarrow \omega(v_{\pi(1)}, \ldots, v_{\pi(k)}) = \text{sign}(\pi)\omega(v_1, \ldots, v_k)$$

XVII.1.3 Definition: Dachprodukt / Äußeres Produkt

Seien $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in V^*$.

$$\begin{aligned} &\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k : V^k \to \mathbb{R} \\ &(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_k)_{(v_1,\ldots,v_k)} \quad := \quad \det \begin{pmatrix} <\varphi_1, v_1> & \ldots & <\varphi_1, v_k> \\ \vdots & & \vdots \\ <\varphi_k, v_1> & \ldots & <\varphi_k, v_k> \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies ist eine Multilinearform in den φ_i:

$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \lambda\varphi_i + \mu\varphi_j \wedge \ldots \wedge \varphi_k = \lambda(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_i \wedge \ldots \wedge \varphi_k) + \mu(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_j \wedge \ldots \wedge \varphi_k)$

XVII.2 Satz 1

Vor.:

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sei Basis von V^*.

Beh.:

Die Menge $\{\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n\}$ ist eine Basis für $\Lambda^k V^*$. Insbesondere ist $\dim \Lambda^k V^* = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$.

XVII.3 Satz 2

Vor.:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_k \end{pmatrix} &= A \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_k \end{pmatrix}, \\ A &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \ldots & a_{k,k} \end{pmatrix}, \\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k &\in V^* \end{aligned}$$

Beh.:

$$\psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_k = \det(A) \cdot \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge \ldots \wedge \varphi_k$$

XVII.4 Definition: Produkte von Multilinearformen

$\omega \in \Lambda^k V^*, \sigma \in \Lambda^l V^*,$
$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} a_{i_1,\ldots,i_k} \varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}$

$\sigma = \sum_{j_1 < \ldots < j_l} b_{j_1,\ldots,j_l} \, \varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_l}$

$\omega \wedge \sigma \in \Lambda^{k+l} V^*$

$$\omega \wedge \sigma := \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_k \\ j_1 < \ldots < j_l}} a_{i_1,\ldots,i_k} \cdot b_{j_1,\ldots,j_l} \cdot (\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{i_k}) \wedge (\varphi_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varphi_{j_l})$$

Sei $a \in \mathbb{R}$.

$$a \wedge \omega = \omega \wedge a := a \cdot \omega$$

Beh.:

$$\sigma \wedge \omega = (-1)^{k \cdot l} \omega \wedge \sigma$$

XVII.5 Definition: Differentialform höherer Ordnung

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen,
für $p \in U$ sei $T_p^*(U)$ der Dualraum zum Tangentialraum $T_p(U)$.

$\omega : U \to \bigcup_{p \in U} \Lambda^k T_p^*(U)$ *Differentialform k-ter Ordnung*
Dann hat ω die Darstellung

$$\omega(x) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}(x) \; dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

XVII.5.1 ω stetig, C^r, ...

ω heißt *stetig*, C^r, ..., falls $f_{i_1,\ldots,i_k}$ stetig, C^r, ...

XVII.6 Ableitung einer Differentialform

Sei ω Differentialform k-ter Ordnung.

$$d\omega := \sum_{i_1 < \ldots < i_k} df_{i_1,\ldots,i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

Zu df: Vergleiche XI.4

XVII.7 Definition: Geschlossen, exakt

ω heißt *geschlossen*, falls $d\omega = 0$.
ω heißt *exakt*, falls $\omega = d\eta$.

Bem.:

exakt $\Rightarrow$ geschlossen
geschlossen $\not\Rightarrow$ exakt
Aber: Falls U zum Beispiel sternförmig ist, so gelten beide Richtungen. (Vergleiche XVII.15)

XVII.8 Beispiel: $(n-1)$-Formen

Wähle spezielle Basis für $\Lambda^{n-1}T_p^*(U)$ (dim $= n$):

$$(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n,$$

wobei $\widehat{dx_i}$ heißt, dass dx_i in dem Dachprodukt weggelassen wird.
C^1-Form ω:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge \widehat{dx_i} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_n \\ \Longrightarrow d\omega &= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right) dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n \end{aligned}$$

XVII.9 Notation

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_i dx_i := \sum_{i_1 < \ldots < i_k} f_{i_1,\ldots,i_k}(x)\ dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

$I = (i_1, \ldots i_k), \quad 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$

XVII.10 Satz 3

Teil a

Vor.:

ω_1, ω_2 k-Formen, $\quad C^1, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Beh.:

$$d(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda d\omega_1 + \mu d\omega_2$$

Teil b

Vor.:

ω k-Form, $\quad \sigma$ l-Form, $\quad$ beide C^1.

Beh.:

$$d(\omega \wedge \sigma) = (d\omega) \wedge \sigma + (-1)^k \omega \wedge (d\sigma)$$

Teil c

Vor.:

ω k-Form, C^2.

Beh.:

$$d(d\omega) = 0$$

XVII.11 Integration von Differentialformen höherer Ordnung

Sei $\omega(x) = f(x) \cdot dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ eine n-Form, $\qquad A \subset \mathbb{R}^n$.

$$\int_A \omega := \int_A f(x)\ dx_1 \ldots dx_n$$

falls $f_{|A}$ integrierbar ist (z.B. A kompakt, f stetig).

XVII.12 Definition: Rücktransport von Differentialformen (Pullback)

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx_I = \sum_{i_1<\ldots<i_k} f_{i_1,\ldots,i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k}$$

eine k-Form in U. Weiter sei eine offene Menge $V \subset \mathbb{R}^m$ und eine stetig differenzierbare Abbildung

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : V \to U \subset \mathbb{R}^n$$

vorgegeben. Dann definiert man eine k-Form $\varphi^*\omega$ in V durch

$$\varphi^*\omega := \sum_{|I|=k} (f_I \circ \varphi) d\varphi_I = \sum_{i_1<\ldots<i_k} (f_{i_1,\ldots,i_k} \circ \varphi) d\varphi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\varphi_{i_k}.$$

Salopp: "Ersetze x_i durch φ_i."

XVII.13 Beispiel: Rücktransport

1. Fall $k = 1$ (1-Form)

$$\begin{aligned}
\omega &= \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i = f^T \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}, \qquad f = (f_1, \ldots, f_n)^T < \\
\varphi^*\omega &= (f \circ \varphi)^T \cdot \begin{pmatrix} d\varphi_1 \\ \vdots \\ d\varphi_i \\ \vdots \\ d\varphi_n \end{pmatrix}, \qquad d\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} dy_j \\
\Longrightarrow \varphi^*\omega &= (f \circ \varphi)^T \cdot D\varphi \cdot \begin{pmatrix} dy_1 \\ \vdots \\ dy_m \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Fall $m = k$

$$\varphi^*\omega = \left(\sum_{i_1 < \ldots < i_k} (f_{i_1, \ldots, i_k} \circ \varphi) \cdot \det \left(\frac{\partial(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_k})}{\partial(y_1, \ldots, y_k)} \right) \right) \cdot dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_k$$

3. Fall $m = n = k$

$$\varphi^*\omega = (f \circ \varphi) \cdot \det(D\varphi) \cdot dy_1 \wedge \ldots \wedge dy_n$$

XVII.14 Satz 4

1. $$\varphi^*(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = \lambda\varphi^*\omega_1 + \mu\varphi^*\omega_2$$

2. $$\varphi^*(\omega \wedge \sigma) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\sigma)$$

3. $$\omega \in C^1,\ \varphi \in C^2 \Longrightarrow d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega)$$

4. $$(\varphi \circ \psi)^*\omega = \psi^*(\varphi^*(\omega))$$

XVII.15 Satz 5 (Lemma von Poincaré)

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, sternförmig, $\qquad \omega$ eine geschlossene C^1-k-Form auf U.

Beh.:

ω ist exakt (d.h. $\omega = d\eta$).

XVII.16 Lemma

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $[0,1] \times U \subset V$,
σ sei geschlossene C^1-k-Form auf V,
$\psi_0, \psi_1 : U \to V$ mit $\psi_0(x) = (0, x)$, $\psi_1(x) = (1, x)$.

Beh.:

$$\psi_1^* \sigma - \psi_0^* \sigma = d\eta$$

wobei η eine C^1-$(k-1)$-Form auf U ist.

XVII.17 Vektoranalysis in $\mathbb{R}^3$

$u, v \in \mathbb{R}^3$, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, $v = (v_1, v_2, v_3)^T$
$U \subset \mathbb{R}^3$, $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, $a \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ “Vektorfeld”

XVII.17.1 Definition: Skalarprodukt

$$u \cdot v := u^T v = \sum u_i v_i$$

XVII.17.2 Definition: Vektorprodukt

$$u \times v := \det \begin{pmatrix} e_1 & u_1 & v_1 \\ e_2 & u_2 & v_2 \\ e_3 & u_3 & v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

XVII.17.3 Definition: Nabla-Operator

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T =: (\partial_1, \partial_2, \partial_3)^T$$

XVII.17.4 Definition: Gradient

$$\operatorname{grad} f := \nabla f := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^T = (\partial_1 f, \partial_2 f, \partial_3 f)^T$$

XVII.17.5 Definition: Divergenz

$$\operatorname{div} a := \nabla \cdot a = \partial_1 a_1 + \partial_2 a_2 + \partial_3 a_3$$

XVII.17.6 Definition: Rotation

$$\operatorname{rot} a := \nabla \times a = \begin{pmatrix} \partial_2 a_3 - \partial_3 a_2 \\ \partial_3 a_1 - \partial_1 a_3 \\ \partial_1 a_2 - \partial_2 a_1 \end{pmatrix}$$

XVII.17.7 Definition: Vektorielles Streckenelement

$d\overrightarrow{s} := (dx_1, dx_2, dx_3)^T$, das *vektorielle Streckenelement*

XVII.17.8 Definition: Vektorielles Flächenelement

$d\overrightarrow{S} := (dx_2 \wedge dx_3, dx_3 \wedge dx_1, dx_1 \wedge dx_2)^T$, das *vektorielle Flächenelement*

XVII.17.9 Definition: Volumenelement

$dV := dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$, das *Volumenelement*

XVII.17.10 Darstellung von Differentialformen

$U \subset \mathbb{R}^3$ ω_i sei Differentialform i-ter Ordnung.
Dann läßt sich ω_i wie folgt darstellen:

- $\omega_0 = f$ für ein $f : U \to \mathbb{R}$
- $\omega_1 = a\, d\overrightarrow{s}$ für ein $a : U \to \mathbb{R}^3$
- $\omega_2 = b \cdot d\overrightarrow{S}$ für ein $b : U \to \mathbb{R}^3$
- $\omega_3 = g \cdot dV$ für ein $g : U \to \mathbb{R}^3$
- $\omega_i = 0$ für $i > 3$ (im $\mathbb{R}^3$)

XVII.17.11 Berechnung von $d\omega$

$f \in C^1(U, \mathbb{R})$, $a, b \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$
Wenn man Differentialformen i-ter Ordnung wie oben schreibt, so erhält man:

- $df = \operatorname{grad} f \cdot d\overrightarrow{s}$
- $d(a \cdot d\overrightarrow{s}) = (\operatorname{rot} a) d\overrightarrow{S}$
- $d(b \cdot d\overrightarrow{S}) = (\operatorname{div} b) \cdot dV$
- Für ω Differentialform mit Ordnung ≥ 3 ist $d\omega = 0$ (im $\mathbb{R}^3$).

XVII.18 Folgerung (aus Satz 5)

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^3$ sternförmig.
$a \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{rot} a = 0$.
$b \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ mit $\operatorname{div} b = 0$.

Beh.:

Es existiert ein $f \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit $a = \operatorname{grad} f$.
Es existiert ein $c \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ mit $b = \operatorname{rot} c$.

Kapitel XVIII

Integration von Differentialformen

XVIII.1 Definition: Integrierbar

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\omega = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ n-Form auf U.
Sei weiterhin $A \subset U$. Dann heißt ω auf A *integrierbar*, falls $f_{|A}$ integrierbar ist.
Setze

$$\int_A \omega := \int_A f(x) dx_1 \ldots dx_n$$

Beispiel für Integrierbarkeit:

A kompakt, ω stetig (Ana III).

XVIII.2 Satz 1 (Koordinatenwechsel)

Vor.:

$U, V \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi : U \to V$ C^1-Diffeomorphismus.
ω sei stetige n-Form auf V und $A \subset U$ kompakt.

Beh.:

$$\int_{\varphi(A)} \omega = \begin{cases} \int_A \varphi^* \omega, & \text{falls } \varphi \text{ orientierungstreu} \\ -\int_A \varphi^* \omega, & \text{falls } \varphi \text{ orientierungsumkehrend} \end{cases}$$

XVIII.3 Definition: Orientierungstreu, orientierungsumkehrend

φ heißt *orientierungstreu*, falls $\det D\varphi(y) > 0$ für alle $y \in U$.
φ heißt *orientierungsumkehrend*, falls $\det D\varphi(y) < 0$ für alle $y \in U$.

XVIII.4 Wiederholung: Mannigfaltigkeiten

XVIII.4.1 Definition: Mannigfaltigkeit, Karte

$M \subset \mathbb{R}^n$ heißt C^p-k-dimensionale *Mannigfaltigkeit*, wenn

$$\begin{aligned}&\forall\, \bar{y} \in M\ \exists\, V \subset M \text{ relativ offen }, \bar{y} \in V, U \subset \mathbb{R}^k \text{ offen}\\&\text{und eine } C^p\text{-Immersion } \varphi : U \to \mathbb{R}^n \text{ mit}\\&\varphi(U) = V \text{ und } \varphi : U \to V \text{ Homöomorphismus.}\end{aligned}$$

φ heißt dann *Karte*.

Notation: $\varphi : U \xrightarrow{Ⓚ} V$.

XVIII.4.2 Definition: Immersion

φ heißt *Immersion*, falls
$\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar ist und Rang $D\varphi(x) = k\ \forall\, x \in U$,
also $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ linear unabhängig ist.

XVIII.4.3 Definition: Kartenwechsel

$V_1, V_2 \subset M, \qquad \varphi_1 : U_1 \xrightarrow{Ⓚ} V_1, \quad \varphi_2 : U_2 \xrightarrow{Ⓚ} V_2$
$W_1 := \varphi_1^{-1}(V_1 \cap V_2), \quad W_2 := \varphi_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$

$$\tau : W_1 \to W_2, \quad \tau := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$$

τ heißt *Kartenwechsel*. (Ana III: τ C^k-Diffeomorphismus)

XVIII.4.4 Definition: Gleichorientiert

φ_1, φ_2 heißen *gleichorientiert*, falls τ orientierungstreu ist.

XVIII.5 Definitionen

XVIII.5.1 Atlas

$$\mathfrak{A} := \left\{ \varphi_i : U_i \xrightarrow{Ⓚ} V_i \mid i \in I \right\}$$

heißt *Atlas* von M, falls $\bigcup_{i \in I} V_i = M$ ist.

XVIII.5.2 Orientiert (Atlas)

$\mathfrak{A}$ heißt *orientiert*, falls je zwei Karten aus $\mathfrak{A}$ gleichorientiert sind.

XVIII.5.3 Orientierbar (Mannigfaltigkeit)

M heißt *orientierbar*, falls M einen orientierten Atlas besitzt.

Dann heißt für σ Orientierung, (M, σ) *orientierte Mannigfaltigkeit.*

Zwei orientierte Atlanten $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}$' heißen *äquivalent*, wenn je zwei Karten $\varphi \in \mathfrak{A}, \varphi' \in \mathfrak{A}$' gleichorientiert sind, dass heißt die Orientierung σ ist eine Äquivalenzklasse.

XVIII.5.4 Positiv orientiert (Karte)

Eine Karte $\varphi : U \xrightarrow{\textcircled{K}} V$ heißt *positiv orientiert* bezüglich σ, falls für einen Atlas $\mathfrak{A}$ aus σ gilt, dass φ zu jeder Karte aus $\mathfrak{A}$ gleichorientiert ist.

XVIII.6 Definition: Tangentialraum

Sei $a \in M$. *Tangentialraum* $T_aM \subset \mathbb{R}^n$:

$$v \in T_aM \iff \exists\, C^1\text{-Abbildung } \psi : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M \text{ mit } \psi(0) = a \text{ und } \psi'(0) = v$$

XVIII.7 Lemma

Vor.:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ k-dimensionale Mannigfaltigkeit, $\quad V \subset M, \quad U \subset \mathbb{R}^k,$
$a \in M, \quad \varphi : U \xrightarrow{\textcircled{K}} V, \quad \varphi(c) = a.$

Beh.:

$\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(c), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(c) \right\}$ ist eine Basis von T_aM.

XVIII.8 Definition: Orientierung des Tangentialraumes

(M, σ) orientierte Mannigfaltigkeit, $\quad \mathfrak{A} \in \sigma,$
$\varphi : U \xrightarrow{\textcircled{K}} V \quad a \in V, c \in U$ mit $\varphi(c) = a$.

Wir wissen: $D\varphi(c) : \mathbb{R}^k \to T_aM$ Isomorphismus.
Damit kann Orientierung auf $\mathbb{R}^k$ zu Orientierung auf T_aM gemacht werden:
$(w_1, \ldots, w_k)$ Basis von $\mathbb{R}^k$. Diese sei positiv orientiert (d.h. $\det(w_1, \ldots, w_k) > 0$).

Dann heißt auch $(D\varphi(c)w_1, \ldots, D\varphi(c)w_k)$ bezüglich σ *positiv orientiert.*

Bem.:

Jede Basis von T_aM ist Bild einer $\mathbb{R}^k$-Basis bezüglich $D\varphi(c)$. Ihre Orientierung bezüglich σ wird somit von der Orientierung des Urbildes entschieden.

Speziell ist $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(c), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(c) \right)$ positiv orientiert bezüglich σ.

XVIII.9 Definition: Hyperfläche

Eine $(n-1)$-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt *Hyperfläche.*

XVIII.10 Definition: Einheitsnormalenfeld

M Hyperfläche. $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ heißt *Einheitsnormalenfeld*, falls ν stetig ist, $\nu(a) \perp T_a M$ und $\|\nu(a)\| = 1$ für alle $a \in M$.

XVIII.11 Definition: Positiv orientiert (Einheitsnormalenfeld)

Sei M orientierbar mit Orientierung σ, $\nu : M \to \mathbb{R}^n$ Einheitsnormalenfeld. ν heißt *positiv orientiert*, falls für alle $a \in M$ gilt:

$$\det\left(\nu(a), v_1, \ldots, v_{n-1}\right) > 0,$$

wobei $v_1, \ldots, v_{n-1}$ positiv orientierte Basis für $T_a M$ ist.

XVIII.12 Definition: Kompaktum mit glattem Rand

$A \subset \mathbb{R}^n$ *heißt Kompaktum mit glattem Rand*, falls A kompakt ist und für alle $a \in \partial A$ eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ und $\psi \in C^1(U, \mathbb{R})$ existieren mit

1. $A \cap U = \{x \in U \mid \psi(x) \leq 0\}$
2. $D\psi(x) \neq 0, \ \forall\, x \in U$

Bem.:

∂A ist $(n-1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.

XVIII.13 Satz 2

Vor.:

$A \subset \mathbb{R}^n$ Kompaktum mit glattem Rand.

Beh.:

Es existiert genau ein Einheitsnormalenfeld $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^n$, so dass für alle $a \in \partial A$ ein $\varepsilon > 0$ existiert mit $a + t\nu(a) \notin A$, für alle $t \in (0, \varepsilon)$.

XVIII.14 Definition: Äußeres Normalenfeld

Das Normalenfeld aus Satz 2 heißt *äußeres Normalenfeld*.

XVIII.15 Satz 3

Vor.:

$M \subset \mathbb{R}^n$ Hyperfläche $(n \geq 2)$.

Beh.:

1. Falls M eine Orientierung σ hat, so existiert genau ein Einheitsnormalenfeld, das bezüglich σ positiv orientiert ist.

2. Falls M ein Einheitsnormalenfeld hat, so existiert genau eine Orientierung σ von M, bezüglich der ν positiv orientiert ist.

Beispiel

Das Möbius-Band hat keine Orientierung.

XVIII.16 Definition: Integration von k-Formen

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ω *stetige* k-Form auf U.
$M \subset U$ k-dimensionale C^1-Mannigfaltigkeit.
M sei orientierbar mit Orientierung σ. $A \subset M$ sei kompakt.

a) Sei $\varphi : W \xrightarrow{K} V$ positiv orientierte Karte und $A \subset V$.

$$\int_{(A,\sigma)} \omega := \int_{\varphi^{-1}(A)} \varphi^* \omega$$

b) Falls A nicht in *einer* Karte enthalten ist: Geeignete Stückelung (vgl. Analysis III, Vorlesung 28).

Beh.:

Die Definition ist unabhängig von der gewählten Karte.

XVIII.17 Definition: Kanonische Orientierung

$A \subset \mathbb{R}^n$ Kompaktum mit glattem Rand ∂A. Die *kanonische Orientierung* von ∂A ist die Orientierung, die durch das äußere Normalenfeld ν induziert wird.

XVIII.18 Satz 4 (Satz von Gauß)

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, ω C^1-$(n-1)$-Form auf U,
$A \subset \mathbb{R}^n$ Kompaktum mit glattem Rand ∂A und kanonischer Orientierung.

Beh.:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$$

Bem.:

S. 155, Forster:
Sei $A \subset \mathbb{R}^3$ Kompaktum mit glattem Rand ∂A, $\nu : \partial A \to \mathbb{R}^3$ das äußere Einheitsnormalenfeld und $U \supset A$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}^3$. Dann gilt für jedes stetig differenzierbare Vektorfeld $F : U \subset \mathbb{R}^3$

$$\int_{\partial A} F(x) \cdot \nu(x) dS = \int_{\partial A} F(x) d\overrightarrow{S} = \int_A \operatorname{div} F(x) dV.$$

XVIII.19 Satz 5

Vor.:

$M \subset \mathbb{R}^n$ Hyperfläche mit Einheitsnormalenfeld ν.
Die Orientierung von M sei von ν induziert.
$K \subset M$ kompakt, $\quad f : K \to \mathbb{R}^n$ stetig.

Beh.:

$$\int_K f \cdot d\overrightarrow{S} = \int_K (f \cdot \nu) dS$$

XVIII.19.1 Definition: Flächenelement

dS heißt *Flächenelement*.

XVIII.20 Folgerung ($\mathrm{Vol}(A)$ via ∂A)

Vor.:

$A \subset \mathbb{R}^n$ Kompaktum mit glattem Rand ∂A.
∂A orientiert durch das äußere Normalenfeld.

Beh.:

$$\mathrm{Vol}_n(A) = \frac{1}{n} \int_{\partial A} (x \cdot \nu) dS$$

XVIII.21 Satz (Green)

Vor.:

$A \subset \mathbb{R}^2$ Kompaktum mit glattem Rand ∂A und kanonischer Orientierung,
$f, g \in C^1(A, \mathbb{R})$.

Beh.:

$$\int_{\partial A} f dx + g dy = \int_A \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

XVIII.22 Lemma 1 (Spezialfall Stokes)

Vor.:

ω sei C^1 $(k-1)$-Form auf $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ mit kompaktem Träger.
$H_k := \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 \leq 0\right\} \Longrightarrow \partial H_k = \left\{(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_1 = 0\right\}$
$\nu := (1, 0, 0)^T$ sei die äußere Normale.

Beh.:

$$\int_{H_k} d\omega = \int_{\partial H_k} \omega$$

XVIII.23 Definition: Kompaktum mit glattem Rand, randadaptiert

$A \subset M$ *Kompaktum mit glattem Rand* ∂A, falls für alle $p \in \partial A$ eine Karte $\varphi : W \xrightarrow{\text{Ⓚ}} V$ existiert mit $p \in V$ und

1. $\varphi(H_k \cap W) = A \cap V$
2. $\varphi(\partial H_k \cap W) = \partial A \cap V$

φ heißt *randadaptiert*.

Bem.:

∂A ist kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension $k-1$.

XVIII.24 Satz von Stokes

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $M \subset U$ orientierte k-dimensionale Mannigfaltigkeit,
ω C^1-$(k-1)$-Form auf U. $A \subset M$ Kompaktum mit glattem Rand ∂A,
Orientierung ∂A sei von äußerem Normalenfeld induziert (kanonisch).

Beh.:

$$\int_A d\omega = \int_{\partial A} \omega$$

XVIII.24.1 Bemerkungen:

- $\partial A = \{p \in M \mid \exists$ Folgen $(x_r) \subset A, (y_r) \subset M \setminus A$ mit $x_r \to p, y_r \to p\}$ (relativer Rand)
- M sei orientiert und φ randadaptiert. Falls φ nicht positiv orientiert ist, schalte $(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_k) \mapsto (y_1, \ldots, y_{k-1}, -y_k)$ vor (bildet H_k in sich ab). Dann existiert ein randadaptierender, positiv orientierter Atlas von M. Dieser induziert einen Atlas für ∂A. Dieser hat dann (per Definition) die von M auf ∂A induzierte Orientierung.

XVIII.25 Definition: Diameter

$$\operatorname{diam}(K) := \sup_{x,y \in K} \|x - y\|$$

XVIII.26 Lemma (Lebesgue)

Vor.:

$A \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $(U_i)_{i \in I}$ Familie offener Teilmengen des $\mathbb{R}^n$,
$A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$

Beh.:

Es existiert ein $\lambda > 0$ ("Lebesgue-Zahl") mit der Eigenschaft:
Jede Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $A \cap K \neq \emptyset$ und $\operatorname{diam}(K) \leq \lambda$ ist ganz in einem U_i enthalten.

XVIII.27 C^∞-Zerlegung der Eins

Suche $a_{p\varepsilon} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ für $\varepsilon > 0$, $p \in \mathbb{R}^n$ mit $\operatorname{supp}(a_{p\epsilon}) = \overline{B_{\|.\|_\infty}(p\varepsilon, \varepsilon)}$ und $\sum_{p \in \mathbb{Z}^n} a_{p\varepsilon}(x) \equiv 1$.

Definiere dazu:

$$\begin{aligned}
g(t) &:= \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right), & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases} \\
G(t) &:= \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(t-k) \\
h(t) &:= \frac{g(t)}{G(t)} \\
x &= (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n \\
a_{p\varepsilon}(x) &:= \prod_{i=1}^{n} h\left(\frac{x_i}{\varepsilon} - p_i\right)
\end{aligned}$$

XVIII.28 Fixpunktsatz Browner

Vor.:

$U \subset \mathbb{R}^n$ nichtleer, kompakt, konvex, $f : U \to U$ stetig.

Beh.:

Es existiert ein $x \in U$ mit $f(x) = x$ (Fixpunkt).

XVIII.29 Satz (Perron-Frobenius)

Vor.:

$A := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad a_{i,j} > 0 \; \forall \, i, j$

Beh.:

A hat einen reellen positiven Eigenwert λ mit Eigenvektor mit reellen positiven Komponenten.

Teil 3

Anhang

Anhang A

Differentialformen 1. Ordnung

A.1 Totales Differential von Funktionen

Vergleiche Übung 1, Sonderaufgabe 3

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetige differenzierbare Funktion auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann gilt:

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

A.2 Abschätzung Integral

Vergleiche Übung 2, Sonderaufgabe 2

Vor.:

f stetige Funktion, γ Integrationsweg

A.2.1 Definition: Länge

$$\begin{aligned} L(\gamma) &:= \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} \sqrt{\operatorname{Re}(\gamma'(t))^2 + \operatorname{Im}(\gamma'(t))^2} dt \\ &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} |\gamma'(t)| dt \end{aligned}$$

Beh.:

$$\left| \int_\gamma f(z) dz \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{z \in \operatorname{Bild}(\gamma)} |f(z)|$$

Anhang B

Integralformel von Cauchy

B.1 Konstante Funktionen

Vergleiche Übung 2, Sonderaufgabe 5, Übung 2, Hausaufgabe 4 sowie
Übung 5, Sonderaufgabe 3,

Es sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$.
Falls eine der folgenden Bedingungen gilt, so ist f konstant:

1. $\mathrm{Re}(f)$ konstant
2. $\mathrm{Im}(f)$ konstant
3. $|f|$ konstant
4. $\exists\, a, b \in C, (a, b) \neq (0, 0)$ mit $au(z) + bv(z) =$ konstant
5. $u = h \circ v$ mit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ einer differenzierbare Funktion
6. f ist eine ganze Funktion mit überall positivem Realteil

B.2 Holomorphie

Vergleiche Übung 3, Sonderaufgabe 2

Vor.:

Es sei $U \subset \mathbb{C}$ offen und L eine Gerade in der Ebene $\mathbb{C}$.
Weiterhin sie $f : U \to \mathbb{C}$ stetig und auf $U \setminus L$ holomorph.

Beh.:

f ist holomorph auf ganz U.

B.3 Schwarzsches Spiegelungsprinzip

Vergleiche Übung 3, Sonderaufgabe 5

Vor.:

Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\bar{z} \in G$ für alle $z \in G$. Des weiteren seien

$$G_+ := \{z \in G \mid \Im(z) > 0\}, \qquad G_0 := \{z \in G \mid \Im(z) = 0\}$$

und $f : G_+ \cup G_0 \to \mathbb{C}$ stetig mit $f_{|G_+}$ holomorph und $f(G_0) \subseteq \mathbb{R}$.

Beh.:

Dann ist $g : G \to \mathbb{C}$ mit $g(z) := \begin{cases} f(z), & z \in G_+ \cup G_0 \\ \overline{f(\overline{z})}, & \text{sonst} \end{cases}$ holomorph.

B.4 Laurentreihen

Vergleiche Übung 4, Sonderaufgabe 3

B.4.1 1. Möglichkeit: Einsetzen

Benutze bekannte Funktionen: Anhang I.1

Falls f von der Form $f = \frac{g}{h}$ ist, wobei für g und h die Laurentreihen um den selben Entwicklungspunkt bekannt sind und z_0 Polstelle der Ordnung n ist:
Dann ist f von der Form $f(z) = \sum_{k=-n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$.
Berechne $f \cdot h$ mit Hilfe des Cauchy-Produktes

$$\left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} \alpha_j \beta_{n-j}\right)$$

und erhalte a_k durch Koeffizientenvergleich.

B.4.2 2. Möglichkeit: Partialbruchzerlegung

Seien $z, z_0 \in \mathbb{C}$ (z_0 Entwicklungspunkt).
Schreibe $F(z)$ mit Hilfe von Partialbruchzerlegung (V.29). Entwickle dann jeden Summanden $f(z)$ von der Form $\frac{1}{(z-w)^k}$ einzeln als Laurentreihe:

1. Fall: $k = 1$
Entwicklung innen: $|z - z_0| < |w - z_0|$

$$\frac{1}{z - w} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

Entwicklung außen: $|z - z_0| > |w - z_0|$

$$\frac{1}{z - w} = \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n-1}}$$

2. Fall: $k > 1$
Benutze

$$\frac{1}{(z - w)^k} = \frac{d}{dz} \frac{1}{1 - k} \frac{1}{(z - w)^{k-1}}$$

B.5 Konvergenzradius der Potenzreihe bei Singularitäten

Vergleiche Übung 4, Sonderaufgabe 7

Vor.:

Es sei $P \subset \mathbb{C}$ eine endliche Punktmenge und $f : \mathbb{C} \setminus P \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass $p \in P \Leftrightarrow p$ ist Singularität von f. Es sei $\bar{p} \notin P$ und ρ der Konvergenzradius der Potenzreihe für f im Entwicklungspunkt $\bar{p}$.

Beh.:

$$\rho = \min_{p \in P} |p - \bar{p}|$$

B.6 Zusammenhang Nullstelle - Polstelle

Vergleiche Übung 5, Sonderaufgabe 1

Vor.:

Seien $f : B(0, r) \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und $n \in \mathbb{N}$.

Beh.:

f hat Nullstelle der Ordnung n in 0, genau dann, wenn $\frac{1}{f}$ in 0 eine Polstelle der Ordnung n hat.

B.7 Bernoulli-Zahlen

Vergleiche Übung 5, Sonderaufgabe 2

B.8 Zum Beweis des Identitätssatzes XII.24

Vergleiche Übung 5, Sonderaufgabe 8

Vor.:

Sei $G \subset \mathbb{C}$ Gebiet, $\qquad A \subset G$ offen und relativ abgeschlossen.

Beh.:

$$A \neq \emptyset \Longrightarrow A = G$$

Anhang C

Satz Casorati-Weierstraß

C.1 Polynome

Vergleiche Übung 8, Sonderaufgabe 5

Seien $P(z)$ und $q(z)$ Polynome vom Grad n bzw. m.
Dann hat die rationale Funktion $f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}$ in $z = \infty$

- einen Pol der Ordnung $n - m$, falls $n > m$
- eine holomorph hebbare Lücke, falls $n = m$
- eine Nullstelle der Ordnung $m - n$, falls $n < m$.

Anhang D

Logarithmus

D.1 Eigenschaften

Vergleiche Übung 5, Sonderaufgaben 5 und 6

Vor.:

Sei $\log : \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} \mid <\leq 0\}$ der Hauptzweig des Logarithmus und seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$
Für $z \in \mathbb{C}$ sei die Menge $\mathrm{LOG}\, z$ definiert als $\mathrm{LOG}\, z := \{w \in \mathbb{C} \mid w = \log z + 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Beh.:

Im Allgemeinen gilt für log:

- $\log(z_1 z_2) \neq \log(z_1) + \log(z_2)$
- $\log(\frac{z_1}{z_2}) \neq \log(z_1) - \log(z_2)$

Für LOG gilt jedoch:

- $\mathrm{LOG}\,(z_1 z_2) = \mathrm{LOG}\,(z_1) + \mathrm{LOG}\,(z_2)$
- $\mathrm{LOG}\,(\frac{z_1}{z_2}) = \mathrm{LOG}\,(z_1) - \mathrm{LOG}\,(z_2)$

D.2 Potenzen

Vergleiche Übung 6, Sonderaufgabe 2 und Hausaufgabe 1

$a \in \mathbb{C}^*$ und $b, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Bezüglich eines Zweiges des Logarithmus gilt:

- $a^{z_1+z_2} = a^{z_1} \cdot a^{z_2}$
- $(z_1 \cdot z_2)^b \neq z_1^b \cdot z_2^b$
- Sei $G \subset \mathbb{C}^*$ Gebiet auf dem ein Zwei des Logarithmus existiert
  und $f : G \to \mathbb{C}, \quad f(z) = z^b$.
  $\Longrightarrow f'(z) = b \cdot z^{b-1}$

D.3 Definition: Harmonisch

Vergleiche Übung 5, Hausaufgabe 6
Eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ heißt *harmonisch*, falls $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Anhang E

Residuensatz

E.1 Residuen

Vergleiche Übung 6, Hausaufgabe 2

- Ist g in z_0 holomorph und hat f dort einen Pol erster Ordnung, so ist $\mathrm{res}_{z_0} g \cdot f = g(z_0) \cdot \mathrm{res}_{z_0} f$.
- Hat die in einer Umgebung von z_0 holomorphe Funktion h in z_0 eine Nullstelle erster Ordnung, so gilt: $\mathrm{res}_{z_0} \frac{1}{h} = \frac{1}{h'(z_0)}$
- f, g holomorph in $a \in \mathbb{C}$, $\quad g$ habe in a eine Nullstelle erster Ordnung.

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f'(a)g'(a) - f(a)g''(a)}{(g'(a))^3}$$

- f, g holomorph in $a \in \mathbb{C}$, $\quad g$ habe in a eine Nullstelle zweiter Ordnung.

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{res}_a \frac{f}{g} = \frac{6f'(a)g''(a) - 2f(a)g'''(a)}{3(g''(a))^2}$$

Anhang F

Abbildungssatz von Riemann

F.1 Kreise und Geraden

Vergleiche Übung 7, Sonderaufgaben 3 und 4 sowie
Übung 8, Sonderaufgabe 1

Seien $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{C}$.

- Jede Gleichung der Form

$$(*) \qquad \alpha z\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + \gamma = 0, \quad |b|^2 - \alpha\gamma > 0$$

  stellt einen Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{C}$ dar.

- Alle Geraden und Kreise in $\mathbb{C}$ können in der Form $(*)$ dargestellt werden.

- Für $\alpha = 0$ ist $(*)$ eine Geradengleichung, für $\alpha \neq 0$ stellt $(*)$ einen Kreis mit Mittelpunkt $-\frac{b}{\alpha}$ und Radius $\sqrt{\frac{|b|^2-\alpha\gamma}{\alpha^2}}$ dar.

- Die Abbildung $\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\omega(z) = \frac{1}{z}$ bildet Kreise und Geraden, die durch $z = 0$ gehen auf Geraden ab, sowie Kreise und Gerade, die nicht durch $z = 0$ gehen, auf Kreise ab.

- Jeder Automorphismus auf $\hat{\mathbb{C}}$ bildet Geraden und Kreise auf Geraden und Kreise ab.

F.2 Automorphismen

Vergleiche Übung 5, Hausaufgabe 3

Jeder Automorphismus $\frac{az+b}{cz+d}$ läßt sich aus Translationen $z \mapsto z + b$, Drehstreckungen $z \mapsto az$ und Inversion $z \mapsto z^{-1}$ zusammensetzen.

F.3 Automorphismen auf B

Vergleiche Übung 5, Hausaufgabe 4

$B := B(0,1)$
Ein Automorphismus gehört genau dann zu $\mathrm{Aut}\,(B)$, wenn er sich als

$$\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}, \quad a\bar{a}-b\bar{b}>0$$

schreiben läßt.

F.4 Automorphismen auf einem Gebiet

Vergleiche Übung 8, Sonderaufgabe 3

Es sei $f : G \to B$ eine gegeben konforme Abbildung eines Gebietes G auf die Einheitskugel B.
Dann ist

$$\mathrm{Aut}\,(G) = f^{-1} \circ \mathrm{Aut}\,(B) \circ f$$

F.5 Konforme Abbildung von $B \to \mathbb{H}$

Vergleiche Übung 7, Hausaufgabe 5

Es sei $\mathbb{H} \subset \mathbb{C}$ die offene obere Halbebene. Dann bildet

$$f(z) := i\frac{1-z}{1+z}$$

den Einheitskreis B *konform* auf $\mathbb{H}$ ab.

$$f^{-1}(z) = \frac{i-z}{i+z}$$

Anhang G

Differentialformen höherer Ordnung

G.1 Definition: Vektorprodukt

Vergleiche Übung 9, Sonderaufgabe 4

Es seien $v, w \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig. Dann gibt es genau einen Vektor $u \in \mathbb{R}^3$, der die folgende Bedingung erfüllt:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^3 : u^T \xi = \det(v|w|\xi).$$

Dieser Vektor u wird das *Vektorprodukt* $v \times w$ von v und w genannt.

Es gilt

- u steht auf v und w senkrecht.
- Die Länge von u stimmt mit dem Flächeninhalt des Parallelogramms $P(v, w)$ überein und (v, w, u) bildet ein "Rechtssystem".
- Die erste Koordinate von u ist $(\omega_2 \wedge \omega_3)(v, w)$, wobei $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Dualbasis zur Standardbasis ist.

G.2 Eigenschaften von vektoriellen "Elementen"

Vergleiche Übung 9, Sonderaufgabe 5 und Hausaufgabe 4

Auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ seien die Vektorfelder $a, b, c : U \to \mathbb{R}^3$ gegeben. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(a^T d\overrightarrow{s}) \wedge (b^T d\overrightarrow{s}) &= (a \times b)^T d\overrightarrow{S} \\
(a^T d\overrightarrow{s}) \wedge (b^T d\overrightarrow{S}) &= (a^T b) dV \\
(a^T d\overrightarrow{s}) \wedge (b^T d\overrightarrow{s}) \wedge (c^T d\overrightarrow{s}) &= \det(a|b|c) \cdot dV
\end{aligned}$$

Anhang H

Integration von Differentialformen

H.1 Koordinatentransformation

H.1.1 Kugelkoordinaten

Vor.:

Vergleiche Übung 10, Sonderaufgabe 2

Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

In einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ seien Differentialformen

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz &&= f \cdot d\overrightarrow{s} \\ \omega_2 &= F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy &&= F \cdot d\overrightarrow{S} \end{aligned}$$

gegeben. Sei $V = \Phi^{-1}(U)$ und

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega_1 &= g_1 dr + g_2 d\theta + g_3 d\varphi \\ \Phi^*\omega_2 &= G_1 d\theta \wedge d\varphi + G_2 d\varphi \wedge dr + G_3 dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

Beh.:

$$\begin{aligned} g_1 &= (f_1 \circ \Phi)\sin(\theta)\cos(\varphi) + (f_2 \circ \Phi)\sin(\theta)\sin(\varphi) + (f_3 \circ \Phi)\cos(\theta) \\ g_2 &= (f_1 \circ \Phi) r\cos(\theta)\cos(\varphi) + (f_2 \circ \Phi)\cos(\theta)\sin(\varphi) - (f_3 \circ \Phi) r\cos(\theta) \\ g_3 &= -(f_1 \circ \Phi) sin(\theta)\sin(\varphi) + (f_2 \circ \Phi) r\sin(\theta)\cos(\varphi)\cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1 &= (F_1 \circ \Phi) r^2\sin^2(\theta)\cos(\varphi) + (F_2 \circ \Phi) r^2\sin^2(\theta)\sin(\varphi) + (F_3 \circ \Phi) r^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ G_2 &= (F_1 \circ \Phi) r\sin(\theta)\cos(\theta)\cos(\varphi) + (F_2 \circ \Phi) r\sin(\theta)\cos(\theta)\sin(\varphi) - (F_3 \circ \Phi) r\sin^2(\theta) \\ G_3 &= (F_1 \circ \Phi) r\sin(\varphi) + (F_2 \circ \Phi) r\cos(\varphi) \end{aligned}$$

H.1.2 Zylinderkoordinaten

Vor.:

Vergleiche Übung 10, Hausaufgabe 3

Es sei $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ \theta \end{pmatrix}.$$

In einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^3$ seien Differentialformen

$$\begin{aligned} \omega_1 &= f_1 dx + f_2 dy + f_3 dz &&= f \cdot d\overrightarrow{s} \\ \omega_2 &= F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy &&= F \cdot d\overrightarrow{S} \end{aligned}$$

gegeben. Sei $V = \Phi^{-1}(U)$ und

$$\begin{aligned} \Phi^*\omega_1 &= g_1 dr + g_2 d\theta + g_3 d\varphi \\ \Phi^*\omega_2 &= G_1 d\theta \wedge d\varphi + G_2 d\varphi \wedge dr + G_3 dr \wedge d\theta \end{aligned}$$

Beh.:

$$\begin{aligned} g_1 &= (f_1 \circ \Phi)\cos(\varphi) + (f_2 \circ \Phi)\sin(\varphi) \\ g_2 &= -(f_1 \circ \Phi) r\sin(\varphi) + (f_2 \circ \Phi) r\cos(\varphi) \\ g_3 &= (f_3 \circ \Phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1 &= (F_1 \circ \Phi) r\sin(\varphi) - (F_2 \circ \Phi)\cos(\varphi) \\ G_2 &= (F_1 \circ \Phi) r\cos(\varphi) + (F_2 \circ \Phi) r\sin(\varphi) \\ G_3 &= (F_3 \circ \Phi) r \end{aligned}$$

H.2 Integration von 2-Formen

Vergleiche Übung 10, Sonderaufgabe 3

Vor.:

Sei $\omega = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy = (f,g,h)^T \cdot d\overrightarrow{S}$ eine stetig differenzierbare 2-Form auf dem $\mathbb{R}^3$ mit $d\omega = 0$. Sei η 1-Form mit

$$\begin{aligned} \eta = &\left(\int_0^1 f(tx,ty,tz)tdt\right)(ydz - zdy) \\ &+ \left(\int_0^1 g(tx,ty,tz)tdt\right)(zdx - xdz) \\ &+ \left(\int_0^1 h(tx,ty,tz)tdt\right)(xdy - ydx) \end{aligned}$$

Beh.:

$$d\eta = \omega$$

H.3 Integration von 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten

Vergleiche Übung 11, Sonderaufgabe 2

Vor.:

Sei $(M, \sigma) \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte 2-dimensionale Mannigfaltigkeit und
$\varphi : U \to V \subset M$ eine (bzgl. σ) positiv orientierte Karte. $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))^T$
Es sei $\eta : M \to \mathbb{R}^3$ das (bzgl. σ) positiv orientierte Einheitsnormalenfeld sowie
$f : V \to \mathbb{R}^3$ ein integrierbares Vektorfeld.

Beh.:

(a) Auf U gilt $\varphi^* d\overrightarrow{S} = (\varphi_u \times \varphi_v) du \wedge dv$.

(b)
$$\int_V f \cdot d\overrightarrow{S} = \int_V f \cdot \eta dS = \int_U \det(f \circ \varphi, \varphi_u, \varphi_v) dudv$$

H.4 Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik

Vergleiche Übung 12, Sonderaufgabe 1

Es bezeichne v das Geschwindigkeitsfeld einer Strömung in $\mathbb{R}^3$ und ρ die variable Massendichte. Beide Größen sind nicht nur von den Ortskoordinaten, sondern auch von der Zeit abhängig.
Es gilt die Kontinuitätsgleichung der Thermodynamik:

$$\operatorname{div}(\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Anhang I

Hilfreiches

I.1 Reihen und Funktionen

$z \in \mathbb{C}$

$\exp(z)$	$=$	$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!}$	$II.97$
$\log(1+z)$	$=$	$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} z^n$, falls $\lvert z \rvert < 1$	Übung 4, Sonderaufgabe 5
$\sin(z)$	$=$	$\frac{1}{2i}\left(\exp(iz) - \exp(-iz)\right)$	
	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$II.108$
$\cos(z)$	$=$	$\frac{1}{2}\left(\exp(iz) + \exp(-iz)\right)$	
	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}$	$II.108$
$\sinh(z)$	$=$	$\frac{1}{i}\sin(iz) = \frac{1}{2}\left(\exp(z) - \exp(-z)\right)$	
	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}$	$II.112$
$\cosh(z)$	$=$	$\cos(iz) = \frac{1}{2}\left(\exp(z) + \exp(-z)\right)$	
	$=$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}$	$II.112$
$\tan(z)$	$=$	$\frac{\sin(z)}{\cos(z)}$	$III.1.(28)$
$\mathrm{cotan}(z)$	$=$	$\frac{\cos(z)}{\sin(z)}$	$III.1.(28)$
$\tanh(z)$	$=$	$\frac{\sinh(z)}{\cosh(z)}$	$III.1.(29)$
$\mathrm{cotanh}(z)$	$=$	$\frac{\cosh(z)}{\sinh(z)}$	$III.1.(29)$

I.2 Integrale

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin^2(t)dt &= \pi \\
\int_0^{2\pi} \cos^2(t)dt &= \pi \\
\int_0^{2\pi} \sin(t)\cos(t)dt &= 0
\end{aligned}$$

I.3 Funktionswerte trigonometrischer Funktionen

$$\begin{array}{lclclcl}
\sin(0) & = & 0 & \quad & \cos(0) & = & 1 \\
\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) & = & \frac{1}{2} & & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & = & \frac{1}{\sqrt{2}} & & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & = & \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & = & \frac{\sqrt{3}}{2} & & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & = & \frac{1}{2} \\
\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & 1 & & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & = & 0 \\
\sin(\pi) & = & 0 & & \cos(\pi) & = & -1
\end{array}$$

Für Rechenregeln siehe II.109 und II.111.

I.4 Sonstiges

I.4.1 abc-Formel

$$ax^2 + bx + c = 0 \Longleftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

I.4.2 Differenzierbarkeit der Inversen

Vergleiche IV.12

Index